vhs Deutscher Volkshochschul-Verband

Basisqualifizierung ProGrundbildung

Modul 6: Rechnen lehren und Ökonomische Grundbildung

Modul 6:
Rechnen lehren und Ökonomische Grundbildung

Teil 1: Seite 1–138
Rechnen lernen und Rechnen lehren

Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer

Teil 2: Seite 1–47
Ökonomische Grundbildung

Prof. Dr. Bernd Remmele,
Prof. Dr. Günther Seeber, Friederike Stoller

Modul 6:

Rechnen lehren und Ökonomische Grundbildung

Teil 1:

Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer

Rechnen lernen und Rechnen lehren

Vorwort

Das DVV-Rahmencurriculum Rechnen

Rechnenlernen gehört zweifelsohne zum Kanon der Grundbildung. Dennoch sind Angebote für Erwachsene relativ rar und pädagogisch wie didaktisch bislang wenig fundiert. Das Rahmencurriculum Rechnen des DVV liefert eine systematische Grundlage für Rechenkurse in Weiterbildungseinrichtungen. Es formuliert nicht nur Lernziele, sondern erklärt auch, warum manche Erwachsene scheinbar einfache Rechenoperationen nicht ausführen können und wie diese Operationen transparent und verstehbar gemacht werden. So führt es Lehrkräfte in den Anfangsunterricht mit Erwachsenen ein.

Darüber hinaus soll das DVV-Rahmencurriculum Rechnen Impulse für den Ausbau des elementaren Rechenunterrichts in Weiterbildungseinrichtungen geben.
Ein flächendeckendes Angebot für den nachholenden Erwerb grundlegender Rechenkenntnisse ist dringend erforderlich. Für Deutschland liegen zwar noch keine Daten zum Verbreitungsgrad gravierendster Defizite im Rechnen vor[1], doch klagen Arbeitgeber/-innen seit Jahren über mangelhafte Rechenkenntnisse von Ausbildungsplatzbewerbern selbst bei niedrigen Anforderungen[2].

Rechenkenntnisse sind in der Ausbildung bzw. am Arbeitsplatz unverzichtbar. Sie sind aber auch Voraussetzung für die alltäglichen ökonomischen Herausforderungen: Nur wer rechnen kann, kann Kontoentwicklungen kontrollieren, Preise vergleichen oder mit Zahlen unterlegte Informationen kritisch hinterfragen. Wer die eigenen Interessen als Bürger/-in und Konsument/-in kennen und vertreten will, braucht Rechenkenntnisse genauso wie Lese- und Schreibkenntnisse.

Internationale Untersuchungen weisen darauf hin, dass sich gerade die Förderung der Personen mit den schwächsten Rechenkenntnissen gesamtgesellschaftlich besonders auszahlen würde.[3] Dafür müssen viele jedoch erst einmal ihre Scheu vor dem Umgang mit Zahlen verlieren und vom Zählen zum Rechnen übergehen. Wie das gelingen kann, wird im ersten Teil des DVV-Rahmencurriculums Rechnen erläutert. Teil zwei erklärt, wie jede/r das Stellenwertsystem verstehen lernen kann. Teil drei leitet zu praxisbezogenen Informationen und Aufgaben über, die mit Grundkenntnissen in der Prozentrechnung verstanden bzw. gelöst werden können.

Forschung und Entwicklung für den elementaren Rechenunterricht mit Erwachsenen sind in Deutschland noch neu. Sie müssen fortgesetzt werden. Das DVV-Rahmencurriculum Rechnen macht den Anfang.

Gundula Frieling und Angela Rustemeyer

1) *PIACC gibt über die Beherrschung der elementarsten Rechenkompetenzen keine Auskunft.*
2) *http://hansberndulrich.files.wordpress.com/2012/06/langzeitstudie_2010.pdf, abgerufen am 30. 6. 2014.*
3) *So z. B. Numeracy Counts. NIACE Committee of Inquiry on Adult Numeracy Learning. Final Report • February 2011, S. 8.*

Einführung

Die Kurse „Rechnen Basis“ wenden sich an Erwachsene, die nicht bzw. nicht in einer für sie befriedigenden Weise rechnen können. In diesem Curriculum werden drei Stufen von Kursen „Rechnen Basis“ unterschieden.

Der Kurs Rechnen Basis 1 wendet sich an Erwachsene, die besondere Schwierigkeiten im Rechnen haben. Das zentrale Kennzeichen ihres mathematischen Standortes ist, dass sie auch basale Rechnungen im Zahlraum bis 20 nur zählend ausführen können. Dabei kennen sie durchaus die Zahlzeichen und können zumeist auch zählen und abzählen.

Für die Teilnehmer/-innen[4] von Kurs 1 geht es darum, einen Zahlbegriff aufzubauen, also zu verstehen, was Zahlen sind und wozu sie da sind, ein Operationsverständnis der Addition und Subtraktion aufzubauen, die Aufgaben des Einspluseins und des Einsminuseins bis 20 nichtzählend lösen und möglichst automatisch abrufen zu können sowie eine Zahlraumorientierung im Zahlraum bis 30 zu schaffen.

Der Kurs Rechnen Basis 2 erweitert die Zahlraumorientierung in größere Zahlräume hinein. Ein Operationsverständnis für die Multiplikation und die Division wird aufgebaut. Das Rechnen in allen vier Grundrechenarten wird hier nur so weit routinisiert, dass Größenordnungsvorstellungen entwickelt werden und dass der Taschenrechner verständig genutzt werden kann. Dazu wird ein Verständnis des Stellenwertsystems aufgebaut, und es wird erarbeitet, wie man mit Hilfe des stellenwertigen Aufbaus der Zahlen effektiv rechnen kann.

Die Kurse 1 und 2 sind recht nah entlang unmittelbarer Fähigkeiten in der Mengen- und Zahlabschätzung, in Zahl- und Größengefühlen, in der Zahlraumorientierung und entlang rechnerischer Fertigkeiten konzipiert. Der Kurs Rechnen Basis 3 hat einen deutlich anderen Charakter. Kurs 3 arbeitet sehr stark entlang jener konkreten praktischen Probleme, welche die Teilnehmer/-innen in den Kurs einbringen. In den Kursen 1 und 2 können die unmittelbar praktischen Bedürfnisse der Teilnehmer/-innen zwar den Ausgangspunkt der Arbeit bilden, aber die Kursarbeit muss sich doch recht eng an jenen mathematischen Ideen orientieren, die man verstehen muss, damit man überhaupt erst so rechnen kann, dass praktische Probleme bearbeitbar werden.

In Kurs 3 wird den Teilnehmer/-innen das sogenannte „bürgerliche Rechnen“ vermittelt. Hier geht es nicht mehr um ein basales Rechnenlernen, sondern um gesellschaftliche und ökonomische Teilhabe in einem schon recht erweiterten Sinn. Sie sollen in mathematikhaltigen Situationen mit Rechnungen, mathematischen und außermathematischen Abwägungen und Argumenten zu sinnvollen, vernünftigen und für sie zufriedenstellenden Entscheidungen kommen können. Ausgangspunkt

4) Dieses Curriculum wurde im Auftrag des Deutschen Volkshochschulverbandes erarbeitet. Deshalb wird auf die Formulierung „Kursteilnehmer/-innen an Volkshochschulen“ zurückgegriffen, gelegentlich ist auch von „Teilnehmer/-innen an Volkshochschulen“ die Rede. Gedacht ist dabei aber auch an Schüler/-innen von Schulen, Teilnehmer/-innen von Maßnahmen, Kund(inn)en von Bildungsfirmen, Lerner/-innen in Kursen usw.

des Kurses sind mathematische Probleme bzw. Fragen der Teilnehmer/-innen rund um Themen wie Kochrezepte, Reisen, Bankgeschäfte, Mieten oder rund um Zahlen, Daten und Grafiken aus Zeitungen. Aus diesen Problemen schälen sich die mathematischen Themen wie Prozentrechnung, einfache Begriffe und Maße der Statistik, Proportionalität und Antiproportionalität, Dreisatz sowie Tabellen und Grafiken heraus.

Die Kursteilnehmer/-innen sind in ihren schulischen mathematischen Lernprozessen gescheitert. Ein Hauptgrund hierfür ist die technische Orientierung des Mathematikunterrichts, also die Orientierung am Abarbeiten von Rechenverfahren statt an deren Verstehen. Die Kursteilnehmer/-innen waren Schüler/-innen, die bereits früh in ihrer Lernbiografie die Rechenverfahren nicht mehr erfolgreich ausführen konnten, weil sie nicht verstanden haben, warum die Verfahren in der geforderten Weise ausgeführt werden und warum sie zum richtigen Resultat führen. Deshalb fokussieren alle Kurse auf die Frage „Warum funktioniert das Verfahren?“ bzw. „Wie könnte es anders funktionieren?“ Dazu gehört, die von den Teilnehmer/-innen verwendeten – nicht immer sachadäquaten – Verfahren in Beziehung zu den zu lernenden Verfahren zu setzen. Die Kurse 1 und 2 sind sehr explizit mit dem Gedanken angereichert, dass die Teilnehmer/-innen zudem verstehen, woran ihre früheren Lernprozesse gescheitert sind. Dies ist notwendig, weil nur so vorhandene Fehlvorstellungen aufgebrochen und Traumata bearbeitet werden können.

Arbeitsprinzipien in mathematischen Basiskursen

Wolfgang Schlöglmann berichtet über mathematische Weiterbildungskurse: „Viele Erwachsene, die an Mathematikkursen teilnehmen, befinden sich in emotional schwierigen Situationen, die einerseits mit ihrer derzeitigen Lebenssituation, aber auch mit ihrer Lerngeschichte in Zusammenhang stehen. So haben viele von ihnen negative Erinnerungen an ihren schulischen Mathematikunterricht.

Die Kurssituation holt diese Erinnerungen wieder in das Bewusstsein, und sie lehnen sich gegen ein neuerliches Mathematiklernen auf. Für andere Erwachsene ist die Notwendigkeit, an Umschulungsmaßnahmen teilnehmen zu müssen, eine große emotionale Belastung, die zu einer generellen negativen Grundhaltung führt.“ *(Schlöglmann 2002, S. 24)*

Schlöglmanns Bericht läuft zusammen mit dem Ansatz vieler mathematischer Lern“therapien“, die großen Wert darauf legen, eine Lernsituation zu schaffen, die sich deutlich von der Schulsituation unterscheidet.

Auf der Ebene der Unterrichtsgestaltung bzw. der Methodik und Didaktik scheint es unabdingbar zu sein, dass

- die Lehrenden nicht mit einem fixen Curriculum in den Kurs gehen: Die Lernenden haben sich für den Kurs angemeldet, weil sie ein sehr persönliches und spezifisches Lernbedürfnis haben, welches meist von einer Defizitwahrnehmung gespeist ist. Sowohl die Spezifik des Lernbedürfnisses als auch die der Defizitwahrnehmung werden sich zwar erst nach und nach ausschärfen, sie sind aber die Leitschnur des Kurses. Das hier vorgestellte Curriculum stellt lediglich eine Folie dar, vor der die Bedürfnisse der Lernenden besser einzuordnen und zu verstehen sind und die sowohl notwendige Lernschritte als auch Grenzen des Erreichbaren absteckt.
- zu Beginn des Kurses eine „Auftragsklärung“ stattfindet: Um ein Arbeitsbündnis zu schaffen müssen die Teilnehmer/-innen die Möglichkeit haben, ihr Lernziel für den Kurs zur Diskussion zu stellen, so dass ein gemeinsam geteilter Auftrag als Ziel des Kurses benannt wird.
- das unterrichtliche Vorgehen sich strikt an den eigenen Lösungswegen der Lernenden entlang bewegt. Die Kursteilnehmer/-innen sind bislang mehr oder auch weniger gut durchs Leben gekommen, ohne rechnen zu können oder ohne elaboriert rechnen zu können. Sie haben eigene Problemlösungsmechanismen entwickelt, die man – auch in ihrer Umständlichkeit, gelegentlich in ihrer Komik – nicht nur würdigen muss, sondern die die Lehrenden auch als Bereicherung erleben können. Als methodisches Prinzip ist es deshalb unabdingbar, die je eigenen Lösungswege der Teilnehmer/-innen zu diskutieren und sie in Beziehung zu setzen sowohl miteinander als auch mit den konventionellen Lösungswegen. Dadurch werden mathematische Zusammenhänge durchschaubar, ebenso wird die Verallgemeinerungsfähigkeit der subjektiven Lösungswege diskutierbar. Formale Verfahren sind dann eventuell lediglich Mittel der effektiven Zusammenführung der subjektiven Verfahren.
- „Für Menschen, die Schwierigkeiten mit mathematischen Basisverfahren haben, ist es wichtig, die Begriffsbildungsprozesse (z. B. bei Zahlen) neu durchzuführen und darauf aufbauend die Grundrechnungsoperation zu entwickeln. Ein ‚reines‘ Trainieren der Operationen ohne vorherige Begriffsentwicklung ist meist nutzlos, da so eine Speicherung im episodischen Gedächtnis und nicht, wie notwendig, im semantischen Gedächtnis erfolgt.“ *(Schlöglmann 2002, S. 24)* Dieses Curriculum folgt diesem Prinzip durch eine konsequente Verbindung von Verstehen und Routinisierung.

Bei den Teilnehmer/-innen von mathematischen Basiskursen muss man davon ausgehen, dass die mathematische Lernbiografie in einer Sackgasse gelandet ist bzw. eine Scheiternsbiografie ist. Dabei ist es tendenziell nicht so, dass die Teilnehmer/-innen nicht mathematisch denken. Es ist eher so, dass sie eine andere Mathematik als die konventionell übliche konstruiert haben. Diese Mathematik ist meist von fragmentarisch angehäuften Rechenregeln, Tricks und Kniffen geprägt. Es ist – im Vergleich mit der Förderung von Schüler/-innen – eventuell leichter, die Teilnehmer/-innen von diesen Regeln und Kniffen zu lösen, da sie nicht mehr in der Schule sind, wo sie tagtäglich gezwungen waren, darauf zurückzugreifen, um Rechenresultate zu produzieren. Nichtsdestotrotz ist es eine Grundschwierigkeit in mathematischen Basiskursen, den Teilnehmer/-innen ihre Regeln und Kniffe bewusst zu machen, sie zu reflektieren und deren Grenzen aufzuzeigen und bei ihnen Vertrauen zu neuen Wegen zu schaffen. Grundsätzlich geht dies nur, wenn sie verstehen, warum die neu zu erlernenden Rechenverfahren funktionieren. In ihrer Scheiternsbiografie haben sie sehr häufig gehört, wie die Verfahren funktionieren, sie haben die Verfahren auch häufig geübt. Dieser fehlgeschlagene Weg darf nicht reproduziert werden, sondern es geht für die Teilnehmer/-innen darum, dieses Warum zu verstehen und mit diesem neuen Verständnis endlich das Verfahren auch routinisieren zu können. Gleiches gilt für Begriffsbildungen. Man kann hier die Dauerfrage formulieren: Was ist eigentlich gemeint mit …?

Stufe 1:

Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer

1. Voraussetzungen und Grunddispositionen des Rechnenlernens

Die Teilnehmer/-innen des Kurses Rechnen Basis 1 stammen im Allgemeinen nicht aus Kulturen, in denen sie keinen Rechenunterricht hatten, sondern sie haben langjährig Mathematikunterricht durchlaufen – und sind dabei gescheitert. Die Ursachen des Scheiterns sind je spezifisch, aber es ist davon auszugehen, dass es der Mathematikunterricht versäumt hat, bezogen auf das damalige Vorwissen der damaligen Schüler/-innen einen Weg von den zählenden Rechenstrategien, mit denen fast alle Kinder in die Schule kommen, hin zu nichtzählenden Strategien zu schaffen *(vgl. Meyerhöfer 2011, S. 401–426).*

Ein Element dieses „didaktischen Versagens“ kann gewesen sein, dass die Schule nicht erkannt hat, dass das Vorwissen der Schüler in den Bereichen

- Eins-zu-Eins-Zuordnung und Invarianz
- Teil-Teil-Ganzes-Verständnis
- Zählen und Abzählen
- Klassifikation und Seriation

nicht weit genug entwickelt war, um dem Mathematikunterricht folgen zu können. Es gibt keine Untersuchungen darüber, ob Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) eventuell diese Grunddispositionen des Rechnenlernens nie erlangt haben oder ob sie sie erst so spät erlangt haben, dass es ihnen während des Mathematikunterrichts der Grundschule nicht zur Verfügung stand, so dass sie keine Möglichkeit hatten, sich den mathematischen Lernstoff zu erschließen. Diese Grunddispositionen werden hier kommentiert einerseits, damit Sie als Kursleiter/-in die Frage im Hinterkopf behalten, ob Ihre Lerner/-innen eventuell nicht über sie verfügen. Wenn das der Fall ist, müssen Sie dies im Lehrprozess berücksichtigen. (Bei den ersten beiden Punkten und beim vierten Punkt müssen Sie dann mit Lernsituationen versuchen zu arbeiten, die die dabei angesprochenen Denkweisen nicht erfordern. Beim Punkt Zählen und Abzählen müssen Sie einen diesbezüglichen Lernprozess vorschalten.)

Die Grunddispositionen werden aber andererseits kommentiert, damit Sie dieses Hintergrundwissen im Gespräch mit den Teilnehmer/-innen verwenden können: Mathematische Basiskurse sind auch immer der Frage nach den Ursachen des eigenen Scheiterns am Rechnen ausgesetzt. Oftmals hilft es im Lernprozess, wenn Lerner/-innen die Ursachen früheren Scheiterns zu erkennen vermögen.

1.1 Eins-zu-Eins-Zuordnung und Invarianzverständnis

Die Eins-zu-Eins-Zuordnung, oder häufig auch Stück-für-Stück-Korrespondenz genannt, ist eine wichtige Zugangsform für die Mengengleichsetzung und den Mengenvergleich. Sie schafft die Voraussetzung dafür, dass die Kinder verstehen, dass Mengen bei reinen Veränderungen ihrer äußeren Gestalt ihre Anzahl nicht verändern („Invarianz"). Ein klassisches Experiment dazu ist folgendes:

Der Proband soll eine für ihn überschaubare Menge legen, z. B. 7 rote Plättchen. Fordern Sie den Probanden auf, gleich viele blaue Plättchen zu den roten Plättchen zu legen. Dies geschieht über direkte Eins-zu-Eins-Zuordnung, d. h., jedem roten Plättchen wird einzeln ein blaues Plättchen zugeordnet, oder über Abzählen (also über eine Eins-zu-Eins-Zuordnung, bei der jedem Objekt genau ein Zahlwort zugeordnet wird). Diese Herstellung einer Eins-zu-Eins-Zuordnung beherrschen Kinder meist bereits im Vorschuljahr.

Nun fragen Sie, ob gleich viele rote und blaue Plättchen vorhanden sind und warum.

Danach schieben Sie eine der beiden Reihen zusammen bzw. auseinander und fragen den Probanden, ob immer noch gleich viele rote und blaue Plättchen da sind. Wenn der Proband erkennt, dass die Anzahl der Mengenelemente trotz der Veränderung der Anordnung der Mengenelemente invariant bleibt, sich also nicht ändert, spricht man von Invarianzverständnis.

Ein Kind, das noch nicht versteht, dass trotz dieser Änderung der äußeren Gestalt der Menge immer noch gleich viele Plättchen vorhanden sind, wird Schwierigkeiten haben, wenn mit Mengen dynamisch agiert wird, weil es nicht sicher sein kann, dass die Anzahl der Mengenelemente bei diesem Agieren gleich bleibt. Vielleicht erinnern sich die Teilnehmer/-innen an dieses Problem bezüglich des eigenen Rechnenlernens.
Die Entwicklung von Kindern ist gekennzeichnet durch die Befreiung von der Figur oder der Wahrnehmungsanschauung. Für die Kinder kurz vor Beginn der Schule besteht die Entwicklungsaufgabe, sich von der Anschauung zu lösen. Dazu müssen sie Schritt für Schritt ihrem Eins-zu-Eins-Tun mehr vertrauen lernen als der unmittelbaren Anschauung. Die Argumentationen laufen dann darauf hinaus, dass die Handlungen umkehrbar sind („jetzt sieht es mehr aus, aber ich kann die Plättchen ja auch wieder zurückschieben, dann sehe ich ja, dass es immer noch gleich viele sind") oder dass mehrere Eigenschaften gedanklich verknüpft werden („diese Plättchenreihe ist zwar breiter ausgedehnt, aber dafür liegen die Plättchen ja auch weniger dicht").

Es erscheint kaum vorstellbar, dass Erwachsene nicht in der Lage sind, eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz herzustellen – das Experiment dient mehr der Reflexion von Problemen der Kindheit. Wenn doch, dann sind Sie als Kursleiter/-in gefragt, wie weit die Teilnehmer/-innen mit Ihnen gemeinsam den Weg des Rechnens zu gehen in der Lage sind. Falls Teilnehmende trotz Diskussion von Invarianzsituationen kein Invarianzverständnis erlangen, dann müssen Sie Mengendarstellungen, bei denen sich die äußere Gestalt der Menge ändert, ohne dass sich die Menge ändert, immer sehr ausführlich kommentieren oder aber vermeiden. Leitschnur dabei ist: Wer sich auf die Invarianz einer Menge bei Formveränderung nicht verlassen kann, der ist immer unsicher, „wie viele da liegen". Zahlen sind aber dazu da, Anzahlen zu beschreiben. Wer also bei der Frage „Wie viele?" unsicher ist, der wird auch Zahlen immer als unsichere Handlungspartner erleben.

1.2 Zählen und Abzählen

Abzählen

Es ist zentral für den Erwerb eines Zahlbegriffs, dass die Lernenden Zahlen als Bezeichnungen von Anzahlen verstehen und nicht lediglich als Glieder der Zahlwortreihe. Zahlen antworten zunächst auf die Frage „Wie viele?". Deshalb wird hier das Abzählen getrennt betrachtet vom Zählen (Aufsagen der Zahlwortreihe). Im Mittelpunkt stehen die Mengenerfahrung und die Zuordnung von Mengen zu Zahlen als Anzahlkategorien.

Im Entwicklungsprozess des Abzählens lassen sich folgende Phasen beobachten:

- In den Anfängen werden die Elemente abgezählt, indem jedes gezählte Element verschoben wird.
- Im Folgenden genügt das Antippen der gezählten Elemente.
- Es folgt das Abzählen ohne taktile Hilfen, also „nur mit den Augen".

Bei Menschen, die nicht richtig abzählen können, lässt sich beobachten, dass sie sozusagen diese Entwicklungsstufen nicht „sauber durchlaufen haben": Sie zählen nur mit den Augen oder mit Antippen der Mengenelemente, aber sie kommen dabei durcheinander. Man kann sich das vielleicht als eine Art nicht eingestandener Selbstüberschätzung oder Selbstüberforderung vorstellen: Auch wer gut abzählen kann, wird bei großen ungeordneten Mengen das Antippen oder das Verschieben der Mengenelemente nutzen. Wenn Menschen also auf diese Hilfen verzichten und dadurch durcheinanderkommen, dann gilt es, sie davon zu überzeugen, auf diese Hilfen zurückzugreifen, was sie vielleicht aus Scham, aus Ehrgeiz, Zerstreuung usw. normalerweise vermeiden. Vielleicht ist eine Nachfrage genau an dieser Stelle ein Zugang zum mathematischen Denken der Betroffenen: „Ich selbst würde hier ja die bereits gezählten Gegenstände zur Seite schieben, ich komme sonst immer durcheinander. […] Warum machen Sie das eigentlich anders?"

Ziel der Entwicklung sollte darüber hinausgehend die Loslösung vom stückweisen („eins-weisen" oder „eins-schrittigen") Zählen zum strukturierten („mehrschrittigen") Zählen sein. Hier sollte beobachtet werden, ob die Teilnehmer/-innen im Laufe der Entwicklung und durch die Gewinnung von Sicherheit im Umgang mit dem Abzählen selber zu Vereinfachungen im Sinne des strukturierten Zählens übergegangen sind oder ob dieser Prozess noch zu initiieren ist.

Eine Erleichterung für das spätere Loslösen vom zählenden Rechnen ist das Erfassen von kleinen Mengen auf einen Blick (simultane Mengenerfassung). Dies wird durch Muster wie z. B. Würfelmuster erleichtert.

Was beim Zählen zu beachten ist, ist in den **Abzählprinzipien**[5] formuliert, die helfen, die Ursache von eventuell auftretenden Abzählfehlern zu verstehen:

5) *In der Mathematikdidaktik wird hier meist von Zählprinzipien gesprochen. Für die Bearbeitung von besonderen Schwierigkeiten im Rechnen ist die Unterscheidung von Zählen und Abzählen aber zentral, da die Betroffenen z. T. zählen, aber nicht abzählen können oder eventuell umgekehrt die Abzählprinzipien verstanden haben, aber die Zahlwortreihe nicht stabil beherrschen.*

- Das Eindeutigkeitsprinzip: Jedem der zu zählenden Objekte wird genau ein Zahlwort zugeordnet.
- Das Prinzip der stabilen Ordnung: Die Reihe der Zahlworte hat eine feste Ordnung.
- Das Kardinalzahlprinzip: Das zuletzt genannte Zahlwort gibt die Anzahl der Objekte einer Menge an.
- Das Abstraktionsprinzip: Es kann jede beliebige Menge ausgezählt werden, d. h., es kommt nicht darauf an, welcher Art die Objekte sind, die gezählt werden.
- Das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung: Die jeweilige Anordnung der zu zählenden Objekte ist für das Zählergebnis nicht von Bedeutung.
- Prinzip der beliebigen Reihenfolge: Die Reihenfolge, in der die Elemente gezählt werden, ist für das Zählergebnis egal.

Zählen und Zahlwortreihe
Nicht zufällig ist in diesem Curriculum das Abzählen vor dem Zählen positioniert: Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) waren Kinder mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen *(vgl. Meyerhöfer, 2011, S. 401–426).*

Manche von ihnen konnten bei Schulbeginn gut zählen, hatten aber nicht verstanden, dass Zahlen in der Hauptsache gar nicht zum Zählen da sind, sondern zum Abzählen, dass sie also Symbolisierungen für Anzahlen sind. Rechnen war dann für sie das Vorwärtslaufen auf der Zahlwortreihe (addieren) oder das Rückwärtslaufen auf der Zahlwortreihe (subtrahieren). Im Kurs Rechnen Basis 1 muss dieses Missverständnis aufgeklärt werden.

Nichtsdestotrotz ist auch das Zählenkönnen unabdingbar für das Erlernen des Rechnens. Alle Kinder erlernen das Rechnen zunächst über Zählprozesse; und wer nicht richtig zählen kann, der hat keine sichere Basis, um vom Zählen zu nichtzählenden Strategien zu gelangen. Man braucht Sicherheit, dass man beim zählenden Rechnen wirklich zum richtigen Ergebnis gelangt ist, sonst muss man immer und immer wieder zählen.

Man kann die o. g. Abzählprinzipien auf das Zählen übertragen. Hier gilt:

- Das Prinzip der stabilen Ordnung: Die Reihe der Zahlworte hat eine feste Ordnung.
- Das Eindeutigkeitsprinzip: Jede Zahl darf nur genau einmal auftauchen. Keine Zahl darf ausgelassen werden, und keine Zahl darf doppelt genannt werden.

Die Kursleiterin/der Kursleiter muss herausfinden, inwieweit die Teilnehmer/-innen richtig zählen können. Man kann hier zur Orientierung wieder verschiedene Könnensstufen unterscheiden:

- Das Aufsagen der Zahlwortreihe ist zunächst wie das Aufsagen eines Gedichtes. Der Kursleiter/die Kursleiterin muss überprüfen, ob die Teilnehmer/-innen dieses Gedicht korrekt aufsagen können – zunächst im Zahlraum bis 30. Potentielle Knackpunkte dabei sind die Grenzflächen, an denen die Zahlwortbenennung ihr Prinzip ändert: Bis Zwölf erhält jede Zahl ein unsystematisch konstruiertes Zahlwort, dann folgt ein ungünstiges Konstruktionsprinzip, das Sie auch als ungünstig diskutieren können: Obwohl die Zahl 13 sich ja aus 10 und 3 zusammensetzt und somit die 10 innerhalb des Symbols „13“ quasi vorn steht, steht sie im Zahlwort „drei-zehn“ hinten. Das mag manchen der Teilnehmer/-innen als Kind verwirrt haben.

Deutlicher sichtbar wird diese Inkonsistenz in den Zahlwörtern ab 21: Im Wort „einundzwanzig“ ist eine klare Strukturaussage enthalten: eins und zwanzig. Geschrieben wird aber 21, was gesprochen „zwanzigundeins“ heißen müsste. Diese Inkonsistenz hat bei vielen Teilnehmer/-innen früher den Lernprozess torpediert, und sie haben mit Zahlendrehern gekämpft, also z. B. 35 als 53 geschrieben.

- Es genügt nicht, die Zahlwortreihe als Gedicht aufsagen zu können. Es ist auch notwendig, sie ab einer bestimmten Stelle aufsagen zu können – so als ob man ein Gedicht ab irgendeiner beliebigen Zeile aufsagen kann, ohne dass man von vorn beginnen muss. Man muss also auch von 5 oder von 7 ausgehend zählen können. Nur dann kann man z. B. 7 + 6 lösen, indem man von 7 ausgehend weiterzählt. Wenn man die Zahlwortreihe nur von eins ausgehend aufsagen kann, dann muss man vorher noch bis sieben zählen und dann noch sechs weiter zählen, was deutlich aufwendiger ist. Es muss also überprüft werden, ob die Teilnehmer/-innen auch von einer beliebigen Zahl an zählen können.
- Eine erhebliche Effektivierung von Zählprozessen erreicht man, wenn man in der Lage ist, in Zweierschritten, Dreierschritten usw. zu zählen. Außerdem stärkt dies die Zahlraumorientierung.
- Das Rückwärtszählen ermöglicht erste Zugänge zum Subtrahieren, es dient aber ebenso der Herausbildung einer elaborierteren Zahlraumorientierung. Teilnehmer/-innen, die von früheren Problemen im Subtrahieren berichten, sind oft auch deshalb gescheitert, weil mit ihnen das Rückwärtszählen nicht in einem so genügenden Maße routinisiert wurde, dass sie sich geschmeidig gedanklich im Zahlraum rückwärts bewegen konnten.

Für alle diese Zählroutinen gibt es keine „didaktischen Tricks“. In der gemeinsamen Diskussion von Zählfehlern hilft die Explizierung der Zählprinzipien den Teilnehmer/-innen, die eigenen Probleme besser zu verstehen. Notwendig ist aber auch eine Routinisierung, also vielfältige Zähl- und Abzählanforderungen. Beachten Sie, dass das Abzählen zwar das Zählen – auch in Zweierschritten, Dreierschritten usw. – routinisiert, dass aber das Zählen ab einer bestimmten Zahl und das Rückwärtszählen kaum mit Abzählprozesses geübt werden kann. Hier muss man explizite Zählaufgaben stellen.

1.3 Klassifikation und Seriation

Über Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) liegt kaum systematisches Wissen vor, das in die wissenschaftliche Debatte um das Rechnenlernen – die sich mit dem Rechnenlernen von Kindern befasst – eingeordnet wäre. Bezüglich der Fähigkeit zu Klassifikation und Seriation ist in besonderem Maße unklar, ob bei erwachsenen Lernern in unserem Kulturkreis diesbezüglich überhaupt Probleme auftauchen – oder ob lediglich lernbiografisch über die Fähigkeit zur Klassifikation und Seriation reflektiert werden muss. In jedem Fall ist die Fähigkeit zu Klassifikation und Seriation eine notwendige Voraussetzung des Rechnenlernens, denn

- Zahlen sind Symbole für Klassen von Mengen gleicher Mächtigkeit. Alle möglichen Mengen, die die Eigenschaft haben, eine Fünfheit zu enthalten, werden mit dem Symbol 5 oder „fünf“ „gelabelt“. Man muss das Prinzip der Bildung von Klassen oder von Kategorien beherrschen, damit man erkennen kann, welche Kollektionen von Dingen überhaupt zu den Fünfheiten dazugehören können.

- Zahlen sind geordnet. Die Idee der Anzahl kann nur entstehen, wenn man Kollektionen von Dingen bezüglich ihrer Anzahl *unterscheidet*. So wie der Begriff „rot“ nur Sinn ergibt, wenn es auch andere Farben gibt, so ist der Begriff „fünf“ nur dann sinnvoll, wenn es auch andere (An-)Zahlen gibt. Man muss also Unterschiede erkennen können, um sinnvoll mit Zahlen arbeiten zu können. In der Psychologie und der Mathematikdidaktik folgt man dabei dem Gedanken, dass die Fähigkeit, Dinge zu sortieren (nach größer/kleiner, dicker/dünner, länger/kürzer) notwendig ist, um eine Sortierung nach mehr/weniger vornehmen zu können. Dabei scheint die implizite Annahme zu sein, dass es eine Art allgemeine Fähigkeit zur Seriation gibt, dass also, wer Gegenstände systematisch und paarweise strikt ihrer Größe/Dicke/Länge nach sortieren kann, dies auch mit Mengen und mit einem Fokus auf der Anzahl (mehr/weniger) kann.

Klassifikation und Seriation geschieht bei Tätigkeiten wie Sortieren, Kategorisieren, Differenzieren und Zuordnen. Das Sortieren von Mengen nach Eigenschaften schafft die Zuordnung zu Kategorien. Im Laufe des Entwicklungsprozesses können Kinder nach mehreren Kriterien sortieren (nicht nur rot versus grün oder rund versus eckig, sondern auch: rot und eckig versus grün und eckig, versus rot und rund versus grün und rund). Sie erkennen auch, dass ein Gegenstand zu mehreren Kategorien gehören kann. Umgekehrt sollten die Gemeinsamkeiten einer Kategorie erkannt werden (Erkennen der Klassifizierungskriterien).

Im Klassifizieren müssen bei einem Objekt einzelne Aspekte wahrgenommen werden. Beim Erkennen von Anzahleigenschaften müssen ebenso irrelevante Aspekte ausgeblendet werden.

Auch die Zahlen können als Kategorien gesehen werden: Wir schauen auf die Welt mit dem Fokus auf eine bestimmte Eigenschaft, nämlich die Anzahlhaftigkeit oder Mengenhaftigkeit. Wir kategorisieren Mengen hinsichtlich dieser Eigenschaft.
Falls sich diesbezügliche Aktivitäten als notwendig erweisen, achten Sie auf Begründungen, warum Dinge zusammengehören. Wir können Gegenstände nach unterschiedlichen Kriterien sortieren – dadurch entstehen unterschiedliche Ergebnisse, dies kann am besten in einem kommunikativen Prozess erkannt, thematisiert und nachvollzogen werden. Die Anzahl ist nur eines von vielen möglichen Kriterien – und man muss sich zunächst einlassen auf die Spezifik des mathematischen Blicks auf die Welt, der genau dieses Kriterium fokussiert.

2. Lernziele und Lernwege

In diesem Kapitel wird dargestellt, wie der Erwerb von Zahlbegriff, Zahlraumorientierung und Rechnen stattfindet.

Es gibt kaum empirische Erkenntnisse über die „mathematischen Weltbilder“ und das mathematische Lernen von Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR). Die Mathematikdidaktik weiß kaum etwas darüber, wie EbSR Zahlen oder Rechenoperationen konzipieren, welche Zahlraumvorstellungen sie haben und wie sich das alles vom „mathematischen Weltbild“ von Menschen, die rechnen können, unterscheidet. Kursleiter/-innen sind also permanent aufgefordert, diesen – ihnen wahrscheinlich eher fremden – Weltsichten mit Neugier und analytischer Schärfe zu begegnen. Ebenso wenig wissen wir über die Spezifik der mathematischen Lernprozesse von Erwachsenen im Vergleich zu denen bei Kindern. Dem Autor des Curriculums liegen lediglich einige mündliche Erfahrungsberichte aus „Rechenschwäche“-Förderungen mit Erwachsenen vor. Der Tenor ist dabei der, dass mit Erwachsenen der grundsätzlich gleiche Prozess des Aufbaus von Zahlverständnis, Operationsverständnis und Zahlraumorientierung durchlaufen wurde wie auch bei der „Rechenschwäche“-Förderung von Kindern – und dass dieses Vorgehen sich nach Darstellung der Berichtenden als erfolgreich erwies.

Dieses Curriculum bearbeitet diese Wissensunschärfen auf folgende Weise: Die Richtschnur des Curriculums ist der Erwerb von Zahlbegriff, Operationsverständnis und Zahlraumorientierung bei Kindern. Dieser Prozess ist bei EbSR gescheitert. Dieses Scheitern hat individuell je spezifische Ursachen, und im Curriculum sind jene Verstehensknackpunkte benannt, an denen nach den Erfahrungen aus kindlichen Lernprozessen das mathematische Lernen „hakt“ oder scheitert. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Lernprozesse deshalb gescheitert sind, weil die Schule diese Verstehensknackpunkte nicht in notweniger Weise bearbeitet hat *(vergleiche das Konzept der „nicht bearbeiteten stofflichen Hürden“, Meyerhöfer, 2011, S. 401–426).*

Im Curriculum werden also Optionen benannt, an denen der frühere mathematische Lernprozess der Teilnehmer/-innen gescheitert ist. Umgekehrt werden damit jene Knackpunkte benannt, an denen der Kurs Rechnen Basis 1 besonders sorgfältig Verständnis erarbeiten muss. Erschwert wird dies dadurch, dass die Teilnehmer/-innen über je unterschiedliche Verstehens- und Wissensfragmente, Strategien, Fehlstrategien und Vorstellungsmuster verfügen. Das Curriculum hat einen Vollständigkeitsanspruch bezüglich des zu Leistenden. Es kann aber die Breite des bei den Teilnehmer/-innen vorfindlichen Spektrums an mathematischen kognitiven Landschaften nur grob abstecken, um Kursleiter/-innen in die Normalität einer von ihnen vielleicht nicht erwarteten Spannweite hineinzuleiten. Für konkrete Erarbeitungs-, Reflexions- und Routinisierungsformate muss auf noch zu erarbeitende Handreichungen verwiesen werden.

2.1 Zählende Rechenstrategien

Die Hauptaufgabe des Kurses „Rechnen Basis 1“ ist es, die Teilnehmer/-innen von ihren zählenden Rechenstrategien hin zu nichtzählenden Strategien zu begleiten, ein adäquates Operationsverständnis von Addition und Subtraktion und eine Zahlraumorientierung bis 30 auszubilden. Zum Ende des Kurses sollten die Teilnehmer/-innen zudem die Plus- und Minusaufgaben bis 20 möglichst auswendig abrufen können. Sie sollen sie dabei nicht auswendig lernen, sondern über nichtzählende Strategien so häufig lösen, dass sie auswendig verfügbar werden.

Alle Menschen rechnen als Kinder zunächst zählend. EbSR sind auf dieser Ebene des Rechnens verblieben. Um ihnen zu nichtzählenden Strategien verhelfen zu können, sollten zunächst sie selbst und auch die Kursleiterinnen die von den Lernern verwendeten Zähl- und Abzählstrategien verstehen. Man kann zählende Strategien nach ihrer Elaboriertheit sortieren (die personenspezifischen Zähltechniken unterscheiden sich dann nochmals stark untereinander). Die am wenigsten elaborierte Strategie ist das Alleszählen.

Alleszählen

Zum Auszählen der Aufgabe 3 + 5 mit dieser Strategie legt man 3 Mengenelemente hin, dann legt man 5 Mengenelemente hin. Nun zählt man aus, wie viele Mengenelemente insgesamt daliegen. Das ist ziemlich aufwendig, denn man zählt dabei jeden Summanden einzeln und auch noch die Summe.

Dieses Verfahren kann man genauso ohne konkret vorhandene Mengen ausführen: Man zählt im Kopf drei Gegenstände ab, dann zählt man ebenfalls im Kopf fünf Gegenstände ab, und schließlich stellt man sich alle Gegenstände gemeinsam vor und zählt die Summe ab. Manche Kinder erbringen diese anspruchsvolle Merkleistung für erstaunlich große Mengen.

Das Alleszählen funktioniert auch für die Subtraktion: Bei 7 – 4 legt man zunächst sieben Gegenstände hin, dann schiebt man vier Gegenstände beiseite und zählt aus, wie viele Gegenstände noch daliegen.

Weiterzählen

Beim Weiterzählen (3 + 5) legt man wieder drei Mengenelemente hin, danach fünf weitere Mengenelemente, wobei man bereits während des Hinlegens der fünf Elemente mitzählt, also „4, 5, 6, 7, 8“. Man muss also zweimal gleichzeitig zählen: Man zählt die fünf hinzugelegten Elemente, und gleichzeitig zählt man, wie viele Elemente insgesamt schon daliegen. Diese Strategie ist zwar schwieriger, aber man spart Zeit, weil man während des Hinzuzählens der fünf Elemente bereits das Ergebnis mitzählt. Noch schneller geht es z. B. mit den Fingern, wenn man die drei am Anfang nicht zählt, sondern gleich als Ganzes zeigen kann.

Bei der Subtraktion (7 – 4) legt man sieben Elemente hin, und während man vier Elemente davon wegnimmt, zählt man mit, wie viele noch daliegen: „6, 5, 4, 3“. Auch hier zählt man gleichzeitig die Elemente, die man wegnimmt, und das Resultat. Das ist etwas schwieriger als bei der Addition, weil man einmal vorwärts (den Subtrahenden) und gleichzeitig einmal rückwärts (den Abbau des Minuenden) zählen muss.

Das Weiterzählen kann man ohne konkret vorhandenes Mengenmaterial im Kopf durchführen. Ein großer technischer Fortschritt gegenüber dem Alleszählen ist, dass man sich bei dieser Methode die Mengen nicht mehr vorstellen (und dann abzählen) muss, sondern einfach gedanklich die Zahlwortreihe hochlaufen (Addition) oder runterlaufen (Subtraktion) kann. Genau dieser technische Fortschritt ist aber Menschen, die bei ihren zählenden Rechnentechniken steckengeblieben sind, zum Verhängnis geworden: Der geringere Aufwand trägt oftmals dazu bei, beim Zählen zu verbleiben, statt sich auf effektivere, aber zunächst aufwendigere Strategien einzulassen.

Weiterzählen vom größeren Summanden aus

Eine weitere Verkürzung des Zählprozesses erreicht man, indem man 3 + 5 nicht mehr von 3 aus zählt, sondern von 5: Bei 3 + 5 hat man fünf Zählschritte, bei 5 + 3 nur drei Zählschritte. Wer bereits weiß, welche Zahl die größere ist, der sollte vom größeren Summanden aus zählen.

Unklar bleibt, ob Menschen, die bereits vom größeren Summanden aus weiterzählen, die zugrundeliegende Kommutativität der Addition verstanden haben. Dies ist möglich, ebenso kann es aber sein, dass sie lediglich einen „Rechentrick“ verinnerlicht haben. Mit ihnen muss also diskutiert werden, warum es überhaupt möglich ist, vom größeren Summanden aus weiterzuzählen.

2.2 Gründe, das zählende Rechnen zu überwinden

Als Schwierigkeiten und Gefahren des zählenden Rechnens vermerkt bereits Gerster:

- „Die Techniken des Vollständig-Auszählens sind umständlich, die Weiterzähltechniken erfordern doppeltes Zählen (das verbal gestützt werden kann, zum Beispiel bei 4 + 3 durch die Sprechweise 4 plus 1 sind 5, plus 2 sind 6, plus 3 sind 7; bei 7 – 3 entsprechend 7 minus 1 sind 6, minus 2 sind 5, minus 3 sind 4; oder man benutzt die Finger).
- Beim zählenden Rechnen ist das Ergebnis oft um 1 zu groß oder zu klein, weil die Rolle des Anfangs- oder Endgliedes der Zählsequenz unklar ist.
- Zählkinder verwenden nicht die Zahlensätze, die sie bereits auswendig wissen, sondern tendieren zur stereotypen Anwendung ihrer Zähltechnik.
- Zähltechniken können trainiert und perfektioniert werden, mit zunehmender Perfektion schwindet aber das Bedürfnis, sich Zahlensätze zu merken. Zähltechniken fördern nicht das Bedürfnis, sich etwas zu merken. Das Repertoire auswendig gewußter Zahlensätze steigt nur sehr langsam oder gar nicht.
- Wenn Kinder in mittleren Schuljahren Fakten immer noch nicht auswendig wissen, verzichten sie auf Merkversuche ganz und verlassen sich voll auf instrumentelle Nutzung von Gegenständen, vor allem der Finger.
- Zählende Rechner haben es schwer, zwischen der Aufgabe und dem nach einem länger dauernden Zählverfahren gefundenen Ergebnis eine Verbindung herzustellen. Das Lernen einer assoziativen Verknüpfung zwischen Aufgabe (= Reiz) und Ergebnis (= Reaktion) gelingt aber nur, wenn Reiz und Reaktion zeitlich dicht aufeinander folgen (etwa innerhalb einer Halbsekunde). Außerdem richtet sich die Aufmerksamkeit von Zählkindern mehr auf die Zählprozedur als auf den Zusammenhang zwischen Aufgabe und Ergebnis.

- Zählkinder entwickeln nicht Beziehungen zwischen Zahlensätzen. Nachdem sie zählend 3 + 3 berechnet haben, tun sie dasselbe anschließend mit 3 + 4, ohne sich den Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben bewusst zu machen und ihn zu verwenden. Die beiden nacheinander gestellten Aufgaben 3 + 4 und 13 + 4 berechnen sie jeweils zählend, ohne die dekadische Analogie zu verwenden.
- Zählendes Rechnen liefert jeweils nur Einzelfakten. Diese werden aber nicht in ein Beziehungsgeflecht eingebettet, gehen also leicht aus dem Gedächtnis verloren.
- Bei schriftlichen Rechenverfahren, beim Lösen von Sachaufgaben, bei geometrischen Berechnungen usw. beansprucht zählendes Rechnen viel Aufmerksamkeit, die dann für die Planung von Lösungsschritten und das Einhalten von Verfahrensregeln nicht mehr zur Verfügung steht.

Schließlich ist zum Problem des zählenden Rechnens folgendes zu bedenken: Aus der Beobachtung von Lernprozessen ist bekannt, daß das Gehirn dem Prinzip folgt, möglichst wenig Verarbeitungsaufwand zu investieren. Es gibt einen mentalen Widerstand gegen Veränderung eines erlernten Verhaltens. Selbst wenn Lernen (also Verhaltensänderung) stattfindet, scheinen die alten Verhaltensstrukturen noch weiter gespeichert zu bleiben. Unter ungünstigen Umständen, z. B. Streß, können sie erneut das Verhalten bestimmen *(Weidenmann, 1991)*. Gerade bei der Ablösung vom zählenden Rechnen treten in Streßsituationen (z. B. Wettrechnen, Klassenarbeiten) Rückfälle ins zählende Rechnen häufig auf. Wenn ein Kind sich zum ‚Zähler' entwickelt hat, sind Hilfsmaßnahmen ab Ende des zweiten Schuljahres sehr aufwendig und oft wenig erfolgreich *(Lorenz und Radatz, 1993, S.117)." (Gerster 1996, S. 140–142)*

2.3 Rechenwege: Verschiedene nichtzählende Strategien

Für die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 20 sollen möglichst viele Rechenstrategien („heuristische Strategien", „Rechenerleichterungen") kennengelernt werden:

- Verdoppeln/Halbieren
- Fastverdoppeln/Fasthalbieren
- Aufgaben mit Addition bzw. Subtraktion von 1
- Nachbaraufgabe
- Bezug zu 5/10
- Umkehraufgabe
- Analogiebildung
- Nutzen der Seriationslogik
- Ergänzen statt Abziehen
- gegensinniges/gleichsinniges Verändern
- schrittweises Rechnen (Teilschrittverfahren, Stopp bei Zehn)

Verdoppeln/Halbieren
Das Verdoppeln fällt Kindern besonders leicht, die Verdopplungsaufgaben können sie oftmals als erste auswendig. Gerade mit Hilfe von zweireihigem Material (z. B.

20er-Rechenrahmen oder 20er-Feld) gelingt dies vielleicht auch bei Erwachsenen. Man sollte nun einerseits immer wieder darauf aufmerksam machen, dass die Lernenden mit den Verdopplungen auch bereits die Halbierungen auswendig wissen, sie müssen die Verdopplungen „nur“ umgekehrt nutzen (Wer sich 6 + 6 = 12 gemerkt hat, der weiß im Grunde, dass 12 – 6 = 6 ist.) Der Zusammenhang von Addition und Subtraktion sollte sinnvollerweise permanent thematisiert werden.

Fastverdoppeln/Fasthalbieren

Wer einige Verdopplungen und Halbierungen auswendig kennt, der hat bereits eine starke Basis, um sehr viele Aufgaben leicht ohne Zählen zu rechnen: Wenn ich 4 + 4 weiß, dann kann ich 4 + 5 und 5 + 4 leicht ableiten („Nachbaraufgabe“). Von jeder gewussten Verdopplung oder Halbierung kann man somit zwei weitere Aufgaben leicht ohne Zählen ableiten. Kommen nun noch die +1/–1-Aufgaben hinzu, dann hat man sehr schnell die Erfahrung, viele Aufgaben bereits leicht ohne Zählen rechnen zu können. Wenn man – ehrlich gegenüber sich selbst – in einer 1 + 1-Tafel mit Buntstift jene Aufgaben kennzeichnet, die man bereits ohne Zählen lösen kann, dann sieht man seinen auswendig gewussten Aufgabenschatz sehr schön wachsen.

Aufgaben mit Addition bzw. Subtraktion von 1

Aufgaben wie 5 + 1 oder 1 + 8 oder 9 – 1 erscheinen uns trivial, für Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) sind sie das keineswegs, wenn sie die Beziehungen zwischen dem mengenbezogenen „um eins mehr/eins weniger“, der Reihenfolge der Zahlen auf der Zahlwortreihe und den Aufgaben mit +1 und –1 nicht verstanden haben. Wenn dieses Verständnis erarbeitet wurde und die Aufgaben mit +1 und –1 für die Lernenden leicht ohne Zählen verfügbar sind, dann haben sie einen Vorrat an abrufbaren Aufgaben, der ihnen als Ankerpunkt für weitere Ableitungsstrategien dient. Wenn ich z. B. weiß, dass 8 – 1 = 7 ist, dann kann ich 8 – 2 als Nachbaraufgabe von 8 – 1 leicht lösen.

Nachbaraufgabe

Beispiel 9 – 7: Ich weiß bereits, was 10 – 7 ist, nämlich 3. Ich soll die 7 aber von 9 abziehen, also von einem weniger als 10. Also ist 9 – 7 = 2

Als Nachbaraufgabe bezeichnet man alle Aufgaben, die sozusagen als Nachbarn neben einer Aufgabe liegen, d. h., ein Aufgabenelement ist um eins erhöht oder vermindert.

3 + 4 hat die Nachbaraufgaben 2 + 4, 4 + 4, 3 + 3 und 3 + 5.

8 – 5 hat die Nachbaraufgaben 9 – 5, 7 – 5, 8 – 4 und 8 – 6.

Den Teilnehmer/-innen muss dabei explizit bewusst gemacht werden, dass diese Aufgaben sehr leicht abgeleitet werden können, wenn man das Resultat von 3 + 4 bzw. von 8 – 5 bereits kennt. Auf der Verständnisebene gehört dazu ein umfassendes Verständnis der Beziehung eins mehr und eins weniger[6].

Die Fastverdopplungen sind spezielle Nachbaraufgaben, ebenso die Aufgaben mit Addition bzw. Subtraktion von 1.

6) *Vgl. ausführlich Kapitel 3: „Grundsätze der Ablösung vom zählenden Rechnen: Der relationale Zahlaspekt“.*

Bezug zu 5/10
Die Aufgaben mit Bezug zu 5 oder 10 sind einfach erlernbar, weil die Fingerstrukturen uns hier eine unmittelbare Hilfe zum Verinnerlichen der Zahlzusammenhänge geben. Allerdings müssen auch diese Beziehungen den Lernenden bewusst gemacht werden, damit sie sie im Weiteren nutzen können.

Umkehraufgabe
Es ist zentral, dass im Kurs „Rechnen Basis 1“ der Zusammenhang von Addition und Subtraktion sowohl auf der Ebene der Mengenhandlung als auch auf der Zahlebene immer wieder thematisiert wird. Auf der Mengenebene muss also das Vereinen von Mengen in seinem Zusammenhang mit dem Abtrennen von Teilmengen diskutiert werden; auf der Zahlebene spiegelt sich das in der Erkenntnis wider, dass Minusrechnen und Plusrechnen sich gegenseitig rückgängig machen.

Die Umkehraufgaben helfen den Teilnehmer/-innen einerseits im Sinne einer Rechenstrategie: Ich kann mir schnell überlegen, dass 9 – 6 = 3 ist, weil ich weiß, dass 3 + 6 = 9 ist. Fast noch wichtiger sind die Umkehraufgaben für eine Erleichterung des Auswendigwissens von Aufgaben: Ich kann mit der Zahlzerlegung 7, zerlegt in 5 und 2, eine Aufgabenfamilie bilden, die als Wissensnetz leichter abspeicherbar ist als vier einzelne Aufgaben: Zu 7/5/2 gehören die Aufgaben 5 + 2 = 7, 2 + 5 = 7, 7 – 5 = 2 und 7 – 2 = 5.

Analogiebildung
Ich weiß, dass 7 – 4 = 3 ist, also weiß ich auch, dass 17 – 4 = 13 und 27 – 4 = 23 ist. Diese Zusammenhänge sind EbSR oft nur als technische Anweisung gelehrt worden, z. B.: „Du rechnest nur 9 – 6 und schreibst die 1 davor.“ Dieser „Rechentrick“ scheitert allerdings bereits bei 17 – 8. Man kann sich das mathematische Weltbild mancher Betroffenen als fragmentarische Ansammlung solcher nur lokal sinnvollen Rechentricks vorstellen. Diese gilt es daher zu vermeiden.
Analogiebildungen sind unabdingbar, um später in höheren Zahlräumen rechnen zu können *(Kurs „Rechnen Basis 2“)*. Die Teilnehmer/-innen müssen aber verstehen, warum diese Analogien gelten. Dazu müssen sie verstehen, dass sich zweistellige Zahlen aus Zehnern und Einern zusammensetzen und auf welche Weise Analogien diese Zusammensetzung nutzen.

Nutzen der Seriationslogik
Zahlen sind nach dem Prinzip „Man beginnt bei 1 und dann wird es immer einer mehr“ seriiert. Diese Seriationslogik wird im Kurs expliziert und kann Rechenvereinfachungen bieten. Die Aufgabe 8 – 7 sollte nicht gerechnet werden, indem man 7 von 8 abzieht bzw. herunterzählt. Bei der Aufgabe 8 – 7 ist nichts zu rechnen, weil 7 vor 8 steht und somit der Vorgänger von 8 ist, 8 ist der Nachfolger von 7. Beide unterscheiden sich um eins, 8 ist einer mehr als 7, 7 ist einer weniger als 8. Also ist 8 – 7 = 1. Ähnlich verhält es sich bei 21 – 19. Diese Betrachtungen mögen trivial erscheinen, sie sind aber für EbSR nicht trivial, vielmehr fehlen ihnen genau solche Einordnungen. Sie sind oftmals darauf trainiert worden, dass im Mathematikunterricht alles „ausgerechnet“ werden soll, so dass sie ihren – eventuell durchaus erkannten – Rechenerleichterungen nicht mehr vertrauen.

Ergänzen statt Abziehen

Beim Subtrahieren stellt es manchmal eine Rechenerleichterung dar, wenn man ergänzt statt abzuziehen: Bei 23 – 19 ist es recht aufwendig, die 19 von den 23 abzuziehen. Wenn man erkennt, dass die Zahlen relativ dicht beieinander liegen, dann kann man von der 19 zur 23 „auffüllen“ bzw. „ergänzen“.

Gegensinniges/gleichsinniges Verändern

Dies sind sicherlich die am schwierigsten zu „fühlenden“ Rechenstrategien. Sie werden hier benannt für den Fall, dass Teilnehmer/-innen sie im Rahmen von Rechenkonferenzen (jeder erzählt, auf welche Weise er selbst eine bestimmte Aufgabe löst, die Rechenwege werden dann miteinander in Beziehung gesetzt) vorbringen.

5 + 7: Ich erkenne, dass ich 5 um eins erhöhen und gleichzeitig 7 um eins verringern kann, ohne dass sich die Summe ändert. Dann habe ich 6 + 6, und das weiß ich schon. Also ist 5 + 7 = 12. Man nennt dies „gegensinniges Verändern“, weil der eine Summand erhöht, der zweite vermindert wird.

9 – 7: Ich kenne die Minusaufgaben mit 10. Wenn ich in meiner Ausgangsmenge einen mehr habe und die Differenz gleich bleiben soll, dann muss ich auch einen mehr abziehen. Also muss ich 10 – 8 rechnen, das ist 2. Man nennt dies „gleichsinniges Verändern“, weil sowohl Minuend als auch Subtrahend erhöht werden.

Zahlzerlegungen und schrittweises Rechnen (Teilschrittverfahren, Stopp bei Zehn)

Die Strategie des schrittweisen Rechnens (andere Benennungen: Teilschrittverfahren, Rechnen über die Zehn, Rechnen mit Zehnerübergang, Stopp bei 10) wird im Zahlenraum über 20 unabdingbar sein, weil viele Aufgaben dort nur noch mit dieser Strategie lösbar sind. Diese Strategie ist die einzige Kopfrechenstrategie, mit der ich alle Plus- und Minusaufgaben lösen kann. Deshalb ist das Beherrschen des schrittweisen Rechnens für alle Kursteilnehmer/-innen ein zentrales Ziel des Kurses.

Unabdingbare Voraussetzung für das Beherrschen dieser Strategie ist das auswendige Beherrschen der Zahlzerlegungen bis 10. Dabei ist es erfahrungsgemäß so, dass die Zerlegungen von 1 bis 6 und die Zerlegung der 10 deutlich leichter auswendig gelernt werden als die Zerlegungen der 7, der 8 und der 9. Es erscheint sinnvoll, sich zunächst auf die einfachen Zahlzerlegungen zu beschränken und erfahrbar zu machen, welch große Zahl an Aufgaben man mit ihnen nichtzählend rechnen kann.

Es ist motivierend, wenn Sie den Teilnehmer/-innen klar machen, wie viele Aufgaben sie schon ableiten können, wenn sie die Zahlzerlegungen beherrschen: Mit den drei Zahlzerlegungen der 4 (0 + 4, 1 + 3, 2 +2) kennt man schon 10 Aufgaben:
0 + 4 = 4, 4 + 0 = 4, 4 – 4 = 0, 4 – 0 = 4, 1 + 3 = 4, 3 + 1 = 4, 4 – 1 = 3, 4 – 3 = 1, 2 + 2 = 4, 4 – 2 = 2.
Diese Zusammenhänge muss man allerdings auch auf der Mengenebene immer wieder herausarbeiten, denn sie erschließen sich nicht von allein.

Das Auswendigkennen der Zahlzerlegungen ist zwar eine notwendige Bedingung für das schrittweise Rechnen, aber es gibt Lerner, die die Zahlzerlegungen im Verlauf des Lernprozesses irgendwann beherrschen, sie aber nicht zum schrittweisen Rechnen verwenden. Es gibt also keinen Automatismus von den Zahlzerlegungen zum schrittweisen Rechnen. Vielmehr müssen die Teilnehmer/-innen erleben, dass sie mit dem neuen Verfahren Aufgaben lösen können, die sie mit ihren alten Strategien nicht oder nur sehr mühsam lösen können. Das schrittweise Rechnen ist zwar die universelle Kopfrechenstrategie, aber sie dürfte für Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) auch die widerständigste sein.

Flexible Rechner, Rechenkonferenzen
Die Versammlung der Rechenstrategien folgt dem Bild der „flexiblen Rechnerin“: Sie erfasst die gegebenen Zahlen ungefähr in ihren Größenordnungen oder in ihren Positionen auf der Zahlwortreihe und entscheidet sich in Abhängigkeit vom gegebenen Zahlenmaterial für die jeweils effektivste Rechenstrategie:

Wenn 6 + 7 zu rechnen ist, so ist eine Fastverdopplung einfacher als etwa das schrittweise Rechnen: Ich weiß, dass 6 + 6 = 12 ist, also muss 6 + 7 = 13 sein.

13 – 12 muss nicht gerechnet werden, wenn man die Seriationslogik nutzt: Die Zahlen stehen nebeneinander in der Zahlwortreihe bzw. die 13 ist Nachfolgerin der 12, also beträgt der Unterschied 1.

Natürlich werden sich nicht alle Teilnehmer/-innen am Ende des Kurses vertraut in allen Strategien bewegen, aber möglichst alle Strategien, zumindest aber alle von den Teilnehmer/-innen verwendeten Strategien müssen permanent im Kurs präsent sein. Es kommt darauf an, dass jeder einzelne Teilnehmer erlebt, dass seine eigenen nichtzählenden Rechenstrategien bedeutsam und anerkannt sind, dass er aber gleichzeitig sein Repertoire an nichtzählenden Strategien erweitert. Der Erfahrungshintergrund der Teilnehmer/-innen ist dabei, dass in ihrem Grundschulunterricht oft nur das Teilschrittverfahren, eventuell noch das Verdoppeln/Halbieren, präsent waren. An dieser Fokussierung auf das Teilschrittverfahren sind die Kursteilnehmer/-innen gescheitert, sonst wären sie nicht im Kurs „Rechnen Basis 1“. Man kann es (für die Grundschule) vereinfacht so sagen: Wer so weit ist, dass er das Teilschrittverfahren verstehen kann, der entdeckt es selbst. Wer nicht so weit ist, es zu verstehen, der versteht es auch mit Instruktion und Übung nicht. Als Kursleiter/-in müssen Sie darauf achten, dass dieses Misserfolgserlebnis sich nicht lediglich reproduziert.

Die verschiedenen nichtzählenden Rechenstrategien werden im Kurs präsent, wenn verschiedene Personen (Teilnehmer/-innen und Kursleiter/-innen) berichten, auf welche Weise sie selbst die Aufgabe lösen. In der Mathematikdidaktik nutzt man dafür den Begriff *Rechenkonferenzen*: Jeder erzählt, auf welche Weise er selbst eine bestimmte Aufgabe löst. Auch kleine Unterschiede können dabei bedeutsam sein. Die Rechenwege müssen miteinander in Beziehung gesetzt werden, so dass die Teilnehmer/-innen verstehen, was ein Verfahren für eine bestimmte Aufgabe effektiv oder weniger effektiv macht.

2.4 Bedeutung der Symbolisierung

Die Symbolisierung der Zahlen (Zahlzeichen 1, 2, 3 usw., Würfelaugenmuster, später auch Ideen zum Umgehen mit Zahlen, z. B. +, –, >, ∞, ∊ usw.) ist eine hohe Abstraktionsleistung. Aber erst sie ermöglicht ein allgemeines mathematisches Verständnis. Die Symbolisierung ist ein wichtiges Element der Kommunikation, durch Symbole können Informationen übermittelt werden – und dies auf wunderbar effektive Weise: Stellen Sie sich vor, welchen Aufwand man treiben müsste, um seinem Gegenüber klar zu machen, dass man von einer Fünfheit von Gegenständen spricht. – Dieses Komplizierte gerinnt einfach im Zeichen 5 oder im Zeigen der fünf Finger. Im Symbol ∞ gerinnt geradezu ein Kosmos von kindlichen und erwachsenen Gedanken zum Unendlichen. Ebenso wunderbar wie die Symbolisierung des Anzahlhaften durch Zahlen ist natürlich die Idee, einfach Buchstaben, etwa ein A oder ein N hinzumalen: Plötzlich kann man etwas in den Sand oder auf Papier malen, was doch eigentlich nur gesprochen existiert.

Für Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) ist es meist zu spät, sie selbst das Bedürfnis nach mathematischen Symbolen erleben zu lassen. Wenn man zum Beispiel Kinder in der ersten Klasse ein paar Wochen lang additive und subtraktive Situationen diskutieren und rechnen lässt, ohne dass dabei die Symbole + und – präsent sind, dann haben die Kinder von sich aus irgendwann ein Bedürfnis einer verkürzten Notation. Die Symbole + und – kommen dann als Erleichterungen ins Spiel – so wie es ja historisch auch der Fall war.

Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen leiden unter einer Art Symbol-Überfütterung: Sie wurden über ihren gesamten Mathematikunterricht mit Symbolen überschüttet, deren Bedeutung sie nicht oder nicht genau kannten. Die Grundhaltung des Kurses Rechnen Basis gegenüber Symbolen ist deshalb eine Fragehaltung: Was erzählt dieses Symbol? Warum wurde es erdacht, welchen Gedanken oder welche Frage sollte es transportieren? Diese Fragen müssen auch dann in den Raum gestellt werden, wenn der Kursleiter/die Kursleiterin sie nicht beantworten kann oder nur eigene Hypothesen hat, denn die Teilnehmer/-innen müssen in den Grundsatz eingearbeitet werden, dass man Symbole auf ihre Bedeutung hin befragen muss – und dass es nicht außergewöhnlich ist, dass auch Fachmenschen manchmal Schwierigkeiten in der Beantwortung solch einfacher Fragen haben.

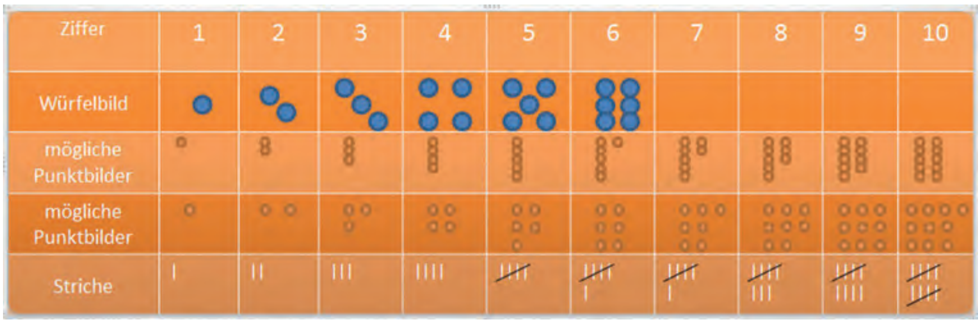
Darstellungsformen für Zahlen

Die Abbildung zeigt verschiedene Darstellungsformen für Zahlen: Ziffern, Würfelbilder, andere Punktbilder, Striche etc.

Die Teilnehmer/-innen sollen sich nicht nur vor Augen führen, welche verschiedenen Darstellungsformen für Zahlen ihnen in der Welt begegnen. Sie sollen die inhärenten Logiken der jeweiligen Zahldarstellungen analysieren und weiterführen. So ist beim Punktmuster in der dritten Zeile die Fortführung recht deutlich vorgegeben. Bei den Würfelmustern gibt es hingegen viele verschiedene Möglichkeiten, die Folge der Muster weiterzuführen, weil die Würfelmuster mehreren Symmetrien folgen, die keine Hierarchie zu haben scheinen.

Herauszuarbeiten ist eine Besonderheit unserer Zahlzeichen: Im Gegensatz zu den anderen in der Abbildung versammelten Zahldarstellungen ist in unseren

Zahlzeichen die Kardinalität der bezeichneten Menge völlig verschwunden. Das Symbol für die eins besteht nicht etwa aus einem Strich, sondern aus zwei Strichen. Das Symbol für die vier besteht nicht aus vier Strichen, sondern aus drei Strichen. Das Symbol für die sechs wird in einem einzigen Zug geschrieben, es besteht nicht etwa aus sechs Teilen. Diese besondere Eigenschaft unserer Zahlsymbole sorgt dafür, dass wir Anzahlen sehr effektiv hinschreiben können: Das Symbol für neun nimmt ebenso wenig Platz ein wie das Symbol für zwei, wohingegen neun Punkte mehr Platz benötigen als zwei Punkte. Diese besondere Eigenschaft unserer Zahlsymbole könnte aber auch etwas gewesen sein, das den Kursteilnehmern und Kursteilnehmerinnen den Zugang zu Zahlen versperrt hat, weil es sie irritiert hat, dass das Bezeichnete – die Anzahlen – so gar nichts mehr mit dem Zeichen – den Zahlsymbolen – zu tun hat und dass dieser Umstand von den Erwachsenen niemals thematisiert wurde.



Eine spezielle Art der Symbolisierung von Zusammenhangsdenken sind Gleichungen. Im Jeaner Rechentest (JRT) 1 muss zu den folgenden Gleichungen formuliert werden, welche Fragen zu den Gleichungen passen, und die Lücken müssen gefüllt werden:

☐ + 3 = 8	**2 + ☐ = 7**
☐ – 5 = 4	**9 – ☐ = 2**

Hier muss zunächst ein Missverständnis überwunden werden: Das Gleichheitszeichen wird oftmals als Anweisung, dahinter das Ergebnis zu schreiben, missverstanden. Es ist aber ein Symbol dafür, dass auf der linken und auf der rechten Seite des Zeichens die gleiche Anzahl versammelt ist. In diesem Sinne fordert dieser Typus Aufgaben das Verständnis einer Teil-Teil-Ganzes-Beziehung heraus. Man muss verstehen, welche Mengen- und Zahlzusammenhänge hier beschrieben sind.

2.5 Was ist Addieren? Was ist Subtrahieren? Wie hängen sie zusammen?

Wer nicht rechnen kann, hat oftmals auch nicht verstanden, was „Plusrechnen“ oder „Minusrechnen“ eigentlich bedeutet. Im JRT wird das Operationsverständnis der Addition mit folgender Frage überprüft: „Stell dir vor, du bist der Lehrer und erklärst, was mit 2 + 4 = 6 gemeint ist. Erkläre das mit Hilfe der Würfel.“ Vor dem Probanden liegen dabei Würfel, mit denen er arbeiten soll. Falls keine Mengenhandlung mit den Würfeln erfolgt, wird weitergefragt: „Kannst du eine Rechengeschichte erzählen, die zur Aufgabe 2 + 4 = 6 passt?“

Die gleichlautende Subtraktionsfrage arbeitet mit der Aufgabe 6 – 4 = 2.

Man kann den Begriff des Operationsverständnisses vielleicht so fassen: Es gilt zu verstehen, welche Fragen die Rechenoperation an Zahlen stellt und auf welche Weise sie sie beantwortet.[7]

Eine etwas andere Dimension von Operationsverständnis erschließt der folgende Begriff:

„Unter welchen Umständen wollen wir sagen: Das Kind hat die Operationen des Addierens/Subtrahierens ‚verstanden'?

Operationsverständnis beim Addieren/Subtrahieren besteht nach unserer Auffassung in der Fähigkeit, Verbindungen herstellen zu können zwischen

- (meist verbal beschriebenen) konkreten Sachsituationen,
- modell- oder bildhaften Vorstellungen von Quantitäten
- symbolischen Schreibweisen (meist in Form von Gleichungen) für die zugrunde liegenden Qualitäten und Rechenoperationen." *(Gerster und Schulz 2001, S. 351)*

In der mathematikdidaktischen Debatte wird die hier beschriebene Fähigkeit als „Intermodalität" bezeichnet. Dieser Begriff kann einfacher in konkrete Anforderungen übersetzt werden: Man kann konkret untersuchen, ob ein Mensch in der Lage ist, zwischen diesen verschiedenen „Modalitäten" oder Arten, eine Operation zu deuten, hin und her übersetzen kann. Man sieht aber ebenso, dass dieses Übersetzen zwischen Modalitäten nur indirekt zeigt, ob jemand wirklich verstanden hat, welche Fragen eine Operation stellt und auf welche Weise sie sie beantwortet.

Aus Defiziten im Operationsverständnis resultieren nicht nur die bekannten Probleme von Schülern mit Sachaufgaben, sondern mit solch defizitären Operationsvorstellungen versteht man die halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren nicht, man lernt nicht richtig, was Multiplizieren und Dividieren ist, und man bekommt Schwierigkeiten, die Addition und Subtraktion von Brüchen sowie von Variablen und Termen zu beherrschen.

Für zählende Rechner heißt Addieren, die Zahlwortreihe hochzulaufen. Subtrahieren heißt, die Zahlwortreihe runterzulaufen. Dieses Hoch- und Runterlaufen begegnet uns in vielerlei Varianten (vergleiche Abschnitt 2.1 „Zählende Rechenstrategien"), zum Teil mit Hilfe von vorgestellten Mengenelementen, zum Teil mit einer vorgestellten Zahlwortreihe, zum Teil durch „freies Laufen auf der Zahlwortreihe" ohne eine damit verbundene konkrete Vorstellung.

Beim Zählen ist das Addieren und Subtrahieren also auf die Position der Zahlen auf der Zahlwortreihe bezogen. Beim Rechnen hingegen werden Fragen über Anzahlen gestellt und beantwortet. 3 + 5 heißt: Zwei Mengen, eine Menge mit drei Elementen und eine Menge mit fünf Elementen, sollen zusammengefügt werden. Man kann

7) *Präziser formuliert: Welche Fragen in welchen Situationen stellt die Operation an Mengen und Zahlen, und welche Weisen der Beantwortung gelten in der Mathematikergemeinschaft als gültig?*

dazu beide Mengen konkret physisch zusammenfügen. Es kann aber auch die eine Menge zur anderen dazugelegt oder dazugedacht werden. Die Frage ist nun: Wie viele Elemente hat die so entstandene Gesamtmenge?

Wer das nicht weiß, der findet in der oben beschriebenen JRT-Aufgabe mit 2 + 4 = 6 keine Rechengeschichte, in der irgendwelche zwei Dinge mit irgendwelchen vier Dingen zu sechs Dingen zusammenkommen. Die „Erklärung" der Aufgabe mit Würfeln erfolgt dann gelegentlich so, dass die Aufgabe in ihrer Symbolform einfach mit Würfel „nachgelegt" wird:

8 – 5 heißt: Von einer Menge mit 8 Elementen soll eine Teilmenge mit fünf Elementen weggenommen werden. Die Frage lautet: Wie viele der acht Elemente sind liegengeblieben? Aus einer Menge wird also eine Teilmenge herausgelöst oder extrahiert.

8 – 5 kann aber auch heißen: Bei einer Menge mit acht Elementen und einer Menge mit fünf Elementen lautet die Frage: Wie viel mehr Elemente als in der 5-elementigen Menge sind in der 8-elementigen Menge enthalten? Auf der Zahlenebene: Wie viel mehr als 5 ist 8?

In der symbolischen Darstellung der Subtraktion 8 – 5 als Abziehen oder als Herauslösen einer Teilmenge taucht das Problem auf, dass die Ausgangsmenge (8) und die abzuziehende oder herauszulösende Menge (5) beide notiert werden. Wenn man das aber mengenmäßig macht, dann ist nach dem Herauslösen der Fünfermenge die Ausgangsmenge nicht mehr da. Es liegen nach Vollziehen der Operation eine Fünfermenge und eine Dreiermenge da. Man „sieht" von der Aufgabe 8 – 5 = 3 die letzten beiden Elemente. Bei der Addition 3 + 5 = 8 hingegen sieht man am Ende des Prozesses direkt die Achtermenge, also das Resultat. Diese Unterschiedlichkeit hat vielen Erwachsenen mit bSR den Zusammenhang zwischen Mengenhandlung und symbolischer Darstellung „vernebelt" und muss deshalb explizit diskutiert werden.

Addition und Subtraktion sind direkt miteinander verbunden. Das Zusammenfügen zweier Mengen kann durch das Herauslösen einer Teilmenge aus der so entstandenen Teilmenge rückgängig gemacht werden. Ebenso kann das Herauslösen einer Teilmenge aus einer Menge rückgängig gemacht werden durch das Wiederzusammenführen der herausgelösten Teilmenge mit der Restmenge. Die Subtraktion kann also die Addition rückgängig machen oder umkehren, und die Addition kann die Subtraktion rückgängig machen oder umkehren.

Auf der Zahlenebene heißt das:

Die Addition a + b = c hat die Umkehrungen c – b = a und c – a = b.

Die Subtraktion d – e = f hat die Umkehrung f + e = d.

Das bringt nun ein erhebliches Potential für Rechenerleichterungen mit sich: Wer weiß, dass 3 + 6 = 9 ist, der muss 9 – 3 und 9 – 6 nicht rechnen, wenn er den Zusammenhang von Addition und Subtraktion kennt. Auch für das Auswendigwissen des kleinen „Eins-plus-Eins“ und des kleinen „Eins-Minus-Eins“ bringt diese Erkenntnis erhebliche Vereinfachungen: Wenn ich die Zahlzerlegung von 6 in 2 und 4 kenne, dann kenne ich bereits vier Aufgaben, die man auch als Aufgabenfamilie bezeichnen kann, nämlich 2 + 4 = 6, 4 + 2 = 6, 6 – 4 = 2 und 6 – 2 = 4.

2.6 Wie viel? Der kardinale Zahlaspekt?

Wir schauen beim Abzählen mit einem bestimmten Fokus auf die Welt. Dabei ist nicht nach einer Eigenschaft wie Temperatur, Länge, Tonhöhe, Geschmack, Schmerzhaftigkeit gefragt, sondern eine andere spezifische Eigenschaft wird in den Blick genommen: die „Anzahlhaftigkeit“, auch Kardinalität (oder Mächtigkeit einer Menge) genannt. Diese Eigenschaft erschließt sich nur, wenn man sehr oft erlebt hat, wie man sie bestimmt. Man muss also viele Dinge abgezählt haben.

Man kann sich z. B. einen Haufen Haselnüsse vorstellen. Ein Kind will wissen, wie viele Nüsse es sind, es will sie abzählen.

- Eine Möglichkeit, den Überblick zu behalten, besteht darin, dass man jede gezählte Nuss zur Seite schiebt. Der Haufen der gezählten Nüsse wird immer größer, der Haufen der nicht gezählten Nüsse wird immer kleiner. Irgendwann sind alle Nüsse gezählt.
- Wenn man etwas besser zählen kann, dann tippt man die Nüsse nur noch an, schiebt sie aber nicht mehr einzeln zur Seite.
- Noch schwieriger ist es, die Nüsse nur noch mit den Augen abzuzählen, sie also dabei gar nicht mehr anzufassen oder auf sie zu zeigen.

Dabei scheint es wichtig zu sein, Kinder diese Schwierigkeitsstufen eigenständig durchlaufen zu lassen. Wenn Sie Teilnehmer/-innen haben, die auch kleinere Mengen nicht mit den Augen abzählen können, dann kann es sein, dass sie – aus welchen Gründen auch immer – zu früh auf die Abzählhilfen des Beiseiteschiebens oder des Antippens verzichtet haben. Man muss dann noch mal „einen Schritt zurückgehen“, also diese Abzählhilfen so lange nutzen, bis man sie nicht mehr benötigt. Beim Abzählen größerer Mengen greifen auch Erwachsene sinnvollerweise auf diese Hilfen zurück. Wer das nicht tut, der wird Schwierigkeiten haben, zu richtigen Abzählresultaten zu kommen.

Ein Kind, das die Zahlwortreihe als Gedicht aufsagt, ohne dieses Gedicht mit vielen Abzählerfahrungen verbinden zu können, muss sogar eine noch schwierigere Aufgabe als „nur mit den Augen zählen" erledigen: Es hat ja nicht mal mehr Nüsse als Merkhilfen, es muss die Reihenfolge der Zahlwörter gewissermaßen in den leeren Raum hinein erlernen. Es kann also sein, dass einige Teilnehmer/-innen das Zählen (also das Aufsagen der Zahlwortreihe) deshalb schwer erlernt haben, weil sie zu wenig Abzählanlässe hatten. Deshalb ist es auch problematisch, wenn Eltern oder Großeltern die Kinder auf das Zählen fokussieren, statt sie vielfältig abzählen zu lassen.

Das reine Aufsagenlassen der Zahlwortreihe wie ein Gedicht ist aber nicht vorrangig deshalb problematisch, weil den Kindern das Erlernen der Zahlwortreihe damit unsinnig erschwert wird. Schwerer wiegt es, wenn Kinder mit wenigen Abzählerfahrungen nicht verstehen, wozu Zahlen da sind. Sie denken möglicherweise, dass Zahlen nur zum Zählen oder zum Rechnen gebraucht werden. Diese absurde Vorstellung wird vom Mathematikunterricht immerfort bestätigt, wenn dort nur Wert auf das Produzieren korrekter Resultate gelegt wird.

Zahlen sind aber zunächst gar nicht zum Rechnen da. Zahlen sind zunächst dazu da, Anzahlen zu beschreiben. Sie haben also den Zweck, uns Auskunft über eine bestimmte Eigenschaft von Teilen der Welt zu geben. So wie die Wörter rot, gelb, grün usw. uns Auskunft über eine andere Eigenschaft von bestimmten Teilen der Welt geben („diese Hose ist blau"), so geben die Zahlwörter ebenfalls Auskunft über Teile der Welt, allerdings bezüglich der Eigenschaft „Anzahlhaftigkeit". Um diese Perspektive zu betonen, kann man es etwas verfremdend formulieren: „Der hier versammelte Teil von Welt (die Nüsse, die da liegen) verfügt bezüglich der Anzahlhaftigkeit über die Eigenschaft 8." Diese Eigenschaft Anzahlhaftigkeit scheint unabhängig davon zu sein, ob die Kollektionen aus Dingen gleicher Art oder verschiedener Art bestehen. Den Anzahlen kann man Zahlen zuordnen, und diesen Zahlen kann man verschiedene Symbole zuordnen: drei, 3, |||, ⚂ usw. Im Grunde passiert hier nichts weiter, als dass wir Mengen oder Kollektionen von Gegenständen betrachten, dabei auf eine bestimmte Eigenschaft fokussieren, nämlich die Anzahlhaftigkeit oder Kardinalität, und dass wir den Mengen dann eine Zahl als eine Art Label anhängen. Dieses Label kennzeichnet dann, welche konkrete Eigenschaft die Menge bezüglich der Anzahlhaftigkeit hat, ob die Menge also bezüglich der Eigenschaft „Anzahl" konkret die Eigenschaft 2 oder 3 oder 5 oder 9 hat.

Wer beim zählenden Rechnen hängenbleibt, weiß oftmals einfach nicht, wozu Zahlen da sind, weil er es nicht erfahren hat. Er denkt, Zahlen seien zum Rechnen da. Wenn Zahlen nur „die Zahlwortreihe" sind, dann wird Rechnen zum Entlanglaufen auf der Zahlwortreihe. Addieren heißt dann Vorwärtslaufen, Subtrahieren heißt Rückwärtslaufen.

Zur Ablösung vom zählenden Rechnen gehört also die Anbindung der Zahlwortreihe an die Erkenntnis, dass Zahlen Anzahlen beschreiben.

Kontrastierend dazu muss man mit den Teilnehmer/-innen diskutieren, in welchen nichtkardinalen Zusammenhängen ihnen Zahlen begegnen:

Zahlen begegnen ihnen als *Ordnungszahlen*: Der erste, der zweite, der dritte usw. Hier muss zum einen der Unterschied zwischen „drei" und „dem dritten" klar werden. Manch einer der Teilnehmer/-innen wusste oder weiß nicht, dass der dritte Finger (oft der Mittelfinger) gar nicht „die Drei" ist. Wer den Zeigefinger für „die Zwei" hält und den Ringfinger für „die Vier" für den ergibt „Zwei plus Vier" entweder keinen Sinn; oder er denkt, dass „Zwei plus Vier" gleich zwei ist, weil er schließlich zwei Finger hochhält. Wichtig ist auch zu wissen, dass die Ordnungszahl selbst nur eine Kardinalität von eins hat. Der Jenaer Rechtest (JRT 1) formuliert dazu folgende Frage:

„An einer Straße stehen zehn Bäume. Der zweite und der siebente Baum werden abgesägt. Wie viele Bäume bleiben noch stehen?"

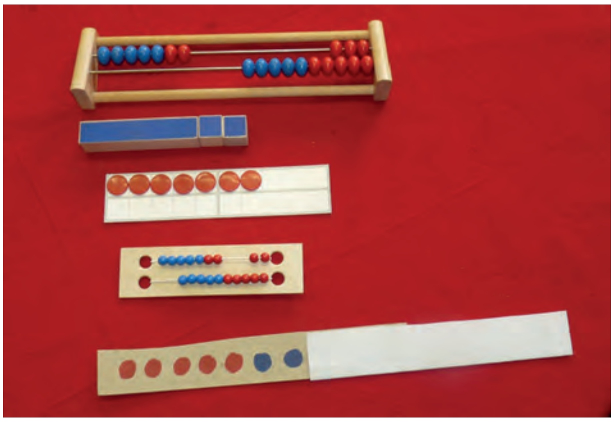
Es geht hier darum zu verstehen, dass der zweite Baum nur ein Baum und dass der siebente Baum nur ein Baum ist.

Zahlen begegnen den Teilnehmer/-innen als *Kodierungszahlen*: Der Bus mit der Nummer 68 hat weder 68 Plätze noch 68 Stationen, noch wurde die Linie im Jahr 1968 eingerichtet. Die Nummer 68 hat keinerlei Bedeutung – es gibt hier natürlich Ausnahmen. Man kann aber die Busnummer 68 nicht sinnhaft mit der Busnummer 72 verrechnen. Das Gleiche gilt für Telefonnummern: Keineswegs kann ich meine Telefonnummer mit der meiner Frau addieren und erhalte die Nummer unseres Kindes. In unserer Umwelt werden Zahlen häufig in solchen Kodierungsfunktionen verwendet, innerhalb derer keine sinnvolle rechnerische Verarbeitung möglich ist. Es ist für Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) keine triviale Frage, welche der sie umgebenden Zahlen sinnvoll mit Kardinalitäten, mit Ordnungen oder mit Maßeinheiten behaftet sind und welche im Sinne des Kodierungsaspektes keine solche sinnvolle Füllung haben.

3. Grundsätze der Ablösung vom zählenden Rechnen: Der relationale Zahlaspekt

In der Mathematikdidaktik gibt es eine langandauernde Diskussion darüber, was schlussendlich die Hauptschwierigkeit bei der Ablösung vom Zählen hin zu Rechenstrategien ist, was also das Scheitern „mathematischer Analphabeten" einst verursacht hat – und was dieses Scheitern überwinden kann.

Es gibt Ansätze, die darauf zielen, dass die Kinder die sogenannte simultane und quasisimultane Mengenerfassung beherrschen. Simultane Mengenerfassung meint dabei, dass man Mengen mit bis zu vier Elementen auf einen Blick erfassen und ihre Mächtigkeit benennen können muss. Der Schwerpunkt liegt bei „auf einen Blick"! Die Elemente der Menge sollen also nicht ausgezählt werden, sondern simultan, d.h. zeitgleich, erfasst werden. Das geht bei Mengen mit bis zu vier Elementen. Ab fünf Elementen ist eine zeitgleiche Erfassung nur möglich, wenn man eine Strukturierungshilfe hat, z.B. die Fünfereinteilung bei den nachfolgend abgebildeten Grundschulmaterialien. Von oben nach unten handelt es sich um den Rechenrahmen, die rotblauen Würfel und Fünferstangen und das Zwanzigerfeld. Die beiden unteren Materialien haben keinen speziellen Namen (das untere könnte man „Zehnerstreifen" nennen), folgen aber der Fünfereinteilung ebenfalls. Auch die Hände sind in diesem Sinne als „Material mit Fünferstruktur nutzbar". Man spricht von „quasisimultaner Mengenerfassung", weil die Mengenerfassung jenseits der vier nicht mehr „echt simultan", sondern nur noch „quasisimultan" ist.



Kinder sollen Mengen simultan und quasisimultan erfassen können, damit sie Mengen schnell überblicken können. Das ermöglicht ihnen, beim Lösen von Aufgaben mit dem Material schnell einen Zusammenhang zwischen der Aufgabe und dem Ergebnis herzustellen. Nur dann besteht die Möglichkeit, Aufgabe und Ergebnis gemeinsam im Langzeitgedächtnis abzuspeichern.

Die Frage ist nun, ob es ausreicht, Mengen (quasi)simultan erfassen zu können. Offenbar ist das nicht der Fall, denn es gibt Kinder, die dies zwar beherrschen, die aber trotzdem beim zählenden Rechnen verbleiben.

Deshalb entwickelte sich die Auffassung, dass die Schüler/-innen diese quasisimultanen Mengenwahrnehmungen zusätzlich mental repräsentieren können sollen, d. h., sie sollen sich die Mengen und die Mengenhandlungen auch noch *vorstellen* können. Die Annahme dabei ist, dass solche Vorstellungshandlungen dazu führen, dass die Kinder diese geistigen Handlungen Schritt für Schritt automatisieren und irgendwann dann ohne konkrete Mengenvorstellung vollziehen können. Hergestellt werden solche Ablösungsprozesse z. B. dadurch, dass die Handlungen an dem strukturierten Material zwar noch haptisch vollzogen werden, aber nicht mehr sichtbar sind, etwa indem man einen Sichtschirm davorstellt oder die Augen verbindet oder ein Tuch über das Material legt. Arbeitet man mit den Händen, so kann man sie auch einfach außerhalb des Blickfeldes halten. Wie der angenommene Übergang zu einem abstrakten Zahlhandeln konkret aussieht, wird in diesem Ansatz allerdings nicht beschrieben.

Es zeigt sich, dass auch dieser Ansatz nicht ausreicht. Es gibt Kinder, die sich Mengen vorstellen, sie (quasi)simultan repräsentieren, dann aber trotzdem Summanden oder Subtrahenden sowie das Ergebnis auszählen. Ein dritter Ansatz:

In diesem Ansatz wird angenommen, dass die Schüler/-innen vorrangig verstanden haben müssen, dass Zahlen miteinander in Beziehung stehen. Dazu gehört das Verständnis von „mehr als“ und „weniger als“ sowohl auf der Zahlen- als auch auf der Mengenebene. Fundament dafür ist das Verständnis, dass Zahlen sich aus anderen Zahlen zusammensetzen, die 5 z. B. aus 2 und 3 oder 4 und 1, aber auch aus 1 und 2 und 2. Zugespitzt kann man sagen: Die 5 setzt sich aus 5 Einsen zusammen, die 7 setzt sich aus 7 Einsen zusammen, und 5 ist 2 weniger als 7, weil 5 Einsen eben 2 Einsen weniger sind als 7 Einsen. Gleichzeitig ist damit 7 zwei mehr als 5. Man spricht dabei vom relationalen Zahlbegriff oder Beziehungszahlbegriff. Diesem Ansatz folgt z. B. Michael Gaidoschik (2007) in seinem Buch „Rechenschwäche verstehen“, in dem er viele wertvolle Unterrichtsvorschläge für die Ablösung vom zählenden Rechnen versammelt.

Es sei angemerkt, dass der Gedanke des relationalen Zahlbegriffs oder Beziehungszahlbegriffs die obigen beiden Ansätze in einem neuen Licht erscheinen lässt: Sowohl die quasisimultane Mengenerfassung als auch das gedankliche Vorstellen von Mengen erscheinen nun als *Hilfsmittel*, um den Lernenden auf die Relationen zwischen Zahlen zu fokussieren. Wer Mengen quasisimultan wahrnimmt, der nimmt sie eben wahr als aus Teilmengen zusammengesetzt. Wer sich Mengenrepräsentationen anhand von strukturiertem Material vorstellt, der stellt sich zum Beispiel die 8 als aus 5 und 3 zusammengesetzt vor. Damit ist aber auch eine Erklärung dafür nahegelegt, wann die beiden ersten Ansätze scheitern, nämlich dann, wenn man Mengen zwar quasisimultan wahrnimmt oder sich gar vorstellt, dabei aber die Zahlrelationen nicht in den Blick nimmt und nicht zum Rechnen nutzt – wenn man also trotz quasisimultaner Mengenwahrnehmung oder Mengenvorstellung weiter zählend rechnet. Umgekehrt ist damit nahegelegt, dass es Lernende gibt, die keine quasisimultane Mengenerfassung beherrschen und Mengen auch nicht gedanklich vorstellen und trotzdem zum nichtzählenden Rechnen gelangen: Diese Lernenden nutzen eben ihre Kenntnisse über Zahlrelationen zum Rechnen, um sich von ihren zählenden Strategien zu lösen.

Damit ist der weitere Weg zur Ablösung vom zählenden Rechnen vorgezeichnet. Es geht darum, Zahlrelationen zu verstehen. Wir zeichnen den Weg hier kleinschrittig auf, er führt über den Vergleich von Mengen in den Kategorien von gleich, mehr und weniger über die Idee des „eins mehr/eins weniger" und „zwei mehr/zwei weniger" zu „x mehr/x weniger". Letzteres wird über die Bezüge zu Fünf und Zehn sowie über Zahlzerlegungen erschlossen. Die Einbeziehung von Übungen der Quasisimultanerfassung und der mentalen Repräsentation von Mengen wird dabei nicht im Curriculum selbst vermerkt, sondern bleibt der Ausschärfung des Curriculums in Lehrmaterialien vorbehalten.

3.1 Mehr/weniger, um eins mehr/weniger, um zwei mehr/weniger

Konzipiert man die Ablösung vom zählenden Rechnen entlang des relationalen Zahlbegriffs, dann führt der Weg zunächst von der Beziehung „mehr/weniger/gleich viel" zur Beziehung „um x mehr/um x weniger/gleich viel", und zwar sowohl auf der Mengenebene als auch auf der Zahlenebene, die permanent miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen.

Zum Vergleich von zwei Mengen stehen uns zwei prinzipielle Wege offen:

1.) Beim Vergleich durch *Eins-zu-Eins-Zuordnung*[8] wird jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet. Wenn das klappt, dann „sind beide Mengen gleich mächtig" oder „repräsentieren die gleiche Anzahl" oder „es sind gleich viele". Bleiben Elemente übrig, denen kein Vergleichselement zugeordnet werden kann, dann „sind die beiden Mengen nicht gleich mächtig", sie „repräsentieren nicht die gleiche Anzahl" oder „es sind bei der einen Menge mehr" und „es sind bei der anderen Menge weniger".

2.) Beim Vergleich durch *Abzählen und Anzahlvergleich* zählt man die Elemente der beiden Mengen aus und vergleicht die festgestellten Anzahlen.

Die Teilnehmer/-innen werden den zweiten Weg beherrschen, es geht deshalb darum, sie mit dem ersten Weg bekannt zu machen. Zählende Rechner müssen im Sinne des kardinalen Zahlbegriffs daran gewöhnt werden, die Zahlen – die sie kennen, die sie aber im Rechnen nicht mit einer kardinalen Bedeutung verbinden – mit den zugehörigen Mengen zusammenzudenken. Zählende Rechner denken den Mengenvergleich ungefähr so: Die eine Menge hat sieben Elemente, die andere Menge hat neun Elemente. 9 kommt (in der Zahlwortreihe) hinter 7, deshalb ist die Neunermenge größer als die Siebenermenge. Dieses Denken soll ergänzt werden durch ein direktes Mengendenken, das nicht den Weg über die Zahlwortreihe geht – denn diese Fokussierung auf das Rechnen als Entlangwandern auf der Zahlwortreihe soll aufgelöst werden. *Deshalb* müssen die Teilnehmer/-innen in einem ersten Schritt den direkten Mengenvergleich über Eins-zu-Eins-Zuordnung kennen.

Im zweiten Schritt kommt nun eine neue Formulierung hinzu. Sie ermöglicht, das „mehr" oder „weniger" präzise zu erfassen. Es ist die Formulierung „eins mehr" und „eins weniger" bzw. „um eins mehr" und „um eins weniger". Diese Formulierung

8) Auch Stück-für-Stück-Zuordnung, 1-zu-1-Abbildung, 1-zu-1-Korrespondenz.

erscheint zunächst trivial, sie ist es aber nicht: Diese Formulierung kommt im Alltagsleben kaum vor, deshalb fällt es vielen Kindern schwer, sie überhaupt sprachlich zu verstehen. *Sie haben also keine Begrifflichkeit* für eine Situation wie die folgende:

□□□□□
○○○○○○

Man müsste ja etwas sagen wie „Hier ist ein Kreis mehr, als es Quadrate sind." oder „Hier ist ein Quadrat weniger, als es Kreise sind." – jeweils eine ausgesprochen komplexe Formulierung. Sobald man die Situation dynamisiert, reduziert sich die sprachliche Komplexität: „Wenn man einen Kreis wegnimmt, dann sind es gleich viele." oder „Wenn man ein Quadrat hinzufügt, dann sind es gleich viele."

Im Mathematikunterricht ist man aber immerfort mit solcherart statischen Situationen konfrontiert, für die die Kursteilnehmer/-innen keine Sprache hatten bzw. haben, wenn die sprachliche Beschreibung der Situation auf der Mengenebene im Unterricht nicht häufig genug explizit gefordert wurde und wird. Das führt(e) zu einem mangelhaften Verständnis dessen, wie die Mengen sich zueinander verhalten und wie diese Mengenverhältnisse sich auf der Zahlenebene spiegeln.

Für die obige Situation müssten folgende Zusammenhänge geklärt werden:

- „Hier ist ein Kreis mehr, als es Quadrate sind." Das ist gleichbedeutend mit: „Hier ist ein Quadrat weniger, als es Kreise sind."
- „Wenn man einen Kreis wegnimmt, dann sind es gleich viele." Das ist gleichbedeutend mit: „Wenn man ein Quadrat hinzufügt, dann sind es gleich viele."
- Es sind fünf Quadrate und sechs Kreise. Fünf sind einer weniger als sechs. Das ist gleichbedeutend mit: sechs ist einer weniger als fünf.
- Das ist gleichbedeutend mit: fünf und sechs unterscheiden sich um eins. Das ist gleichbedeutend[9] mit: Die Zahl 5 und die Zahl 6 unterscheiden sich um eins.
- Das ist gleichbedeutend mit: Die Zahl 5 steht in der Zahlwortreihe vor der Zahl 6, und die Zahl 6 steht in der Zahlwortreihe hinter der Zahl 5.
- Dafür gibt es auch die Formulierung: Die Zahl 5 ist der Vorgänger der Zahl 6, und die Zahl 6 ist der Nachfolger der Zahl 5.
- Dafür gibt es auch die Formulierung: Die Zahl 5 ist kleiner als die Zahl 6, und die Zahl 6 ist größer als die Zahl 5.
- Konkret: Die Zahl 5 ist um eins kleiner als die Zahl 6, und die Zahl 6 ist um eins größer als die Zahl 5.
- Anders betrachtet: Die 5 besteht aus 5 Einsen, die 6 besteht aus 6 Einsen (so wie die Fünfermenge 5 Elemente hat und die Sechsermenge 6 Elemente hat). Die 6 besteht also aus einer Eins mehr als die 5, deshalb ist sie um eins größer als 5. Die 5 besteht aus einer Eins weniger als die 6, deshalb ist sie um eins kleiner als 6.

9) Es ist deshalb gleichbedeutend, weil die Zahl 5 nur ein Label ist für die Anzahl bei (abstrakt gedachten) Fünfermengen und die Zahl 6 nur ein Label für die Anzahl bei (abstrakt gedachten) Sechsermengen.

- Die dynamische Deutung dessen ist: Wenn ich 5 um eins vermehre, dann erhalte ich 6, und wenn ich 6 um eins vermindere, dann erhalte ich 5.
- Die symbolische Darstellung dessen ist: 5 + 1 = 6 und 6 – 1 = 5
- Das muss man auf der Mengenebene und auf der Zahlenebene noch zusammenbringen mit 1 + 5 = 6 und 6 – 5 = 1 sowie mit der Zahlzerlegung von 6 in 5 und 1.

Vier klassische Missverständnisse seien angeführt:

- Die Formulierung, dass eine Zahl vor oder hinter einer anderen steht, ist keineswegs selbstverständlich eindeutig. Man kann auch denken, dass die 6 vor der 5 steht, wenn man sich die Zahlen sozusagen als Warteschlange vorstellt, die man von null oder eins kommend entlanggeht: 6 steht dann in dieser Schlange vor 5, 5 steht hinter 6.
- Die Begriffe Vorgänger und Nachfolger sind in dieser Sichtweise ebenfalls nicht eindeutig bzw. nicht stimmig: Die 6 geht ja der 5 voran, die 5 folgt der 6.

Manche Kursteilnehmer/-innen haben sich als Kinder nicht erklären können, warum die 5 „kleiner“ sein soll als die 6 oder die 6 „größer“ sein soll als die 5. Wenn man die Zahlen ins Heft schreibt, dann schreibt man sie doch beide gleich groß! Auch im Buch sind sie immer gleich groß gedruckt. Diese 5 ist zum Beispiel viel größer als diese 6. Der Begriff „Größe“ ist in dieser Sichtweise an die Ausdehnung des Zahlsymbols gebunden, ein Verständnis für die kardinale Bedeutung des Begriffs „Größe einer Zahl“ muss dann erst hergestellt werden.

Es ist keineswegs selbstverständlich, dass die Teilnehmer/-innen mit den Begriffen rechts (kleinere Zahl) und links (größere Zahl) im gleichen Sinne operieren wie die Kursleiterin. Manche Menschen denken die Zahlwortreihe nicht von links nach rechts, sondern von rechts nach links oder von unten nach oben oder von oben nach unten, oder sie denken Zahlen nicht linear. Es gibt sogar Menschen, die denken Zahlen in Form von Kartons, und Rechnen bedeutet für sie, diese Kartons in bestimmter Weise umzupacken. Auch der Zahlenstrahl ist demzufolge keineswegs ein selbsterklärendes Modell für die Zahlen – zumal bereits in seiner objektiven Struktur nicht eindeutig ist, was eine Zahl überhaupt sein soll: Ist die Zahl 2 ein Punkt auf dem Zahlenstrahl, ist sie eine Strecke, ist sie eine gerichtete Strecke? Keine dieser Deutungen ist zwingend, und jede hat ihre Vor- und Nachteile.

Der Gedanke des „um eins mehr“ und „um eins weniger“ wird weitergeführt zum Verständnis des Aufbaus der natürlichen Zahlen in der sogenannten Seriationslogik. Damit ist gemeint, dass der Nachfolger einer Zahl immer eins mehr ist als die Zahl selbst. Die Teilnehmer/-innen müssen in der Lage sein, ihr Wissen um die Seriationslogik zu nutzen, um Aufgaben wie 9 – 8 oder 21 – 19 oder später 401 – 399 nicht rechnen zu müssen. Im Sinne einer nichtzählenden Beherrschung des Kleinen 1 + 1 und des Kleinen 1 – 1 muss den Teilnehmer/-innen klar werden, dass sie mit dem Wissen um die Beziehung „eins mehr/eins weniger“ bereits 22 Plusaufgaben (0 + 1 bis 10 + 1 und 1 + 0 bis 1 + 10) und 11 Minusaufgaben (1 – 1 bis 11 – 1) nichtzählend rechnen können.

Der Übergang zu „zwei mehr/zwei weniger“ und zu „x mehr/x weniger“ ist nun wiederum nicht mit einer solchen Routinisierung der damit verbundenen Aufgaben verbunden – diese findet erst mit der Untersuchung der Bezüge der Zahlen zu 5 und zu 10 sowie mit der Routinisierung der Zahlzerlegungen statt. Die Beziehungen „zwei mehr/zwei weniger“ und „x mehr/x weniger“ sind eher im Sinne der Weiterführung der Logik des „eins mehr/eins weniger“ zu behandeln. Die oben für „eins mehr“ und „eins weniger“ aufgezeigten vielfältigen Deutungen des „x mehr“ und „x weniger“ sind es, die den Teilnehmer/-innen den Zusammenhang zwischen statischen Mengenbetrachtungen (x mehr/x weniger), Mengenhandlungen (x dazu/x weg), Zahlverhältnissen (x mehr/x weniger) und Zahloperationen (plus 5/minus 5) erschließen müssen.

3.2 Bezüge zur 5 und zur 10

Die Zahlrelationen, die neben der „eins mehr/eins weniger“-Relation am einfachsten zu verstehen und zu routinisieren sind, sind die Relationen der Zahlen zur 5 und zur 10. Das liegt sicherlich an der Fünfer- und Zehnerstruktur unserer Finger, die eine gewisse Vertrautheit mit sich bringt und eine physisch leichte Aufrufbarkeit der Fünfer- und Zehnerbeziehungen zur Folge hat.

Diese Zusammenhänge zur Fünf und zur Zehn müssen erarbeitet werden. Die Beziehungen zur 10 werden dabei zunächst nur „für die zweite Hand“ betrachtet, also Beziehungen von Zahlen ab 5 zur 10. Dabei ist es sinnvoll, die Erarbeitungen an quasisimultane Mengenerfassungen anzubinden. Unabdingbar ist es, die Mengenerfahrungen mit Zahlerfahrungen zu verbinden und an symbolische Darstellungen in Form von Rechenaufgaben anzubinden. Mit dem Auswendigkönnen der Beziehungen zur 5 und zur 10 in Form von Rechenaufgaben stehen den Teilnehmer/-innen bereits wieder 12 Aufgaben des kleinen Einspluseins und 12 Aufgaben des kleinen Einsminuseins zur Verfügung, wenn man die Aufgaben mit null einbezieht.[10] Der Kern bei der Erarbeitung dieser Beziehungen liegt aber in der weiteren Heranführung der Teilnehmer/-innen an die Idee, Zahlen als aus anderen Zahlen zusammengesetzt zu denken.

Das beginnt dort, wo Lernende nicht verlässlich wissen (oder erst spät in ihrer Lernbiografie darauf vertraut haben), dass sie *immer* fünf Finger an einer Hand und immer zehn Finger an beiden Händen haben. Diese Invarianz müssen sie für das Weitere verinnerlichen.

In den Abschnitten „Zählen und Abzählen“ sowie „Wie viel? Der kardinale Zahlaspekt“ wird erläutert, dass zu einem tragfähigen Verständnis der Zahl (etwa „acht“) gehört, dass ich beim Abzählen von acht Elementen zwar zum Schluss lediglich das achte Element berühre, dass ich mit „acht“ aber die Anzahl *aller* Elemente meine. Nun kommt mit der relationalen Betrachtung eine weitere Idee hinzu: Die acht sind zwei weniger als zehn. Aber auch: Acht sind drei mehr als fünf oder „fünf und drei“. Für zählende Rechner bedeutet diese Sichtweise durchaus einen Bruch: Fünf und drei ergibt für sie deshalb acht, weil sie bei Acht landen, wenn sie von Fünf drei Schritte weiterzählen. Acht minus Drei ist für sie Fünf, weil sie bei Fünf landen, wenn sie von Acht drei Schritte rückwärts zählen. Für zählende Rechner muss also auf der

10) *Die Aufgaben 4 + 6, 3 + 7, 2 + 8, 1 + 9 und 0 + 10 sowie 10 – 10, 10 – 9, 10 – 8, 10 – 7, 10 – 6 sind dabei noch nicht berücksichtigt.*

Mengenebene erarbeitet werden, wie die Relationen der einzelnen Zahlen (bis 9) zur 5 und zur 10 sind. Dies muss mit der Zahlenebene verbunden werden.

An den Fingern[11] lassen sich die Zusammenhänge gut erarbeiten:

- Fünf und Eins sind Sechs. Umgekehrt: Nehme ich von sechs einen weg (und zwar jenen Finger, der separat ist), dann verbleiben fünf. Nehme ich von sechs fünf weg (und zwar die ganze Hand!), dann verbleibt einer.
- Fünf und Zwei sind Sieben. Umgekehrt: Nehme ich von sieben zwei weg (und zwar jene Finger, die separat sind), dann verbleiben fünf. Nehme ich von sieben fünf weg (und zwar die ganze Hand!), dann verbleiben zwei.
- Fünf und Drei sind Acht. Umgekehrt: Nehme ich von acht drei weg (und zwar jene Finger, die separat sind), dann verbleiben fünf. Nehme ich von acht fünf weg (und zwar die ganze Hand!), dann verbleiben drei.
- Fünf und Vier sind Neun. Umgekehrt: Nehme ich von neun vier weg (und zwar jene Finger, die separat sind), dann verbleiben fünf. Nehme ich von neun fünf weg (und zwar die ganze Hand!), dann verbleiben vier.

Ebenso:

- Wie viele Finger muss ich von fünf Fingern wegnehmen, um vier Finger zu haben?
- Wie viele Finger muss ich von fünf Fingern wegnehmen, um drei Finger zu haben?
- Wie viele Finger muss ich von fünf Fingern wegnehmen, um zwei Finger zu haben?
- Wie viele Finger muss ich von fünf Fingern wegnehmen, um einen Finger zu haben?

Ebenso:

- Ich habe vier Finger. Wie viel Finger muss ich noch ausklappen, um fünf Finger zu haben?
- Ich habe drei Finger. Wie viel Finger muss ich noch ausklappen, um fünf Finger zu haben?
- Ich habe zwei Finger. Wie viel Finger muss ich noch ausklappen, um fünf Finger zu haben?
- Ich habe einen Finger. Wie viel Finger muss ich noch ausklappen, um fünf Finger zu haben?

11) Hier wird auf die in Deutschland üblichen Fingersymbole Bezug genommen, bei denen z. B. die 6 symbolisiert wird durch eine Hand und den Daumen der anderen Hand. Nutzen die Teilnehmer/-innen andere Symbolisierungen, müssen die Betrachtungen daran angepasst werden.

4. Zahlzerlegungen und Rechenstrategien: Wege und Routinisierungen zum kleinen Einspluseins und zum kleinen Einsminuseins

Das Curriculum „Rechnen Basis 1“ richtet sich an Lerner/-innen, die im Wesentlichen noch zählende Rechenstrategien verfolgen. Bereits im Abschnitt „Rechenwege: Verschiedene nichtzählende Strategien“ wurde eine Zielvorstellung für diesen Kurs entfaltet, nämlich die Beherrschung und Verwendung von nichtzählenden Strategien im Zahlraum bis 30.

Mit den bis hier erarbeiteten Inhalten kann man nun einen neuen Blick auf die dort angegebenen Rechenstrategien werfen. Folgende Strategien wurden bereits thematisiert:

- Aufgaben mit Addition bzw. Subtraktion von 1
- Bezug zu 5/10
- z. T. Umkehraufgaben
- Nutzen der Seriationslogik
- eventuell wurde im Kurs dabei auch bereits über „Ergänzen statt Abziehen“ gesprochen

Zusammen mit den Aufgaben des Typus x + 0 und 0 + x ist damit das kleine Einspluseins und das kleine Einsminuseins für die Zahlen bis 10 nahezu vollständig erarbeitet. Die Erarbeitung und Routinisierung der Zahlzerlegungen bis 10 wird damit relativ leicht zugänglich. Dabei hilft es, dass die bisherigen Erarbeitungen immer wieder auf die Verbindung von Mengenhandlung und Zahlhandlung und ihre Symbolisierung, das Verständnis der Operationshandlungen, das Verständnis des relationalen Charakters der Zahlen (Zahlen sind aus anderen Zahlen zusammengesetzt, Zahlen sind aus unterschiedlich vielen Einsen/Einern zusammengesetzt) rekurriert haben.

Die Behandlung der Zahlzerlegungen geht nun mit dem Prinzip einher, dass hier routinisiert wird, aus welchen Zahlen eine Zahl sich zusammensetzt. Die Teilnehmer/-innen erleben das Teilschrittverfahren nur dann als Rechenerleichterung, wenn sie

- verstehen, dass die Zahl 11 sich aus 10 und 1 zusammensetzt, die Zahl 12 aus 10 und 2, die Zahl 13 aus 10 und 3 usw.,
- verstehen, welch große Erleichterung diese Struktur ihnen beim Rechnen bringt,
- verstehen, dass es wegen dieser Strukturerleichterung Sinn ergibt, beim Rechnen zunächst einmal „die 10 vollzumachen“ oder „zur 10 zu ergänzen“ oder „bis 10 zu gehen“ und dann den noch fehlenden Rest zu bestimmen,
- die dazu notwendigen Zahlzerlegungen sicher abrufen können.

Mit den Zahlzerlegungen der Zahlen bis 10 wird also einerseits das kleine Einspluseins und das kleine Einsminuseins bis 10 vollständig erschlossen, vor allem aber werden damit die notwendig routinisierten Voraussetzungen für das Teilschrittverfahren erarbeitet.

4.1 Zehner und Einer

Die Teilnehmer/-innen müssen mit den Zahlen jenseits der 9 nicht mehr bekannt gemacht werden. Sie müssen aber einen neuen Blick auf diese Zahlen einnehmen. Dieser neue Blick ist geprägt von einem Verständnis der Zusammenhänge rund um die Konstruktion der Einheit „Zehner" bzw. der Zahl 10. Im Kurs „Erwachsene lernen rechnen" bzw. „Rechnen Basis 1" wird dabei noch kein umfassendes Verständnis der Konstruktion des Stellenwertsystems angestrebt, dies ist Inhalt des darauf aufbauenden Kurses „Rechnen Basis 2". Deshalb ist auch die Festlegung des Zahlraums 30 für den hier beschriebenen Kurs eher heuristisch zu verstehen: Es sollen bestimmte Zusammenhänge „erarbeitet" werden.

Jenseits der Zahl 9 vollzieht sich im dezimalen Stellenwertsystem ein fundamentaler Bruch. Sie können ihn mit den Teilnehmer/-innen z. B. thematisieren, indem Sie sie 13 Würfel auszählen lassen und dann fragen, welche Anzahl hier liegt. Lassen Sie die zugehörige Zahl anschreiben. Zeigen Sie dann auf die beiden Ziffern 1 und 3 und fragen Sie, was diese Ziffern mit der Anzahl der Würfel zu tun haben, die dort liegt. Es sind schließlich nicht vier (3 + 1) Würfel.

Zu verstehen ist hier zum einen, dass die Zahl 13 sich aus zwei Zahlen zusammensetzt, nämlich aus der 10 und der 3. Wenn die Teilnehmer/-innen zu diesem Zeitpunkt mit dem relationalen Zahlbegriff vertraut sind – also Zahlen als aus anderen Zahlen zusammengesetzt denken können –, dann wird ihnen einsichtig sein, dass die Zahlen 11 bis 19 einfach spezielle dieser Zusammensetzungen sind, nämlich jene, bei denen ein Bezug zur 10 vorhanden ist. Dieser Gedanke reproduziert sich später bei den anderen zweistelligen Zahlen.

Zu verstehen ist hier aber ebenso der Bruch, der mit der *Symbolisierung* der Zahl 10 erfolgt. Bis zur 9 erhält jede (An-)Zahl ein eigenes Zahlsymbol. Mit der Hinzunahme eines weiteren Mengenelements erfolgt nun eine Änderung der Notation und der Sichtweise: Man schafft eine neue Denkeinheit, den „Zehner". Die zehn Mengenelemente werden *nicht* mit einem neuen Zahlsymbol bedacht. Stattdessen werden sie zu dieser neuen Denkeinheit „Zehner" „gebündelt", also zu etwas qualitativ Neuem zusammengedacht. Man spricht hier vom Bündelungsprinzip unseres Stellenwertsystems.

Die Teilnehmer/-innen werden diesen Bruch als Schüler wahrscheinlich nicht bemerkt haben. Für zählende Rechner gibt es innerhalb der Zahlwortreihe keine qualitativen Brüche, sondern nach der 8 kommt eben die 9 und dann kommt eben die 10 und dann eben die 11. Der Übergang zu zweistelligen Notationen wird eher als neues Symbol wahrgenommen, nicht als neues Konstruktionsprinzip der Anzahlnotation.

Der Zehner oder „die Zehn“ ist nun aber nicht nur als neue Einheit zu verstehen. Ebenso muss in einem dynamischen Sinne verstanden werden, dass die Zehn sich aus zehn Einern oder Einsen zusammensetzt (und jederzeit zusammensetzen lässt) und dass sie in zehn Einer oder Einsen entbündelt werden kann. Es geht dabei u. a. darum, dass die Teilnehmer/-innen verstehen, wie sich die von ihnen beim Teilschrittverfahren vollzogenen Rechenschritte begründen und auf der Zahlebene widerspiegeln. Man kann das so formulieren:

Ich möchte die Aufgabe 8 + 5 rechnen. Ich merke, dass das Ergebnis größer als 10 ist. Ich möchte nun beim Rechnen die enorme Erleichterung nutzen, die die Konstruktion unseres Stellenwertsystems ermöglicht: Die Zahlen zwischen 10 und 20 sind alle in der Form 10 + x aufgebaut. Wenn ich dieses x bestimmen kann, dann sehe ich leicht das Resultat meiner Aufgabe. Ich muss also überlegen, welche Zahl zu 8 addiert 10 ergibt.

Die Teilnehmer/-innen sollen das nun nicht nur als quasiräumlichen Schritt verstehen im Sinne von „gehe erst mal bis zur 10“ oder „überlege, wie viele Schritte es bis zur 10 sind“. Diese „Laufanweisungen“ lassen nämlich nicht erkennen, *warum* man die 10 als Bezugspunkt für das Teilschrittverfahren verwendet. Das versteht man erst, wenn man das Bündelungsprinzip und den stellenweisen Aufbau unserer Zahlen einbezieht. Man wählt deshalb die 10 als Bezugspunkt, weil man auf diese Weise einen vollen Zehner oder eine volle Zehn herstellt und dann mit der einfachen Konstruktionsanweisung 10 + x sehr leicht die gesuchte Zahl (hier 13) aufbauen kann. Wenn ich also 8 mit 2 zur 10 ergänzt habe und somit zehn Einer zu einem Zehner gebündelt habe, dann muss ich nur noch wissen, dass von den 5 (zu addierenden Mengenelementen) noch 3 übrig sind, dass ich also im Ganzen einen Zehner und 3 Einer habe. Diese Zahl lässt sich deshalb leicht als 13 hinschreiben, weil ich eben gerade dieses Konstruktionsprinzip von 13 als 10 + 3 genutzt habe.

Wenn ich die Aufgabe 13 – 5 rechnen möchte, dann ist wiederum eine Entbündelung notwendig. Denke ich 13 als einen Zehner und 3 Einer, dann kann ich nicht direkt von den 3 Einern 5 Einer abziehen. Ich muss den Zehner zunächst zu 10 Einern entbündeln, erst dann kann ich „weiter abziehen“. Diese Sichtweise des Entbündelns des Zehners erscheint zunächst ungewohnt, weil auch gute Rechner dieses Entbündeln nicht mitdenken, erst recht nicht bei so kleinen Zahlen. Man muss sich aber vor Augen halten, dass die Teilnehmer/-innen in ihrer Lernbiografie an jenen Wegen zum Rechnen gescheitert sind, die auf dieses umfassende Verständnis verzichtet haben.

Der in den Schulen übliche Weg, diesen Entbündelungsgedanken zu umgehen und lediglich auf schrittweises Rückwärtsgehen o. Ä. zu rekurrieren, ist den Kursteilnehmer/-innen nicht zugänglich gewesen. Sie sind auf eine neue Sichtweise angewiesen. Gestützt wird das Bündelungs- und Entbündelungsdenken, wenn man auf der Mengenebene mit Material arbeitet, welches die Zehner als Einheiten repräsentiert, z. B. Mehrsystemblöcke oder das goldene Montessori-Perlenmaterial.

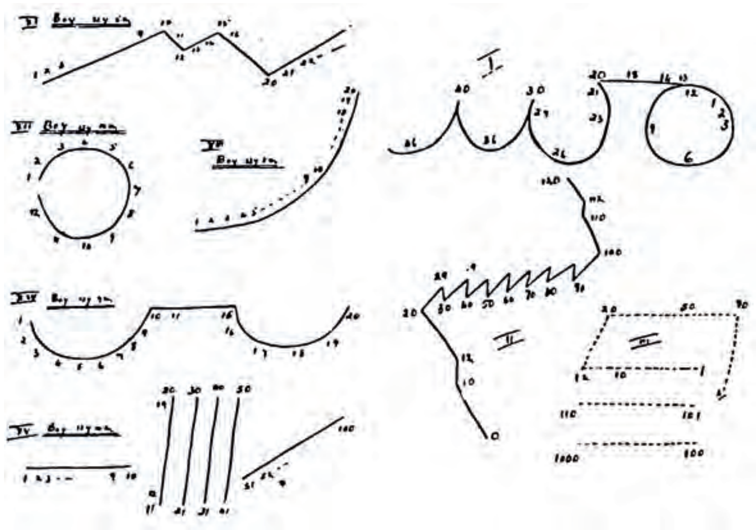
4.2 Zahlraumorientierung im Zahlraum bis 30

Im Kurs „Rechnen Basis 1“ geht es darum, einen Zahlbegriff aufzubauen, Operationsverständnis der Addition und Subtraktion aufzubauen, die Aufgaben des Einspluseins und des Einsminuseins bis 20 nichtzählend lösen und möglichst automatisch abrufen zu können und eine Zahlraumorientierung im Zahlraum bis 30 zu schaffen. Zahlraumorientierung ist dabei eine Art *Querschnittsthema* des Kurses. Unter diesem Begriff wird hier Folgendes gefasst:

Zum einen geht es um Orientierung im engeren geometrischen Sinne. Wenn man sich die Zahlwortreihe oder einen Zahlenstrahl vorstellt, dann soll man ein Gespür dafür haben, dass die 7 näher an der 9 steht als an der 3. Man soll ein Gespür dafür haben, wie weit die 100 weg ist, wenn man sich gedanklich gerade etwa bei 15 bewegt. Wenn hier in einem heuristischen Sinne von Zahlraumorientierung im Zahlraum bis 30 die Rede ist, dann sollen damit nicht jene größeren Zahlräume gemieden werden, in denen sich die Teilnehmer/-innen fragmentarisch ohnehin bewegen. Es ist damit nur jener Zahlraum angegeben, in dem die Orientierung sicher sein soll. Das Rechnen jenseits der 20 ist damit nur im Sinne des ersten Erarbeitens von Analogien gemeint. Man muss sich vor Augen halten, dass die Zahlzusammenhänge für Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) zunächst im für sie überschaubaren Zahlraum bis 10 tiefgründig erschlossen werden müssen, der Bereich jenseits der 10 benötigt dieses Zusammenhangswissen. Im Sinne geometrischer Orientierung kann er aber bereits vorher diskutiert werden.

In diesem engeren geometrischen Sinn soll bei den Teilnehmer/-innen eine lineare Vorstellung von den Zahlen aufgebaut werden – allerdings nur in dem Sinne, dass sie darauf zurückgreifen können, wenn es ihnen bei der Bearbeitung von mathematischen Problemen weiterhilft. Man kann keineswegs erwarten, dass jede Einzelne *für sich* einen linear gedachten Zahlraum aufbaut. Es gibt zwar in Teilen der Psychologie die These, dass ein „innerer Zahlenstrahl“ eine anthropologische Konstante ist; in der Mathematikdidaktik hingegen gilt dies keineswegs als belegt, sondern höchstens als Lernziel. Empirische Untersuchungen zu den Zahlraumvorstellungen von Menschen zeigen sehr unterschiedliche innere Bilder von Zahlen. Innere Zahlenstrahlen sind dabei nicht selten, sie sind oftmals sogar von links nach rechts gerichtet, aber eben auch von unten nach oben, von rechts nach links oder von oben nach unten. Manche Menschen ordnen einen Zahlenstrahl spiralig an. Die Zahlen sind manchmal in immer gleichen Abständen angeordnet, manchmal eher logarithmisch, so dass die ersten zehn Zahlen etwa so viel Platz einnehmen wie die nächsten 90 Zahlen und wie dann die nächsten 900 Zahlen (vergleiche die Zahlraumvorstellungen aus empirischen Untersuchungen in nachfolgender Abbildung)[12]. Oftmals sind die Abstände zwischen den Zahlen auch dynamisch je nach Anforderung – das entspricht auch dem Wunsch von Mathematikdidaktikern und spiegelt sich im Hilfsmittel des „leeren Zahlenstrahls“ wider.

12) *Abbildung aus einer Vortragspräsentation von Jens Holger Lorenz: Diagnose von Rechenschwierigkeiten in den Eingangsklassen und individuelle Förderung (Teil I), Hamburg, 01.11.09.*



Selten trifft man Menschen, die Zahlen räumlich so angeordnet denken, wie man es vom Hunderterfeld kennt, vereinzelt trifft man auf seltsam anmutende Konstrukte. Ein Beispiel ist die oben bereits erwähnte Konstruktion der Zahlen als Kisten, die dann beim Rechnen nach bestimmten Regeln umgestapelt werden.

Menschen mit einem elaborierten mathematischen Verständnis haben oftmals keinerlei Zahlraumvorstellung. Sie denken die Zahlen nicht räumlich, sondern lediglich abstrakt. Umgekehrt findet man bei EbSR ebenfalls oft keine Zahlraumvorstellung. Wir wissen nicht, ob die elaborierten Vorstellungen als Voraussetzung in früheren Entwicklungsphasen eine Zahlraumvorstellung benötigen. Es erscheint aber für EbSR sinnvoll, eine lineare Zahlraumvorstellung zu erarbeiten, um eine Orientierungshilfe zu haben. Wenn die Zahlraumvorstellungen der Kursteilnehmer/-innen expliziert werden, dann können alle mathematischen Aktivitäten mit diesen Vorstellungen in Beziehung gesetzt werden, und damit sind für diejenigen, die keine Zahlraumvorstellung haben, verschiedene Angebote für Zahlraumvorstellungen permanent präsent. Gestützt wird dies durch alle Aktivitäten bzw. Spiele, bei denen auf Zahlwortreihen oder Zahlenstrahlen Bewegungen ausgeführt werden müssen. Herausgehoben ist hierbei sicherlich die Rolle des „leeren Zahlenstrahls“. Auch das Zählen vorwärts und rückwärts, auch in Zweier- oder Dreierschritten, stärkt die Zahlraumorientierung.

Besonders wichtig ist es, dass diese linearen Aktivitäten zu den beteiligten Kardinalitäten in Beziehung gesetzt werden. Der Kurs fokussiert ja darauf, dass Zahlen mit Anzahlen zusammengedacht werden und dass Zahlen in ihren Beziehungen zu anderen Zahlen gedacht werden. Beide Gedanken sind in linearen Zahlraumvorstellungen zunächst nicht präsent, lineare Zahlraumvorstellungen arbeiten mit einem nichtkardinalen Blick auf Zahlen. Genau das ist ja ein zentrales Problem von zählenden Rechnern, wenn sie nur rechnen können, indem sie die Zahlwortreihe entlanglaufen. Die Anbindung der räumlichen Vorstellung an die kardinale Bedeutung muss deshalb dauerhaft expliziert werden.

Umgekehrt sollte aber das kardinale und relationale Wissen auch an Zahlraumvorstellungen angebunden werden. Zum einen besteht sonst die Gefahr, dass die Teilnehmer/-innen „mathematische Doppelwelten“ entwickeln. Sie verstehen dann etwas auf der Mengenebene, aber ihre räumlichen Zahlvorstellungen passen nicht dazu. So erschließt es sich nicht von allein, was das Bündeln bei der Addition mit Zehnerübergang mit dem „Sprung über die Zehn“ zu tun hat. Ebenso erschließt sich nicht von allein, was das Entbündeln bei der Subtraktion mit dem „Sprung über die Zehn“ zu tun hat.

Zum anderen erscheint das Rechnen mit Analogien auf die Dauer einfacher, wenn man sie auch mit Zahlraumvorstellungen verbindet. Es ist das eine, Folgendes zu überlegen: „Was ist 23 + 5? Die 2 Zehner der Zahl 23 bleiben erhalten, weil 3 + 5 keinen neuen Zehner, sondern nur 8 ergibt. Die 2 Zehner und die 8 Einer ergibt 28.“ Es ist aber etwas anderes, diese Analogie räumlich zu denken: „Wenn ich von der 23 fünf weitergehe, dann lande ich bei 28, das ist wie bei 3 + 5“ Sobald dann sogar ein neuer Zehner zu bündeln ist, ist es für manchen Lernenden deutlich weniger aufwändig, die Aufgabe als „Schritt bis zum nächsten Zehner“ mit notwendiger Restebestimmung zu denken. Er muss eben nur in der Lage sein, dieses Handeln mit dem Mengenhandeln inklusive Bündeln zusammenzudenken.

Dem Thema Zahlraumorientierung kann man auch die Fähigkeit der Einschätzung von Größenverhältnissen zuordnen. Damit ist nicht nur Relationalität gemeint, also etwa das Gespür dafür, dass die Differenz von 9 und 2 größer sein muss als die von 29 und 18. Dazu gehört ebenso das Gespür dafür, dass die Differenz von 17 und 9 im Vergleich zur Differenz von 1017 und 1009 zwar die gleiche sein mag, dass man aber zwischen zwei Menschen mit einem Tageseinkommen von 17 versus 9 Euro einen deutlichen Unterschied sehen würde, bei zwei Menschen mit einem Tageseinkommen von 1017 versus 1009 Euro aber kaum von einem Unterschied spräche. Hierzu gehört aber ebenso ein Gespür für verschiedene Größendimensionen bei Maßen.

Literaturverzeichnis

LORENZ, Jens Holger UND RADATZ, Hendrik (1993):
Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover.

GAIDOSCHIK, MICHAEL (2007):
Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Persen Verlag.

GERSTER, HANS DIETER (1996):
Vom Fingerrechnen zum Kopfrechnen – Methodische Schritte aus der Sackgasse des zählenden Rechnens. In: Eberle, G./Kornmann, R. (Hrsg.): Lernschwierigkeiten und Vermittlungsprobleme im Mathematikunterricht an Grund- und Sonderschulen. Weinheim: Deutscher Studienverlag. S.137–162.

GERSTER, HANS-DIETER; SCHULTZ, RITA (2000):
Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Pädagogische Hochschule Freiburg. (420 Seiten)
Download: www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397/

PROF. DR. MEYERHÖFER, WOLFRAM (2011):
Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). In: Pädagogische Rundschau, 65. Jg. 2011, Heft 4, S. 401–426.

SCHLÖGLMANN, WOLFGANG (2002):
Brauchen Erwachsene Mathematik? Forschungsschwerpunkte und Ergebnisse im Bereich Mathematiklernen bei Erwachsenen. Alfa-Forum. Zeitschrift für Alphabetisierung und Grundbildung, 49. S. 22–24.

WEIDENMANN, B. (1991):
Lernen mit Bildmedien. Weinheim.

Stufe 2:

Christian Hartmann
unter Mitarbeit von
Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer

Zweistellige Zahlen verstehen

1. Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen erwerben ein grundlegendes Verständnis der Idee der Bündelung und des Stellenwerts im Bereich der zweistelligen Zahlen.
- Die Teilnehmer/-innen verstehen den Zusammenhang zwischen Mengen, der symbolischen Zahldarstellung und der verbalen Zahlbezeichnung im Zahlraum bis 100.
- Die Teilnehmer/-innen können sich im Zahlraum bis 100 orientieren.

2. Grundlagen für das Verständnis zweistelliger Zahlen

2.1 Worum geht es?

Weltweit hat sich die Zahlnotation im Stellenwertsystem zur Basis zehn durchgesetzt. Mit der Zahlnotation im dezimalen Stellenwertsystem korrespondiert auf der Mengenebene eine sogenannten Bündelung der Elemente der Menge: Immer zehn Elemente werden (gedanklich) zu einer neuen Einheit, dem „Zehner“, zusammengefasst bzw. „gebündelt“. Sind von dieser ersten Bündelungseinheit zehn vorhanden, so werden diese wiederum zu einer neuen Einheit, einem „Zehner-Zehner“, dem „Hunderter“, gebündelt. Diese Bündelung wird so lange fortgesetzt, bis auf jeder Bündelungsstufe höchstens neun Bündel vorhanden sind und daher keine weiteren Zehner-Bündel mehr gebildet werden können. Die Menge wird dann als *maximal gebündelt* bezeichnet.

Um die Mächtigkeit der Menge festzuhalten, wird die Anzahl der Bündel der verschiedenen Bündelungsstufen geordnet notiert. Die ungebündelten Einheiten, die „Einer“, werden ganz rechts notiert. Links daneben folgen die Zehner, dann die Hunderter usw. Der Aufbau von rechts nach links ist dabei eine reine Konvention. Man könnte die Zahlen auch von links nach rechts aufbauen. Diese Mitteilung hilft jenen Teilnehmern/Teilnehmerinnen, die sich als Kinder immer gefragt haben, warum sie die Zahlen gerade so herum notieren sollen. Man muss eine Notationsrichtung festlegen, und die Erfinder dieser Notation haben sich eben dafür entschieden, die Einer nach rechts und die größeren Einheiten nach links zu schreiben.

Die Ziffern einer Zahl tragen somit eine doppelte Bedeutung:

- Der *Stellenwert* einer Ziffer gibt an, für welche Bündelungsstufe die Ziffer steht.
- Der *Zahlwert* einer Ziffer gibt an, wie viele Bündel der jeweiligen Stufe vorhanden sind.

Die Position der „4“ im Zahlsymbol „42“ zeigt also zum Beispiel an, dass es sich um *Zehner* handelt. Der Zahlwert der „4“ liefert die Information, dass es *vier* Zehner sind.

Durch die Prinzipien der maximalen Bündelung und des Stellenwerts ist die Zahldarstellung eindeutig festgelegt. Die Mächtigkeit jeder Menge wird durch genau eine Zahl symbolisiert. Zum einen ermöglicht es die Zahldarstellung im Stellenwertsystem auf diese Weise, beliebig große Zahlen auf einfache Weise zu notieren. Zum anderen lassen sich durch dieses Konstruktionsprinzip der Zahlen die grundlegenden Rechenoperationen mit beliebig großen Zahlen auf die Operationen im Zahlraum bis zehn zurückführen.

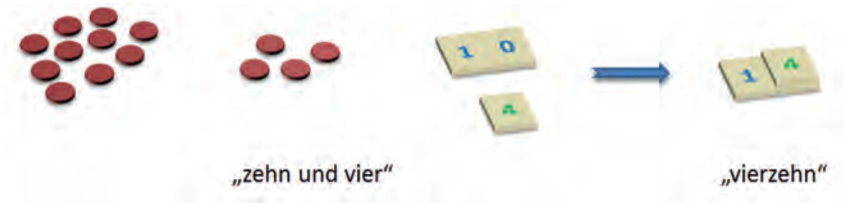
2.2 Die Idee der Bündelung und des Stellenwerts

Die Teilnehmer/-innen wollen in diesem Kurs rechnen lernen. Dazu müssen sie in einer anderen Weise mit Zahlen umgehen, als sie es gewohnt sind – denn dieser gewohnte Weg hat offenbar nicht zu einem Erfolg geführt. Der Grundgedanke der Betrachtungen zum Stellenwertsystem ist, dass Zahlen dazu da sind, Anzahlen zu beschreiben. Dies kann für die Zahl 3 auch z. B. in den Formen drei, |||, ⚂ erfolgen. Für die Zahl 13 wird die Darstellung ||||||||||||| schon recht unübersichtlich, die Zahl 354 wird auch mit irgendeiner Würfeldarstellung nicht mehr leicht lesbar sein. Das Stellenwertsystem stellt eine spezifische Art und Weise her, große Mengen ausgesprochen übersichtlich darzustellen und damit sehr effektiv rechnen zu können – diese Effektivität ist der Grund dafür, dass wir mit dem Stellenwertsystem arbeiten.

Um dies deutlich zu machen, können Sie mit den Teilnehmern/Teilnehmerinnen Alternativen diskutieren, die Anzahl der Elemente großer Mengen, z. B. von 88 oder 462 Mengenelementen, schriftlich zu notieren. Historisch wurde in unseren Breiten noch vor 500 Jahren mit dem Abakus und mit römischen Zahlzeichen sehr aufwändig gerechnet, während die arabischen Zahlen mitsamt den damit möglichen effektiven schriftlichen Rechenverfahren sich erst langsam und gegen den Widerstand der Kirche – die diesen muslimischen Import ablehnte – durchgesetzt haben. Es hat für die Teilnehmer/-innen auch eine entlastende Funktion zu verstehen, dass unsere Art, Zahlen bzw. Mengen darzustellen, nur eine von vielen möglichen ist. Es war kulturell ein schwieriger Prozess, unsere Zahldarstellung zu entwickeln, deshalb darf es auch individuell ein schwieriger Prozess sein, sie sich anzueignen.

Was müssen die Teilnehmer/-innen also verstehen, um zweistellige Zahlen adäquat interpretieren zu können? Zunächst müssen sie verstanden haben, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind. Sie müssen also zum Beispiel die sieben denken können als ein Ganzes, das sich aus fünf und zwei zusammensetzt oder aus vier und drei oder aus … Andersherum betrachtet lässt sich die sieben also zerlegen in die Bestandteile fünf und zwei oder vier und drei oder … Das Verständnis dieser Sichtweise auf Zahlen und Anzahlen war unter dem Stichwort „relationaler Zahlbegriff“ eines der zentralen Lernziele im Kurs „Rechnen Basis 1“.

Die Zahlsymbolisierung im dezimalen Stellenwertsystem greift genau diese Zerlegbarkeit von Zahlen auf. Die Zahl „vierzehn“ zum Beispiel lässt sich zerlegen in sieben und sieben oder in acht und sechs usw. Von den vielen denkbaren Zerlegungen wird aber genau eine genutzt, um die Zahl zu notieren, nämlich die Zerlegung in zehn und vier. Analog dazu symbolisieren auch die weiteren Zahlen 11 bis 19 spezielle Zerlegungen, nämlich jene mit Bezug zur zehn.



Die Teilnehmer/-innen müssen daher den fundamentalen Bruch verstehen, der sich hinsichtlich der Zahlnotation beim Übergang zur 10 vollzieht. Bis zur neun erhält jede Zahl ein eigenes neues Zahlsymbol, nämlich eine der Ziffern von 1 bis 9. Die Zahl 10 symbolisiert demgegenüber etwas qualitativ Neues. Sie steht für zehn Mengenelemente, die gedanklich zu einer neuen Denkeinheit, einem „Zehner", zusammengefasst werden.

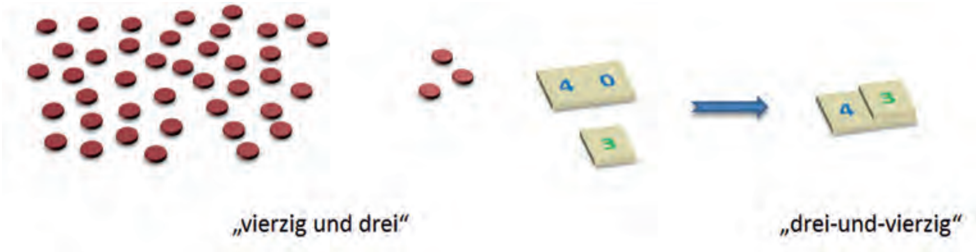
Diese gedankliche Zusammenfassung geschieht auch bei den Zahlen von 11 bis 19, wobei die zum Zehner zusammengefassten zehn Elemente nur noch durch die „1" an der Zehnerstelle zu erkennen sind. Die Teilnehmer/-innen müssen also verstehen, dass sich zum Beispiel hinter dem Zahlsymbol „14" zehn zu einem Zehner gebündelte Einer und noch vier Einer verbergen. Umgekehrt verbirgt sich hinter dem Zahlsymbol 14 eine Zerlegung in 10 und 4. Die in der obigen Abbildung dargestellten Séguin-Zahlenkarten aus dem Materialfundus von Maria Montessori machen diese Zerlegung der „14" transparent.

Erschwert wird das Erkennen der neuen Qualität der Zahlen ab zehn dadurch, dass sich der Bruch, der bei der Zahlnotation geschieht, in der Zahlwortreihe nicht widerspiegelt. Innerhalb der Zahlwortreihe „acht, neun, zehn, elf, zwölf" wird die besondere Bedeutung der zehn nicht deutlich. Erst ab der „dreizehn" wird auch in der Sprechweise die Zehnerbündelung aufgegriffen.

Im Kurs „Rechnen Basis 1" wurden die Zahlen 11 bis 19 schon unter den genannten Aspekten in den Blick genommen. Dies geschah dort im Sinne eines Einblicks in das Konstruktionsprinzip von Zahlen der Form 10 + x und im Hinblick auf die verständige Anwendung des Teilschrittverfahrens zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben des kleinen Einspluseins und Einsminuseins. Die prinzipielle Bedeutung der Denkeinheit Zehner erschließt sich jedoch erst in der Ausweitung der Betrachtungen auf einen größeren Zahlraum.

2.3 Ausweitung der Idee der Bündelung auf den Zahlraum bis 100

Ebenso wie durch die Notation der Zahlen 11 bis 19 eine spezielle Zerlegung mit Bezug zur zehn symbolisiert wird, sind auch die Zahlen der weiteren Dekaden nach einem ähnlichen Prinzip konstruiert. Auch sie repräsentieren spezielle Zerlegungen. So wie die „13" aus 10 und 3 zusammengesetzt ist, ist die „43" zusammengesetzt aus 40 und 3. Man spricht hier auch vom *additiven Aspekt des Stellenwertsystems*. Die Zusammensetzung wird wiederum durch die Séguin-Montessori-Zahlenkarten transparent gemacht.



Diese Sichtweise wird auch durch die Zahlbenennung als „drei-und-vierzig“ unterstützt. Trotzdem werden manche der Teilnehmer/-innen diese Strukturierung der Zahlen bisher nicht bewusst wahrgenommen haben, was ihnen jede weitere Arbeit mit den Zahlen erschwert hat. Um zu verstehen, dass die Zahldarstellung im dezimalen Stellenwertsystem auf einer solchen speziellen Zerlegung der Zahlen beruht, reicht das oben beschriebene relationale Zahlverständnis und das Verständnis des additiven Aspekts des Stellenwertsystems aus. Der zentrale Gedanke der Bündelung von je zehn Elementen zu einem Zehner muss aber im Kurs erst noch expliziert werden.

Die Teilnehmer/-innen müssen an dieser Stelle also auch verstehen, dass die „43“ über die Zerlegbarkeit in 40 und 3 hinaus eine Substruktur aufweist: Die 40 können auch als 4 Zehnerbündel gedacht werden.

Diese Sichtweise erschließt auch die Logik der Zahlschreibweise: Aus 43 Objekten können vier Zehnerbündel gebildet werden, wobei drei einzelne Objekte übrig bleiben. Die „4“ in „43“ gibt also die Anzahl der Zehnerbündel an und die „3“ die Anzahl der übrigen Einer.

Klarer ersichtlich wird die unterschiedliche Bedeutung der einzelnen Ziffern, wenn man sie in eine sogenannte Stellenwerttafel einträgt:

Z	E
4	3

Während bei der Darstellung im Dezimalsystem der Stellenwert einer Ziffer nur implizit durch die Position der Ziffern innerhalb der Zahl angegeben wird, werden die Wertigkeiten in der Stellenwerttafel explizit angegeben. Für manche der Teilnehmer/-innen kann es hilfreich sein, diese explizite Bezeichnung der Stellenwerte vorübergehend bei allen Zahlnotationen vorzunehmen, also die Stellenwerte über die einzelnen Ziffern der Zahlen zu schreiben:

Im Kurs „Rechnen Basis 1“ beschränkte sich die Zehner-Bündelung im Wesentlichen auf eine einmalige Handlung, da hier vorwiegend der Zahlraum bis 20 in den Blick genommen wurde. Erst durch die mehrfache Bündelung von jeweils zehn Mengenelementen zu Zehnern, wie sie bei größeren Anzahlen vorgenommen wird, wird die Zehner-Bündelung als generelles Prinzip deutlich.

2.4 Benennung der zweistelligen Zahlen im Deutschen

Die Sprechweise „drei-und-vierzig“ stützt das Verständnis der Zehner-Einer-Struktur der zweistelligen Zahlen nur bedingt. Zum einen lässt sich aus dem Zahlwort „vierzig“ nicht unmittelbar ableiten, dass damit vier Zehner gemeint sind. Allein die Endung „-zig“ weist darauf hin. Zum anderen werden zweistellige Zahlen im Deutschen in der Regel invertiert benannt, d. h., dass Zahlen wie „43“ von rechts nach links gelesen werden, also entgegen der sonst üblichen Leserichtung. Das hat bei einigen Teilnehmern/-innen dazu geführt, dass sie „Zahlendreher“ produziert haben, dass sie also statt 43 manchmal oder immer 34 geschrieben haben. Manche werden die Zahl 34 „drei(und)vierzig“ genannt haben, andere haben diese Zahl „vierunddreißig“ genannt, haben damit aber die Vorstellung von vier Zehnern und drei Einern verbunden. Wiederum andere sind dieser Verwirrung völlig erlegen und haben das Problem als undurchschaubar zur Seite gelegt.

Über das Problem der Inversion hinaus gibt es einige Unregelmäßigkeiten bei der Benennung der zweistelligen Zahlen, die es den Kursteilnehmer/-innen erschwert haben, die Zehner-Einer-Struktur der zweistelligen Zahlen zu erkennen und für die Entwicklung ihrer Zahlkonzepte zu nutzen.

Die Zahlwörter von zehn bis 19

- Nur bei den Zahlwörtern von 13 bis 19 und bei der zehn selbst wird der Zehneranteil explizit benannt. Dabei stimmt die Leserichtung aber nicht mit der üblichen Schreib- und Leserichtung überein. Man spricht *„vier-zehn“* schreibt aber *eins-vier*: 14.
- Die Zahlwörter „elf“ und „zwölf“ haben zwar dem sprachhistorischen Ursprung nach eine Bedeutung, die sich auf den Zehner bezieht, diese Bedeutung wird aber im heutigen Sprachgebrauch nicht mehr deutlich. Das Zahlwort „elf“ stammt vom althochdeutschen „einlif“ ab und bedeutet in etwa „eins darüber“ im Sinne von einem Zehner und eins. Analog dazu hatte „zwelif“ die Bedeutung „zwei darüber“, also ein Zehner und zwei *(vgl. KLUGE & SEEBOLD 2002 S. 163 bzw. S. 898)*. Daher erscheinen uns die Bezeichnungen „elf“ und „zwölf“ willkürlich gewählt und geben keinen Hinweis auf ihre Bedeutung als „ein Zehner und eins“ bzw. „ein Zehner und zwei“.

Die Zahlwörter von 20 bis 99

- Im Gegensatz zu den Zahlen von 13 bis 19 wird der Zehneranteil bei den weiteren zweistelligen Zahlen nicht explizit benannt. Stattdessen wird das Suffix „-zig“ bzw. „-ßig“ angehängt, um die Bedeutung als Zehneranteil anzuzeigen.
- Die Zahlwörter mancher Dekaden werden dabei unregelmäßig gebildet. Es heißt zwar zum Beispiel *„vier-zig“* aber nicht *„zwei-zig“* sondern *„zwan-zig“*, nicht *„sechs-zig“* sondern *„sech-zig“* und nicht *„sieben-zig“* sondern *„sieb-zig“*.
- Ähnlich wie bei den Zahlwörtern von 13 bis 19 ist auch bei den restlichen zweistelligen Zahlen die Leserichtung gegenüber der üblichen Lese- und Schreibrichtung vertauscht. Man spricht *„drei-und-vierzig“*, schreibt aber *vier-drei*: 43.
- Manche der Zahlworte von 13 bis 19 sind den entsprechenden Bezeichnungen der Dekaden phonologisch sehr ähnlich: Zum Beispiel „vier-*zehn*“ und „vier-*zig*“.

2.5 Ein paradigmatisches Beispiel

Um die Zahlschreibweise im Dezimalsystem durchdringen zu können, ist es für die Teilnehmer/-innen notwendig, die Verbindung zwischen der Zahlebene und der Mengenebene durch konkrete Mengenhandlungen herzustellen. Dazu können Sie die Teilnehmer/-innen zum Beispiel zunächst 43 Würfel auszählen und die entsprechende Anzahl aufschreiben lassen.

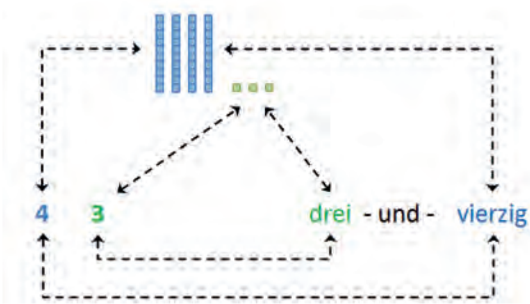
Entscheidend ist nun die Thematisierung der Korrespondenzen zwischen der Zahldarstellung und der Menge:

- Was haben die beiden Ziffern „4“ und „3“ mit der Anzahl der Objekte zu tun?
- Warum benötigt man nur zwei Ziffern? Warum stehen diese zwei Ziffern nicht nur für zwei Objekte? Warum benötigt man nur die Ziffern „4“ und „3“, obwohl doch 43 und nicht nur sieben Objekte (oder zwei) vorhanden sind?
- Wäre es auch möglich, die Ziffern zu vertauschen und die Anzahl als „34“ aufzuschreiben?
- Welche Anzahl beschreibt die „34“? Warum beschreibt die „34“ nicht die gleiche Anzahl, obwohl doch die gleichen Ziffern wie bei der „43“ verwendet werden?
- Welche Bedeutung hat die „3“ in „34“? Welche Bedeutung hat sie in der „43“?

Mit solchen und ähnlichen Fragen können Sie die Teilnehmer/-innen zu einer Reflexion des Aufbaus der Zahlen anregen. Dabei sollten stets die Mengenebne, die symbolische Zahldarstellung und die verbale Zahlbezeichnung präsent sein.

Hinsichtlich der verbalen Zahlbezeichnungen kann es hilfreich sein, gemeinsam mit den Teilnehmern/Teilnehmerinnen über alternative Zahlbezeichnungen nachzudenken, bei denen die Zehner-Einer-Struktur deutlicher hervortritt. Zum Beispiel werden in vielen Sprachen Südostasiens die Stellenwerte bei der Zahlbezeichnung explizit benannt. Die Zahlworte für 12 oder 58 lassen sich zum Beispiel in etwa mit „zehn-zwei“ bzw. „fünf-zehn-acht“ übersetzen *(vgl. FUSON 1990a, S. 278)*. Der Bestandteil „zehn“ taucht also in allen Zahlworten von zehn bis 99 auf und liefert so beständig einen Hinweis auf die Zusammensetzung der zweistelligen Zahlen aus einem Zehner- und einem Eineranteil. Zur Bezeichnung der 43 könnte man also zum Beispiel auch sagen: „vier Zehner und drei“ oder „vierzig-drei“. Die Frage ist nun, wie sich diese Bündelungen in der konventionellen Sprechweise widerspiegeln. Zur Beantwortung dieser Frage sollten die Regelhaftigkeiten, Bezeichnungskonventionen und Ausnahmen der deutschen Sprache mit den Teilnehmern/Teilnehmerinnen diskutiert werden. Eine solche Auseinandersetzung mit den Brüchen und Inkonsequenzen der üblichen Zahlbezeichnungen kann auch eine entlastende Funktion für die Teilnehmer/-innen haben. Viele von ihnen sind an der Hürde, die Zahlbezeichnungen korrekt zu dekodieren, gescheitert. Die Erfahrung, dass dieses Scheitern auch durch die inkonsequente Zahlbezeichnung verursacht wurde, hilft unter Umständen Hemmnisse abzubauen.

Zusammenfassend geht es also zunächst darum, durch verschiedene Aufgaben zur Bündelung von konkretem Material, durch das Aufschreiben der entsprechenden Zahlsymbole, durch das gemeinsame Sprechen über die Materialhandlungen und durch gezielte Nachfragen bei den Teilnehmern/Teilnehmerinnen ein grundlegendes Bewusstsein für die Korrespondenz zwischen der Mengenebene, der Ebene der Zahlsymbole und der Ebene der verbalen Zahlbezeichnungen aufzubauen. Dabei ist einerseits der Aufbau der zweistelligen Zahlen aus einer „Zehnerzahl“ und einer „Einerzahl“ zu verstehen, also 43 als 40 + 3 und 76 als 70 + 6. Andererseits müssen die Teilnehmer/-innen verstehen, dass die 43 über die Zerlegbarkeit in 40 und 3 hinaus eine Substruktur aufweist: Die 40 können auch als 4 Zehnerbündel gedacht werden. Die 70 aus der 76 kann auch als 7 Zehner gedacht werden.



3. Operationen mit Mengen und ihre Entsprechung auf der Symbolebene

Die Teilnehmer/-innen sind im Kurs, weil sie bislang tendenziell mit wenig passenden oder effektiven Strategien gerechnet haben. Sie wurden im Allgemeinen im Teilschrittverfahren unterrichtet und sind darin nicht erfolgreich gewesen. Es geht also darum, sie stimmiger in effektives Rechnen einzuarbeiten – **indem die Bezüge der Rechentechniken zum dezimalen Aufbau der Zahlen expliziert werden**. Die Teilnehmer/-innen kennen vermutlich den „Schritt über den Zehner“ als Rechentechnik. Diese wird nun zunächst auf der Mengenebene als Bündelungs- oder Entbündelungsprozess verstanden, dann aber auch an Zahlenstrahlvorstellungen angebunden.

3.1 Hinzufügen oder Wegnehmen von vollen Zehnern

Wie oben beschrieben beinhaltet die Interpretation einer Zahl wie 43 als 40 und 3 noch nicht den Gedanken der Bündelung. Beim Operieren mit Zahlen stellt das insofern ein Problem dar, als ohne diese Sichtweise auch nicht unmittelbar klar ist, dass 53 zum Beispiel genau ein Zehner mehr ist als 43, dass 63 genau zwei Zehner mehr sind als 43 oder 33 genau ein Zehner weniger. Durch die wiederkehrende Struktur der Zahlworte in den einzelnen Dekaden ist zwar eine Analogie erkennbar, dass aber der Unterschied zwischen „drei-und-vierzig“ und „drei-und-fünfzig“ genau zehn beträgt, geht aus Benennung der Zahlen nicht unmittelbar hervor.

Für jemanden, dem diese Einsicht fehlt, ist auch nicht klar, warum Rechnungen wie 43 + 20 oder 43 – 10 besonders leicht durchzuführen sind. Das tritt dann offen zu Tage, wenn Teilnehmer/-innen solche Aufgaben durch Zählen in Einerschritten lösen oder wenn sie auch hier auf das Teilschrittverfahren zurückgreifen und zum Beispiel 43 + 20 in die Teilaufgaben 43 + 7, 50 + 10 und 60 + 3 zerlegen.

Andererseits kann man von technischen Fertigkeiten bei der Durchführung von Rechnungen nicht unbedingt auf ein Verständnis der Idee der Bündelung und des Stellenwerts schließen. Wer sich zum Beispiel die Regel zurechtgelegt hat, dass man bei Rechnungen mit mehrstelligen Zahlen einfach alle Stellenwerte getrennt behandeln kann, kommt zum richtigen Ergebnis, solange kein Stellenwertübergang stattfindet: 43 + 21 wird gerechnet als 4 + 2 = 6 und 3 + 1 = 4, als Resultat wird dann 64 hingeschrieben. Die richtige Lösung allein zeigt noch kein Verständnis des Zusammenhangs von Zehnern und Einern im Summationsprozess. Genau auf dieses Verständnis kommt es aber an dieser Stelle des Lernprozesses an.

Neben den oben beschriebenen Bündelungshandlungen an einer gegebenen Menge sollten die Teilnehmer/-innen daher auch solche Veränderungen an Mengen vornehmen, bei denen die Zehner-Einer-Struktur der Zahlen im Mittelpunkt steht. Lassen Sie die Teilnehmer/-innen zum Beispiel wie oben beschrieben 43 Objekte auszählen und zu Zehnern bündeln. Anschließend soll die Anzahl notiert werden. Ausgehend von dieser Ausgangssituation können dann unterschiedliche Operationen vorgenommen werden, deren Auswirkungen auf der Mengen- und der Symbolebene durch gezielte Fragen in den Blickpunkt gerückt werden:

- Wie verändert sich die Menge, wenn noch *zehn Einer* hinzugefügt werden? Es entsteht dann eine Menge, die nicht maximal gebündelt ist. D. h., es könnten noch Elemente zu einem weiteren Bündel zusammengefasst werden. Die „kanonische“ Zahldarstellung im Dezimalsystem bezieht sich immer auf maximal gebündelte Mengen. Daher bezeichnet das Zahlsymbol „413“ 4 Hunderter, 1 Zehner und 3 Einer und nicht zum Beispiel 4 Zehner und 13 Einer.
  Wie wird die dann vorhandene Anzahl notiert? Was bleibt auf der Symbolebene gleich und was verändert sich und warum ist das so? Warum kann man die nun vorhandene Anzahl nicht als 413 (im Sinne von 4 Zehner und 13 Einer) notieren?
- 4 Zehner und 13 Einer können im Dezimalsystem nicht durch das Zahlsymbol 413 dargestellt werden. Warum kann man die Anzahl aber in einer Stellenwerttafel auf folgende Weise festhalten:

Z	E
4	13

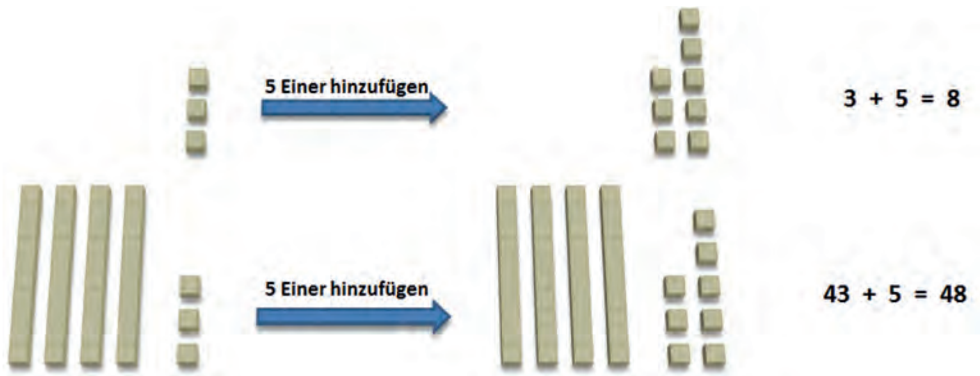
- Wo liegt hier der Unterschied zur Zahlschreibweise ohne Stellenwerttafel? Welche anderen Zerlegungen der 53 lassen sich in einer Stellenwerttafel noch darstellen?

- Man kann die obige Frage auch andersherum stellen: Wie verändert sich die zugehörige Menge, wenn man aus der 43 eine 53 macht, also die Zehnerstelle um eins erhöht? Wie verändert sie sich, wenn man aus der 43 eine 44 macht, also die Einerstelle um eins erhöht?
- Wie verändert sich die Menge, wenn noch *zwei Zehnerbündel* hinzugefügt werden? Wie wirkt sich diese Veränderung auf der Symbolebene aus? Wie ist es, wenn statt der zwei Zehnerbündel *zwanzig Einer* hinzugefügt werden?
- Kann man von den vier Zehnerbündeln und drei Einern auch 20 Einer wegnehmen? Warum ist das möglich, obwohl doch nur drei Einer vorhanden sind? Warum sind bei der übrig bleibenden Menge wieder genau drei ungebündelte Einer vorhanden?

Bei diesen Überlegungen sollte stets auch die Notation der Mengenhandlungen auf der Symbolebene als Addition und Subtraktion präsent sein. Die entsprechenden Grundvorstellungen zu Addition und Subtraktion als Zusammenfügen von Mengen bzw. Extrahieren einer Teilmenge aus einer gegebenen Menge wurden bereits im Kurs „Rechnen Basis 1“ erarbeitet.

3.2 Hinzufügen und Wegnehmen von Einern ohne Umbündeln

Werden zu einer gegebenen, maximal gebündelten Menge Einer hinzugefügt, ohne dass die Anzahl der dann vorhandenen Einer neun überschreitet, so kann kein neuer Zehner gebündelt werden. Die Anzahl der Zehner bleibt also gleich. Analog verhält es sich, wenn von einer gegebenen Menge nur maximal so viele Einer weggenommen werden, wie vorhanden sind, ohne dass Zehner entbündelt werden müssen. Die entsprechenden Rechnungen können daher auf die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis zehn zurückgeführt werden. Man spricht hier auch von *dekadischen Analogien*.



Ein Ziel der Arbeit im Kurs „Rechnen Basis 1“ war die automatisierte Abrufbarkeit der Beziehungen der Zahlen bis zehn. Auf dieser Grundlage könnten die Teilnehmer/-innen auch Aufgaben ohne Stellenwertübergang wie 43 + 5 oder 69 – 6 bereits ohne Rückgriff auf zählende Rechenstrategien lösen. Es wird allerdings nicht allen Teilnehmer/-innen gelingen, die Möglichkeit der Nutzung dekadischer Analogien selbständig zu erkennen. Es gilt daher, diese Analogien bewusst zu machen und inhaltlich zu begründen.

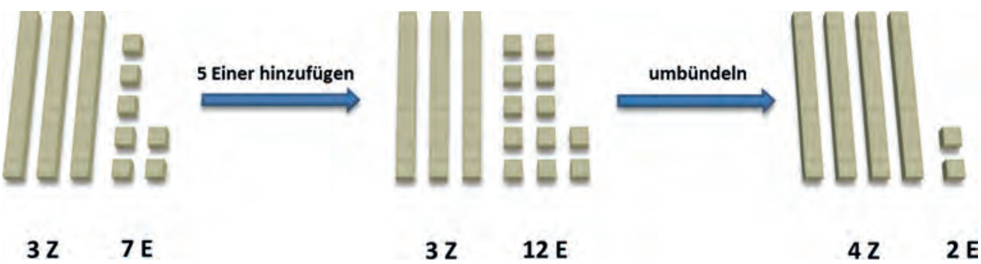
Dazu können Sie zum Beispiel die entsprechenden Mengenhandlungen und ihre Symbolisierung durch Aufgabenserien thematisieren, bei denen die dekadischen Analogien hervortreten. Lassen Sie die Teilnehmer/-innen zum Beispiel zu drei vorhandenen Einern fünf weitere hinzufügen und diese Handlung auf der Symbolebene notieren. Als nächstes sind drei Einer und ein Zehner vorhanden. Es

werden wiederum fünf Einer hinzugefügt. Was unterscheidet die erste Situation von der zweiten? Wie wirkt sich dieser Unterschied auf der Symbolebene aus? Was ist, wenn man zu zwei Zehnern und drei Einern noch fünf Einer hinzufügt? Wo ist hier die Verbindung zu den vorausgegangenen Handlungen?
Aus zwei Gründen steht an dieser Stelle des Lernprozesses, ebenso wie beim Hinzufügen und Wegnehmen von vollen Zehnern, nicht die Routinisierung von Rechnungen ohne Stellenwertübergang im Vordergrund. Zum einen gibt es hier im Grunde nichts Neues zu routinisieren. Was an dieser Stelle automatisiert abrufbar sein muss, sind die Zahlzerlegungen bis zehn. Diese Voraussetzung wurde bereits im Kurs „Rechnen Basis 1“ geschaffen. Zum anderen kann eine zu lange Fokussierung auf Rechnungen ohne Stellenwertübergang dazu beitragen, dass die Beziehungen zwischen Zehnern und Einern aus den Augen verloren werden. Worum es geht, ist die Einsicht, aus welchem Grund die dekadischen Analogien anwendbar sind.

3.3 Hinzufügen und Wegnehmen von Einern mit Umbündeln

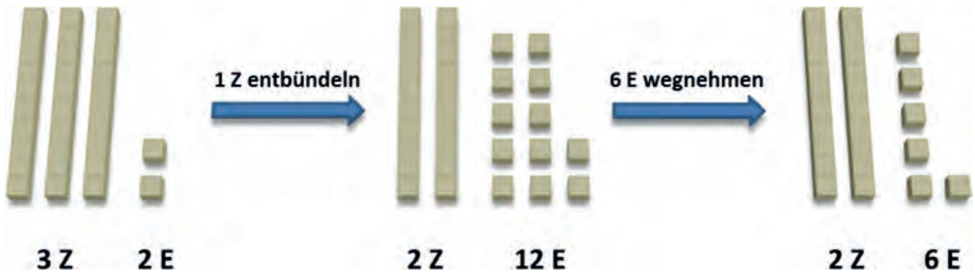
Eine qualitativ andere Situation ergibt sich, wenn einer Menge so viele Einer hinzugefügt werden, dass die Anzahl der dann vorhandenen Einer neun überschreitet oder mehr Einer weggenommen werden sollen, als ungebündelt vorhanden sind. In diesen Situationen ist es nötig, Beziehungen zwischen den ungebündelten Einern und den Zehnern herzustellen.

In ersten Fall müssen jeweils zehn der vorhandenen Einer zu einem Zehner gebündelt werden, um eine maximal gebündelte Menge zu erhalten.



An diesem Punkt des Lernprozesses sollte diese Bündelungshandlung von den Teilnehmern/-innen auch tatsächlich durchgeführt werden. Natürlich ist es auch möglich, die Gesamtanzahl zu ermitteln, ohne die konkrete Bündelungshandlung vorzunehmen, indem man zum Beispiel einfach von der vorher vorhandenen Anzahl weiterzählt und dabei jeweils einen der hinzugekommenen Einer antippt: „38, 39, 40, 41, 42“. Durch diese Abzählhandlung wird aber nicht deutlich, warum die Anzahl nun durch die Ziffernfolge „42“ symbolisiert wird. Die vorhandene Menge ist schließlich strukturiert in drei Zehner und 12 Einer, nicht aber in vier Zehner und zwei Einer. Die Veränderungen auf der Ebene der Zahlsymbole erschließen sich erst durch den Bezug zu den Bündelungshandlungen: Anstelle der 3 steht eine 4, weil nun vier Zehner vorhanden sind, und anstelle der 7 steht eine 2, weil nur noch zwei ungebündelte Einer vorhanden sind. Des Weiteren wird gerade durch die Handlung des Bündelns von zehn Einern zu einem Zehner der qualitative Unterschied zu den vorherigen Mengenhandlungen deutlich. Mancher Lernende kann sich zudem auf das Teilschrittverfahren nur einlassen, wenn er den zum Zehnerübergang gehörenden Bündelungs- bzw. Entbündelungsprozess auf der Mengenebene verstanden hat.

Noch deutlicher wird die Notwendigkeit, Zehner und Einer miteinander in Beziehung zu setzen, dann, wenn gefordert wird, mehr Einer von einer Menge wegzunehmen als ungebündelt vorhanden sind. Will man zum Beispiel von vorhandenen drei Zehnern und zwei Einern sechs Einer wegnehmen, so muss man einen Zehner gegen zehn Einer eintauschen, um die entsprechende Handlung überhaupt vollziehen zu können.



4. Orientierung im Zahlraum bis 100

4.1 Der Aspekt der räumlichen Anordnung von Zahlen

Bisher ging es darum, bei den Teilnehmer/-innen ein grundlegendes Verständnis für die Zehner-Einer-Struktur der zweistelligen Zahlen zu entwickeln. Da die Zahlschreibweise im Dezimalsystem auf der Idee der Bündelung von Mengenelementen basiert, stand dabei die Verbindung zwischen der Mengen- und der Symbolebene im Mittelpunkt der Betrachtungen. Was bisher ausgeklammert wurde, ist der Aspekt der Anordnung von Zahlen.

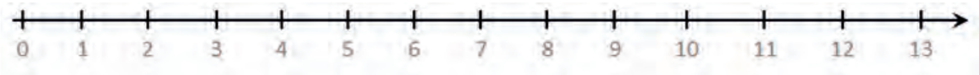
Obwohl die Rolle der inneren Zahlraumvorstellung für die Entwicklung eines elaborierten abstrakten Zahlbegriffs nicht abschließend geklärt ist *(vgl. „Rechnen Basis 1“, S. 46–48)*, ist doch auffällig, dass Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (bSR) oftmals nicht über eine Zahlvorstellung verfügen, die ihnen eine Zahlraumorientierung in einem geometrischen Sinne ermöglicht.

Landerl & Kaufmann berichten zum Beispiel, dass „selbst erwachsene Personen mit Dyskalkulie“ sich oftmals bewusst vergegenwärtigen müssen, welche Menge zum Beispiel mit dem Zahlwort „fünfzehn“ verbunden ist, da ihnen die Zahl ansonsten einfach „nichts sagt“ *(Vgl. Landerl & Kaufmann 2008 S. 110)*. Diese Vergegenwärtigung verläuft bei Erwachsenen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (bSR) oftmals auf einer sehr konkreten Ebene, bei der auch unwesentliche Merkmale der Mengenrepräsentanten, wie Form und Farbe, mit aufgerufen werden. Sollen mit diesen vorgestellten Mengen auch noch Operationen vorgenommen werden, führt das zu einer hohen Belastung des Arbeitsgedächtnisses *(vgl. GRAY ET AL. 1999 S. 13)*.

Räumliche Beziehungen zwischen Zahlen im Sinne einer (linearen) Anordnung haben in einer solchen konkretistischen Sichtweise keinen Platz. Um aber zum Beispiel ein Gespür für die Größenverhältnisse von Zahlen zu entwickeln, ist eben dieser Aspekt der Anordnung von Zahlen eine wichtige Stütze. Aussagen wie „die 19 liegt näher an der 20 als die 23“ sind nur dann verständlich, wenn man Zahlen auch in einem geometrischen Sinne als angeordnete Reihe denken kann. Mit der Ausweitung des Zahlraums gewinnt diese geometrische Sicht auf Zahlen weiter an Bedeutung.

4.2 Der Zahlenstrahl als Stütze für die Zahlraumorientierung

Ein Darstellungsinstrument, das die lineare Anordnung der Zahlen aufgreift, ist der sogenannte „Zahlenstrahl“, auf dem die Zahlen üblicherweise von links nach rechts aufsteigend äquidistant angeordnet werden.



Die Anordnung der Zahlen von links nach rechts ist dabei nicht inhaltlich begründet, sondern lediglich eine Konvention. Insbesondere wäre auch eine Ausrichtung von unten nach oben oder von oben nach unten denkbar. Die inneren Bilder, die sich Menschen von der Anordnung der Zahlen machen, unterscheiden sich zum Teil deutlich von dieser linearen Anordnung *(vgl. „Rechnen Basis 1“, S. 47)*. Da der Zahlenstrahl im Kurs auch als Kommunikationsmittel dienen soll, ist es aber sinnvoll, sich mit den Kursteilnehmern/Kursteilnehmerinnen auf eine einheitliche Darstellung zu verständigen.

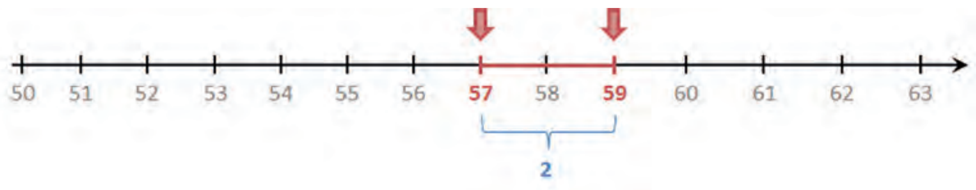
Die Zahldarstellung am Zahlenstrahl birgt einige unauflösbare Probleme, die diskutiert werden sollten, da sie den Teilnehmer/-innen früher eventuell Schwierigkeiten bereitet haben und Potential für Missverständnisse bergen.

Ein Problem bei der Zahldarstellung am Zahlenstrahl ist, dass nicht unmittelbar klar ist, was genau mit den Markierungen bezeichnet wird. Ist zum Beispiel die 7 der Punkt auf dem Zahlenstrahl oder ist sie die gesamte Strecke von der 0 bis zur 7?

Was hat die Strecke zwischen 2 und 9 mit der Position der 7 zu tun? Wenn die 7 und die 9 durch den jeweiligen Punkt auf dem Zahlenstrahl repräsentiert werden, was bedeutet dann 9 – 7? Was bedeutet dann, dass 7 um 2 kleiner ist als 9? Auf die letzte Frage könnte man Antworten, dass 7 und 9 eben den Abstand 2 haben. Aber warum werden die 7 und die 9 dann als Punkt verstanden und die 2 als Strecke? Und was hat diese Strecke mit dem Punkt zu tun, der die 2 repräsentiert? Wenn man es konsequent durchdenkt, so erreicht man eine konsistente Sicht nur dann, wenn man die Zahlen am Zahlenstrahl als Strecke betrachtet. Die Vorstellung der Zahl als Punkt auf dem Zahlenstrahl hat aber ebenfalls eine hohe Plausibilität. Deshalb wird man unbewusst praktisch wahrscheinlich eher eine Mischung zwischen einer Positions- und einer Streckendenkweise verwenden.

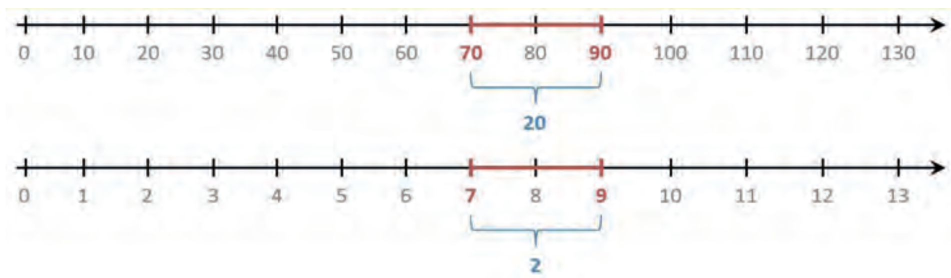
Das Modell des Zahlenstrahls bringt gegenüber der Mengeninterpretation eine Änderung der Sichtweise auf Zahlen und ihre Verhältnisse mit sich. Während es bei der Mengenbetrachtung um Anzahlen und ein Mehr oder Weniger an Elementen geht, geht es bei der Zahlinterpretation am Zahlenstrahl um Positionen von Zahlen und die Entfernung dieser Positionen voneinander bzw. um Streckenlängen und die Unterschiede dieser Streckenlängen. Auf der Mengenebene betrachtet, ist zum Beispiel der Unterschied zwischen 9 und 7 kleiner als der zwischen 3 und 7, weil sich die ersten beiden Mengen nur um zwei Objekte unterscheiden, die zweiten aber um vier. Notiert man diese Zahlen an einem Zahlenstrahl, so ist es daher sinnvoll, die 7 näher bei der 9 zu positionieren als bei der 3. Da sich zwei aufeinanderfolgende Zahlen auf der Mengenebene immer genau um ein Mengenelement unterscheiden, kann man die geometrischen Verhältnisse auch genauer bestimmen: Die 3 sollte genau doppelt so weit von der 7 entfernt sein wie die 9.

Aufgrund der analogen Strukturen kann man diese Überlegungen auch auf die weiteren Dekaden übertragen. Schaut man sich zum Beispiel die Zahlen von 50 bis 60 an, so wird deutlich, dass sich die Verhältnisse aus dem ersten Zehner übertragen: 57 ist genau so weit von 59 entfernt, wie 7 von 9.



Betrachtet man allerdings *die relativen Unterschiede*, so wird deutlich, dass es durchaus einen Unterschied ergibt, ob man den Unterschied zwischen 7 und 9 oder den Unterschied zwischen 57 und 59 betrachtet. Es geht also auch um ein Gespür für die relativen Größendimensionen.

Zoomt man sozusagen heraus und betrachtet den Zahlraum bis 100, so übertragen sich die geometrischen Verhältnisse innerhalb des ersten Zehners entsprechend. Die 90 ist im „Maßstab der Zehner“ genauso weit von der 70 entfernt wie im „Maßstab der Einer“ die 9 von der 7. Die 30 ist doppelt so weit von der 70 entfernt wie die 90, weil der Unterschied zwischen 70 und 90 zwei Zehner beträgt, der Unterschied zwischen 30 und 70 hingegen vier Zehner.

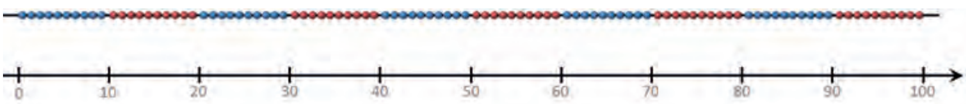


Durch diese Analogien des Aufbaus eines Hunderters aus 10 Zehnern zum Aufbau eines Zehners aus 10 Einern ist der Zahlenstrahl als Orientierungshilfe besonders effektiv. Die bekannten Strukturen können auf größere Zahlräume übertragen werden. Auf der konkreten Mengenebene ist zum Beispiel das Größenverhältnis zwischen 30 und 70 nur schwer vorstellbar. Mit Hilfe des Zahlenstrahls kann man sich klarmachen, dass dieses Verhältnis dem von 3 und 7 entspricht, was sich der Vorstellung wesentlich einfacher erschließt.

4.3 Verbindung zwischen der Repräsentation am Zahlenstrahl und Mengenebene

Wichtig für die Kursteilnehmer/-innen ist es nun zu verstehen, wie die lineare Anordnung der Zahlen am Zahlenstrahl und die Kardinalität von Mengen miteinander verbunden sind. Dazu sollten lineare Aktivitäten am Zahlenstrahl mit dem kardinalen und relationalen Zahlverständnis der Teilnehmer in Verbindung gebracht werden.

Eine Möglichkeit, diese Verbindung herzustellen, ist es, eine Mengenrepräsentation zu wählen, bei der die Mengenelemente ebenfalls linear angeordnet sind. Dies kann zum Beispiel durch eine Kette mit 100 zweifarbigen Holzperlen realisiert werden. Diese Perlen sind dabei so strukturiert, dass nach jeweils zehn Perlen ein Farbwechsel stattfindet, wodurch die Zehnerbündelung hervorgehoben wird. Der Zahlenstrahl kann dann als schematisierte Form dieser Perlenkette angesehen werden.



Um nun den Zahlenstrahl als Hilfsmittel zum Aufbau der Zahlraumorientierung nutzen zu können, bedarf es passender Aktivitäten, die die Zahlverhältnisse in den Blickpunkt der Teilnehmer/-innen rücken. Neben den oben angedeuteten systematischen Betrachtungen des Aufbaus eines Zahlenstrahls sind die folgenden Aufgabenbeispiele paradigmatisch für denkbare Fragestellungen:

- Lassen Sie die Teilnehmer/-innen die Zahlen von 0 bis 10 an einem leeren Zahlenstrahl markieren.
  Wie strukturieren die Teilnehmer/-innen diesen Zahlenstrahl? Sind die Markierungen äquidistant?
- Lassen Sie die Teilnehmer/-innen analog dazu die vollen Zehner von 0 bis 100 an einem leeren Zahlenstrahl markieren.
  Wie viele volle Zehner gibt es in diesem Zahlbereich? Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es im Vergleich zu dem vorherigen Zahlenstrahl? Strukturieren die Teilnehmer/-innen die Markierungen so, dass sie äquidistant sind?
- Lassen Sie die Teilnehmer/-innen 32 Perlen abzählen und analog dazu die 32 an einem leeren Zahlenstrahl oder einem Zahlenstrahl mit Zehnereinteilung markieren. Welche vollen Zehner liegen in der Nähe von 32? Wie groß ist ihr Abstand von der 32?
  Wie gehen die Teilnehmer/-innen beim Abzählen der Perlen vor? Nutzen sie die Zehner-Struktur, oder zählen sie alle Perlen einzeln ab?
- Führen Sie das Gleiche für die 42, 52, … aus. Was ändert sich? Was bleibt gleich?

- Lassen Sie die Teilnehmer/-innen an einem Zahlenstrahl, auf dem nur die 0 und die 100 oder nur die vollen Zehner markiert sind, die ungefähre Position der 97, 48, 25, 74, … bestimmen. Frage: Wie sind Sie vorgegangen, um die Positionen zu finden?
- Lassen Sie die Teilnehmer/-innen die Position bestimmter Zahlen (48, 75, 20, 99, …) auf einem leeren Zahlenstrahl von 0 bis 100 beschreiben.
  Die Teilnehmer/-innen sollen dabei vielfältige Beziehungen der Zahlen erkennen und verbalisieren. Die 48 liegt zum Beispiel nahe an der 50, sie ist ungefähr in der Mitte zwischen 0 und 100, …
  Stellen Sie auch die Verbindung zur Mengenebene her. Auf der Mengenebene würde das Obige bedeuten: 48 ist fast genau so viel ist wie 50, 48 ist ungefähr halb so viel wie 100, …
- Auch einfache Spiele wie das folgende eignen sich, um die Zahlraumorientierung zu fördern: Ein Teilnehmer/eine Teilnehmerin denkt sich eine Zahl aus. Die anderen versuchen, diese Zahl zu ermitteln, indem sie Vermutungen anstellen. Derjenige, der sich die Zahl ausgedacht hat, gibt als Rückmeldung, ob die Zahl größer oder kleiner ist als die genannte.

Neben solchen grundlegenden Orientierungsübungen sollte der Zahlenstrahl auch zur Veranschaulichung von Addition und Subtraktion genutzt werden. Ziel dabei ist es, dass die Teilnehmer/-innen diese Rechenoperationen neben dem Verständnis auf der Mengenebene auch im Sinne einer Bewegung durch den Zahlraum auffassen können.

Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 100

1. Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen kennen verschiedene (Kopf-)Rechenstrategien für die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 100.
- Die Teilnehmer/-innen können die Ergebnisse von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlraum bis 100 sicher im Kopf bestimmen.

2. Vorgehensweisen zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben

In größeren Zahlräumen gibt es für die Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Prinzip drei Vorgehensweisen, die in Abhängigkeit von den gegebenen Zahlen, den verfügbaren Hilfsmitteln und den individuellen Fähigkeiten mehr oder weniger gut geeignet sind.

- Es gibt die Möglichkeit, die Rechenanforderungen im Kopf zu bewältigen.
- Hat man Papier und Bleistift zur Hand, so kann man die schriftlichen Algorithmen verwenden oder sich Zwischenergebnisse des Kopfrechnens notieren („gestütztes Kopfrechnen").
- Des Weiteren gibt es die Möglichkeit, einen Taschenrechner zu verwenden.

Im Folgenden werden Wege zur Erarbeitung von Rechenstrategien für die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 100 aufgezeigt. Neu gegenüber dem traditionellen Mathematikunterricht, der für die Teilnehmer/-innen nicht erfolgreich war, ist die konsequente Erarbeitung der Rechenstrategien *basierend auf dem Verständnis der Zehner-Einer-Struktur der zweistelligen Zahlen*. Ziel der Erarbeitung dieser Strategien ist es, dass die Teilnehmer/-innen Additionen und Subtraktionen im Zahlraum bis 100 im Kopf durchführen können. Dieses Ziel sollte von allen Teilnehmern erreicht werden, da solche Rechnungen zum Beispiel im täglichen Umgang mit Geld eine wichtige Rolle spielen. Darüber hinaus wird für die Erarbeitung des kleinen Einmaleins die Fähigkeit zur sicheren Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 100 benötigt *(vgl. Multiplikation)*.

Die Grundgedanken der Kopfrechenstrategien lassen sich auch auf größere Zahlräume übertragen. Inwieweit das noch ein Thema im Kurs sein soll, sollten Sie von der Motivationslage der Teilnehmer abhängig machen. Es erscheint eher nicht notwendig, dass die Teilnehmer drei- und mehrstellige Zahlen im Kopf addieren und subtrahieren können. Von genereller Bedeutung in größeren Zahlräumen ist aber die Fähigkeit, die ungefähre Größenordnung eines Ergebnisses einschätzen zu können, wenn es zum Beispiel auf ein exaktes Ergebnis gar nicht ankommt oder man sich zunächst einen groben Überblick verschaffen möchte. Die Fähigkeit zum überschlagenden Rechnen sollte daher in jedem Kurs vermittelt werden. Überschlagsrechnungen in größeren Zahlräumen sowie die Rolle der schriftlichen Rechenverfahren werden in den nachfolgenden Kapiteln diskutiert.

3. Kopfrechenstrategien für die Addition und Subtraktion

3.1 Das Scheitern des zählenden Rechnens in größeren Zahlräumen

Für mache der Kursteilnehmer/-innen werden Zählstrategien der einzige Weg sein, auf dem sie Rechenanforderungen im Zahlraum bis 100 ohne weitere Hilfsmittel bewältigen können. In kleinen Zahlräumen sind Zählstrategien trotz aller mit ihnen verbundenen Probleme *(vgl. „Rechnen Basis 1“, Abschnitt 3.2)* zum Teil zumindest dahingehend zielführend, dass mit ihnen korrekte Ergebnisse erzielt werden. Das ändert sich, wenn Zahlen größer werden. Während es noch mit einigermaßen erträglichem Aufwand möglich ist, die Ergebnisse des kleinen Einspluseins und Einsminuseins zählend zu ermitteln, ist das je nach Zählstrategie bei Aufgaben im Zahlraum bis 100 kaum noch möglich. Um ein Gefühl dafür zu bekommen, welch enorme Konzentration dazu erforderlich ist, versuchen Sie einmal eine Aufgabe wie 73 – 45 durch Zählen in Einerschritten zu lösen. Die Teilnehmer müssen sich daher Strategien erarbeiten, mit denen sie Rechenanforderungen auf effektivere Weise lösen können.

3.2 Voraussetzungen für die Ablösung von Zählstrategien im Zahlraum bis 100

Um sich im Zahlraum bis 100 von Zählstrategien lösen zu können, bedarf es *im Prinzip* nur zweier Voraussetzungen. Zum einen müssen die Teilnehmer Zahlen im Zahlraum bis 20 sicher addieren und subtrahieren können. Dies war Inhalt von Kurs 1, in dem die Kursteilnehmer sich verschiedene nichtzählende Strategien für die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 20 erarbeitet haben. Zum anderen müssen die Teilnehmer/-innen den Aufbau zweistelliger Zahlen verstanden haben. Was dazu nötig ist, wurde im ersten Kapitel dargestellt.

Einige Beispiele zur Verdeutlichung:

- Rechnungen wie 70 – 50, 10 + 60, … oder auch 37 – 5, 63 + 4, … können durch die Anwendung dekadischer Analogien leicht gelöst werden, wenn man die Zerlegungen der sieben beherrscht.
- Wenn man Aufgaben wie 8 + 7 oder 12 – 8 mit dem Teilschrittverfahren lösen kann, dann kann man dieses Vorgehen auch auf Aufgaben wie 28 + 7, 38 + 7 usw. übertragen. Um dies verständig zu tun, muss man allerdings den Aufbau der zweistelligen Zahlen aus Zehnern und Einern und die dadurch bedingten Analogien verstanden haben.
- Die Kombination dieser beiden Vorgehensweisen ermöglicht es, beliebige Aufgaben aus dem Zahlraum bis 100, wie etwa 28 + 57 oder 62 – 28 zu lösen.

3.3 Viele Wege führen zum Ziel

Auf Grundlage ihres Verständnisses für den Aufbau der Zahlen können die Teilnehmer/-innen die im Zahlraum bis 20 erarbeiteten Rechenstrategien auf verschiedene Weise auf den Zahlraum bis 100 übertragen. Aufgaben wie zum Beispiel 27 + 48 oder 63 – 57 können auf ganz unterschiedliche Weise gelöst werden. Einige dieser Möglichkeiten werden im Folgenden inklusive einer möglichen (überspitzt formulierten) Denkweise exemplarisch dargestellt:

Schrittweises Rechnen
Man kann einen der Summanden zerlegen und schrittweise zum anderen Summanden hinzufügen. Dabei sind unterschiedliche Zerlegungen möglich. Welche tatsächlich genutzt wird, hängt stark vom individuellen Zahlbeziehungswissen ab.

- **27 + 48:**

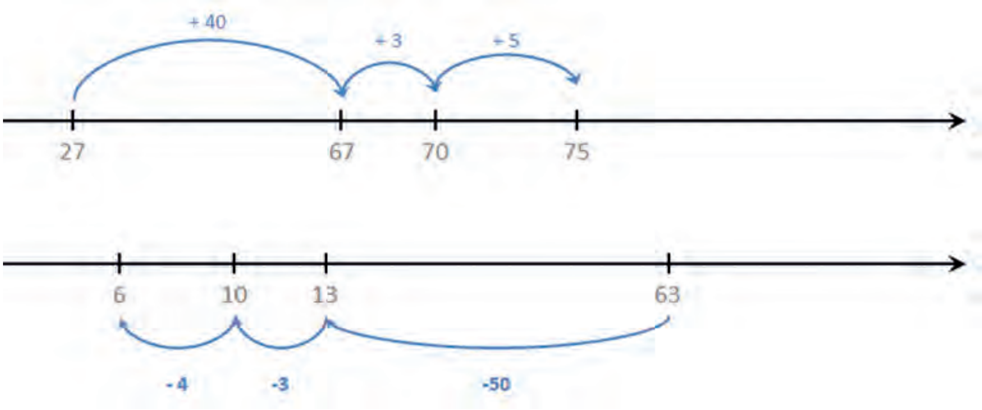
„27 + 40 sind 67. Bis zur 70 fehlen noch 3. Dann bleiben von den 8 noch 5 übrig, die ich hinzufügen muss. Also sind es 75."
Oder auch: „27 + 3 sind 30. Es bleiben noch 45, die ich hinzufügen muss. 30 + 40 sind 70 und 70 + 5 sind 75."

- **63 – 57:**

„63 – 50 sind 13. 13 – 3 ist zehn. Von den zehn muss ich noch vier abziehen, damit ich 57 abgezogen habe. Also ist 63 – 57 gleich 6."
Oder auch: „63 – 3 ist 60. Ich muss noch 4 Einer abziehen. 60 – 4 ist 56. Anschließend muss ich noch die 50 abziehen. 56 – 50 ist 6. Also ist 63 – 57 gleich 6."

In der Literatur wird ein solches Vorgehen als „schrittweises Rechnen" oder auch „Teilschrittverfahren" bezeichnet. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass es sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion unabhängig von den gegebenen Zahlen stets anwendbar ist. Im Sinne einer Bewegung durch den Zahlraum lässt sich das schrittweise Rechnen auch sehr suggestiv an einem (leeren) Zahlenstrahl veranschaulichen.

Im Gegensatz zum „vollständigen" Zahlenstrahl dient der leere Zahlenstrahl lediglich der groben Orientierung und der einfachen Notation der Zwischenschritte des Rechenweges. Es kommt hier nicht auf eine verhältnisgetreue Anordnung der Zahlen an.



Stellenweises Rechnen
Man kann zunächst die Zehner und Einer getrennt betrachten und die Teilergebnisse anschließend addieren.

- **27 + 48:**

„2 Zehner und 4 Zehner sind 6 Zehner. 7 und 8 sind 15. Also noch ein Zehner mehr und 5 Einer. Insgesamt sind es also 7 Zehner und 5 Einer. Also 75."

- **65 – 52:**

„6 Zehner minus 5 Zehner ist 1 Zehner. 5 Einer minus 2 Einer sind 3 Einer. Insgesamt bleiben also 1 Zehner und 3 Einer übrig. Also 13."

• **63 – 57:**
„6 Zehner minus 5 Zehner ist 1 Zehner. Ich habe nur 3 Einer. Deshalb kann ich zunächst auch nur drei wegnehmen. Die restlichen 4 Einer nehme ich von dem einen Zehner weg. Dann bleiben 6 Einer übrig."

Dieses Vorgehen wird in der fachdidaktischen Literatur auch als „Stellenwerte extra" oder „Zehner extra, Einer extra" bezeichnet. Bei Aufgaben ohne Stellenwertübergang ist „Stellenwerte extra" relativ problemlos anwendbar. Bei der Subtraktion ergibt sich allerdings die Schwierigkeit, dass die Teilergebnisse *addiert* werden müssen. Bei Aufgaben mit Stellenwertübergang ist insbesondere die Subtraktion problematisch, wie das Beispiel zeigt. Eine komplett getrennte Betrachtung der Stellenwerte ist dann nicht möglich. Dadurch entstehen oftmals systematische Fehler, wie weiter unten noch näher erläutert wird. Ebenso gibt es keine einleuchtende Möglichkeit, das stellenweise Rechnen in Reinform an einem Zahlenstrahl zu veranschaulichen.

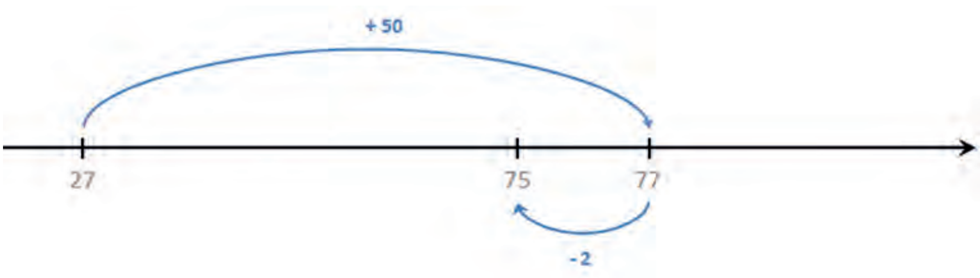
Nutzen von Hilfsaufgaben
Man kann zum Beispiel die Nähe eines der Summanden zu einem vollen Zehner ausnutzen, weil Rechnungen mit vollen Zehnern besonders einfach durchzuführen sind:

• **27 + 48:**
„27 + 50 sind 77. Das sind aber 2 zu viel. Also ist das Ergebnis 75."

• **63 – 57:**
„63 – 60 ist 3. Dabei habe ich aber 3 zu viel abgezogen. Also muss ich wieder 3 dazutun. Also ist 63 – 57 gleich 6."

Dieses Vorgehen wird in der Regel als „Hilfsaufgabe" bezeichnet und kann eine große Rechenerleichterung sein. Allerdings ist für ihre Anwendung bereits ein gewisser „Zahlenblick" notwendig. Man muss zum Beispiel zunächst erkennen, dass die 48 nahe an der 50 liegt. Des Weiteren muss man dann die Rechnung 27 + 50 auch tatsächlich problemlos durchführen können. Und zuletzt muss man sich auch noch überlegen, wie sich die Veränderung der Zahlen auf das Ergebnis auswirken und wie man diese Veränderungen wieder korrigieren kann.

Gerade im Hinblick auf den letzten Punkt bietet die Darstellung am Zahlenstrahl eine sehr suggestive Möglichkeit, sich die Situation klarzumachen.



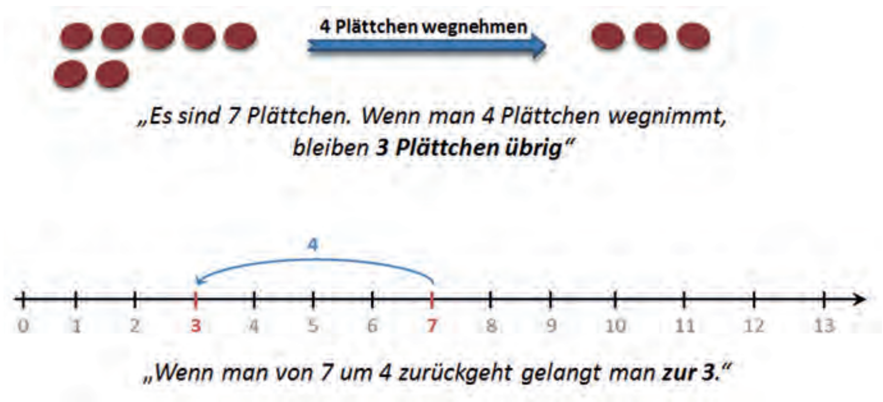
Ergänzen
Subtraktionsaufgaben kann man auch ergänzend lösen. Man bestimmt die Differenz der gegebenen Zahlen dann nicht, indem man die eine von der anderen abzieht, sondern indem man sozusagen den Abstand der beiden Zahlen „ausmisst“. Dieses Ausmessen kann vorwärts oder rückwärts geschehen.

- **63 – 57:**

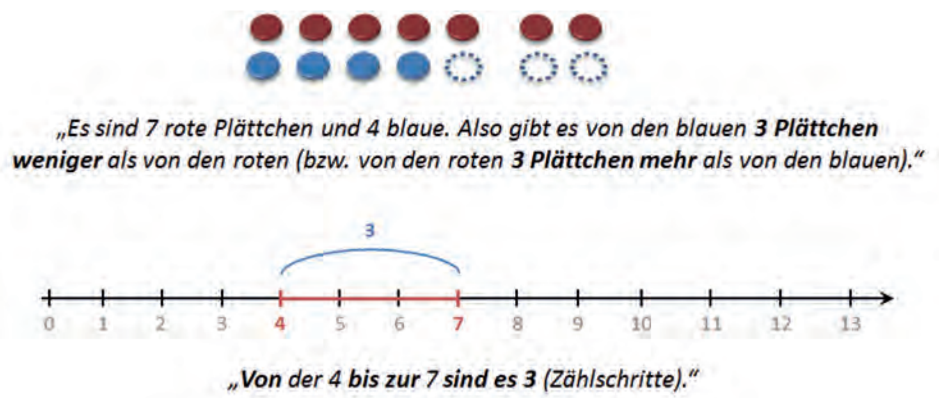
Vorwärts-Ergänzen: „Von 57 bis 60 sind es 3. Von 60 bis 63 sind es auch 3.
Also ist 63 – 57 gleich 6.“
Rückwärts-Ergänzen: „Von 63 bis 60 sind es 3. Von 60 bis 57 sind es auch 3.
Also ist 63 – 57 gleich 6.“

Das Ergänzen bietet sich insbesondere dann an, wenn die Zahlen dicht zusammen liegen, oder auch dann, wenn eine der Zahlen nah an einem vollen Zehner liegt. Auch beim Herausgeben des Wechselgeldes an der Kasse greift man oftmals auf die Differenzbestimmung durch Vorwärts-Ergänzen zurück.

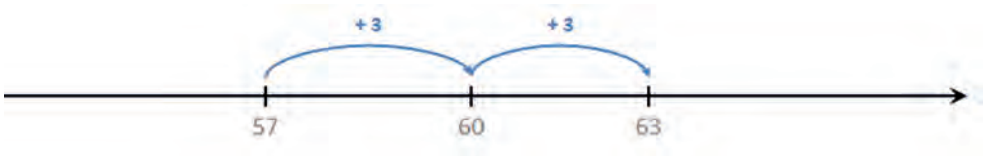
Dem Ergänzen liegt eine andere Sicht auf die Subtraktion zu Grunde als die bisher im Kurs dominante Sicht. Bisher wurde die Subtraktion vorwiegend als Extraktion einer Teilmenge aus einer gegebenen Menge bzw. die Rückwärtsbewegung im Zahlraum gedeutet. 7 – 4 = 3 bedeutet dann:



Das Ergänzen hingegen stellt auf der Mengenebene die Frage, um wie viele Elemente sich zwei Mengen unterscheiden bzw. wie viele Elemente noch fehlen, bis eine bestimmte Anzahl erreicht ist. Auf der Ebene des Zahlenstrahls stellt die ergänzende Sichtweise die Frage, wie weit die beiden Zahlen voneinander entfernt sind. Es geht sozusagen um eine Abstandsmessung. Die Deutungen von 7 – 4 = 3 sind dann entsprechend die folgenden:



Der Abstand von 4 und 7 beträgt also 3. Hat man die Subtraktion auch im Sinne einer Abstandsmessung verstanden, bietet die Darstellung am leeren Zahlenstrahl wiederum eine anschauliche Möglichkeit, sich die Situation zu verdeutlichen.



Diese exemplarische Darstellung möglicher Vorgehensweisen ist keineswegs umfassend. Sie soll lediglich einen Einblick in die Vielfalt der möglichen Lösungswege geben. Die Oberbegriffe, unter denen die Vorgehensweisen subsummiert wurden, sollen den Kern des Vorgehens wiedergeben. Diese Oberbegriffe entstammen der Fachdidaktik und dienen dort in erster Linie dazu, Untersuchungsergebnisse zu strukturieren und die Kommunikation innerhalb der fachdidaktischen Kommunität zu erleichtern. Sie geben nicht die gesamte Bandbreite der möglichen Denkweisen wieder. Was zum Beispiel in der Literatur unter dem Begriff „Schrittweises Rechnen" zusammengefasst wird, kann im Detail deutlich unterschiedliche Ausprägungen haben, wie schon an den beiden obigen Beispielen deutlich wird.

Wie bereits dargestellt, haben die Teilnehmer/-innen durch die Auseinandersetzung mit dem Aufbau der zweistelligen Zahlen und den Rechenstrategien im Zahlraum bis 20 die nötigen Voraussetzungen, um auch in größeren Zahlräumen nichtzählende Rechenstrategien anzuwenden. Dennoch sollte zu Beginn beständig und auch später immer mal wieder eine Anbindung der Rechnungen an die Mengenebene erfolgen – sei es um aus den Mengenhandlungen Rechenstrategien abzuleiten, sei es um die Korrektheit von Ergebnissen oder Vorgehensweisen zu überprüfen oder um anderen das eigene Vorgehen verständlich zu machen.

4. Umgang mit verschiedenen Rechenstrategien

In Abhängigkeit von den gegebenen Zahlen und dem individuellen Wissen sind die verschiedenen Strategien unterschiedlich gut geeignet, um eine Aufgabe zu lösen. Bei der o. g. Aufgabe 27 + 48 bietet sich zum Beispiel aufgrund der Nähe der „48" zur „50" der Weg über eine Hilfsaufgabe an. Noch deutlicher werden die Unterschiede hinsichtlich der Effektivität bei der Subtraktion. Die Differenz von 91 und 89 lässt sich ermitteln, indem man schrittweise 89 von 91 subtrahiert. Dieser Rechenweg führt eventuell zu einem korrekten Resultat, ist aber sehr aufwändig. Macht man sich dagegen klar, dass 91 genau zwei mehr sind als 89, gibt es im Grunde gar nichts zu rechnen, denn genau diese zwei bleiben übrig, wenn man die 89 abzieht.

Für Sie als Kursleiter/-in kommt es zum einen darauf an, die von Ihren Kursteilnehmern/Kursteilnehmerinnen verwendeten Strategien inhaltlich zu durchdringen, um angemessene Rückmeldungen geben zu können, eine Diskussion zwischen den Kursteilnehmern/Kursteilnehmerinnen anleiten zu können und diese zu einer Reflexion ihrer Vorgehensweise zu bringen. Zum anderen kann es natürlich auch angebracht sein, dass Sie selbst Rechenstrategien in die Diskussion einbringen.

4.1 Der flexible Rechner als Leitbild

Für die Kursteilnehmer/-innen kommt es darauf an, ein Repertoire an Rechenstrategien zu erwerben, mit denen sie rechnerische Anforderungen bewältigen können. Das Leitbild ist dabei der „flexible Rechner“, der eine Aufgabe in Abhängigkeit von den Gegebenheiten auf effektive Weise lösen kann.

Die Frage ist, wie Lernprozesse so gestaltet werden können, dass die Teilnehmer/-innen dem Leitbild des flexiblen Rechners näher kommen. Ihre Aufgabe als Kursleiter/-in ist es zunächst dafür zu sorgen, dass die Teilnehmer/-innen überhaupt ein Bewusstsein dafür entwickeln, dass es sehr unterschiedliche Wege gibt, eine Rechenanforderung zu bewältigen. Dazu ist es nötig, dass unterschiedliche Strategien im Kurs präsent sind. Das kann man zum Beispiel dadurch erreichen, dass die Teilnehmer/-innen sich gegenseitig erklären, auf welche Weise sie eine Aufgabe lösen.

In einem weiteren Schritt geht es darum, die unterschiedlichen Rechenwege hinsichtlich ihrer Effektivität zu vergleichen. Dazu sollten die unterschiedlichen Rechenwege miteinander in Beziehung gesetzt werden. Ziel ist es, dass die Teilnehmer/-innen verstehen, aus welchem Grund eine Vorgehensweise bei einer bestimmten Aufgabe effektiv oder weniger effektiv ist. Erst dieses In-Beziehung-Setzen der Lösungswege mit den Charakteristika der Aufgabe macht es möglich, Lösungsstrategien reflektiert auf andere Aufgaben zu übertragen.

4.2 Rechenkonferenzen als methodischer Rahmen

Als methodischer Rahmen für den beschriebenen Prozess kann eine sogenannte „Rechenkonferenz“ dienen. Dabei sollen sich die Teilnehmer/-innen in einer ersten Phase selbständig mit ausgewählten Aufgaben auseinandersetzen, um eine Grundlage für die Diskussion zu schaffen. In dieser Phase haben Sie als Kursleiter/-in die Gelegenheit, sich ein Bild von den Vorgehensweisen der Teilnehmer/-innen zu machen. Dabei können Sie bereits die in der Gruppe vorhandenen Lösungswege ausmachen, die in der anschließenden Diskussion aufgegriffen werden können. Interessant sind dabei gerade auch fehlerhafte Lösungen. Ihre Besprechung bietet ein hohes Erkenntnispotenzial für die Gruppe.

In einer zweiten Phase stellen die Teilnehmer/-innen ihre Lösungswege den anderen Teilnehmer/-innen vor. Die unterschiedlichen Lösungswege werden zunächst einmal gesammelt, ohne eine Bewertung ihrer Effektivität vorzunehmen. Erst nach der Sammlung aller Lösungswege findet in einer dritten Phase eine Diskussion darüber statt, welche Lösungswege für die entsprechende Aufgabe besonders effektiv sind und warum.

Rechenkonferenzen haben somit drei Hauptfunktionen. Für denjenigen, der sein Vorgehen vorstellt, bietet die Rechenkonferenz zum einen die Möglichkeit, Wertschätzung für seine Ideen zu erhalten. Zum anderen kann die Darstellung des eigenen Vorgehens gegenüber anderen auch dazu beitragen, dieses Vorgehen selbst inhaltlich noch einmal tiefer zu durchdringen. Für denjenigen, der die Rechenstrategie eines anderen nachvollzieht, ergibt sich die Möglichkeit, sein eigenes Repertoire an Vorgehensweisen zu erweitern. Sie als Kursleiter/-in erhalten darüber hinaus einen Einblick in die Denkweise der Teilnehmer/-innen und somit einen Zugriff auf mögliche Verständnislücken.

4.3 Das Erkenntnispotenzial von fehlerhaften Lösungen

Fehlerhafte Lösungen entstehen in der Regel nicht „wahllos“. Sie folgen oftmals einem Muster, das auf der Anwendung eines selbst konstruierten, fehlerhaften Rechentricks basiert. In der Anwendung dieses Rechentricks äußert sich dann ein grundlegendes Fehlverständnis.

So kann man zum Beispiel bei Grundschulkindern häufig beobachten, dass sie bei Subtraktionsaufgaben mit Stellenwertübergang systematisch stellenweise die kleinere von der größeren Ziffer abziehen. Um zum Beispiel das Ergebnis von 53 – 28 zu ermitteln, rechnen sie 5 – 2 = 3 und 8 – 3 = 5 und erhalten so 35 als Ergebnis. Dieses Vorgehen ist insofern rational begründet, als es bei Aufgaben ohne Stellenwertübergang immer zum richtigen Ergebnis führt. In einem solchen Vorgehen zeigt sich aber auch, dass diese Kinder auf der inhaltlichen Ebene noch nicht verstanden haben, was ihre Rechnungen bedeuten.

Es ist davon auszugehen, dass viele der Kursteilnehmer/-innen sich im Verlauf ihrer Schulzeit und auch im späteren Leben mit einer Vielzahl solcher Tricks über Wasser gehalten haben. Diese Tricks haben manchmal zu richtigen Ergebnissen geführt und manchmal nicht – aber immerhin. Was „mathematischen Analphabeten“ jedoch stets verborgen blieb, war, *aus welchem Grund* ihre Rechentricks manchmal funktionierten und manchmal nicht. Rechnen verkommt dann zu einer Art Ratespiel, das scheinbar keinen rationalen Regeln folgt.

Diese Erfahrung sollte sich im Kurs nicht wiederholen. Stattdessen sollten Sie versuchen, systematische Fehler der Teilnehmer/-innen produktiv zu nutzen, indem Sie diese auf der inhaltlichen Ebene diskutieren. Wer sich zum Beispiel auf der Mengenebene klar macht, was 53 – 28 bedeutet, dem wird deutlich, dass die obige Rechnung nicht zielführend ist.

4.4 Ein spielerischer Zugang

Es gibt eine Vielzahl an einfachen Spielen, wie zum Beispiel „Elf nimmt“ oder „Lobo 77“, bei denen Additionen und Subtraktionen im Zahlraum bis 100 durchgeführt werden müssen. Diese bieten eine hervorragende Möglichkeit, die Routinisierung des Kopfrechnens auf interessante Weise zu unterstützen.

Mehrstellige Zahlen verstehen

1. Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen verstehen die Idee der fortgesetzten (Zehner-)Bündelung als Grundlage der Anzahldarstellung im Dezimalsystem.
- Die Teilnehmer/-innen verstehen die Idee des Stellenwerts als grundlegende Idee der Zahlschreibweise im Dezimalsystem und erkennen die Korrespondenz zur fortgesetzten Zehnerbündelung.
- Die Teilnehmer/-innen verstehen den Zusammenhang zwischen Mengen, der symbolischen Zahldarstellung und der verbalen Zahlbezeichnung.
- Die Teilnehmer/-innen können sich im Zahlraum bis 1000 orientieren. Sie nutzen die überlagerte 1000er-Struktur des Dezimalsystems, um Größenverhältnisse beliebig großer Zahlen auf die Verhältnisse im Zahlraum bis 1000 zurückzuführen.
- Die Teilnehmer/-innen können die Größenordnung des Ergebnisses von Additionen und Subtraktionen abschätzen.

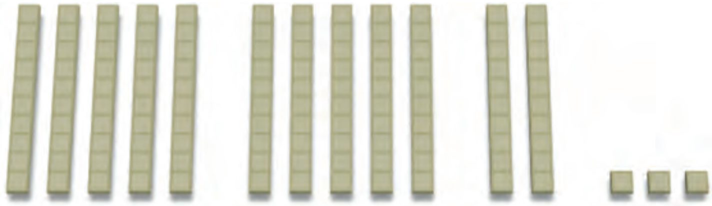
2. Grundlagen für das Verständnis mehrstelliger Zahlen

2.1 Die Idee der mehrfachen Bündelung

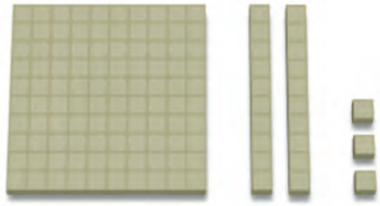
Jenseits der 99 kommt im dezimalen Stellenwertsystem die Idee der mehrfachen Bündelung ins Spiel. Die Zahl 99 repräsentiert neun Zehnerbündel und neun Einer. Kommt nun ein weiteres Mengenelement hinzu, so lassen sich die dann vorhandenen Einer zu einem weiteren Zehner bündeln. Es sind dann zehn Zehner vorhanden. Hinsichtlich der Notation passiert hier zunächst einmal scheinbar nichts Neues: „Hinten" werden die nicht vorhandenen ungebündelten Einer durch eine Null repräsentiert, und „vorne" stehen die zehn Zehner. Erst die Benennung der Zahl als „einhundert" gibt einen Hinweis darauf, dass sich an dieser Stelle hinsichtlich der Sicht auf die Zahl qualitativ etwas ändert: Die zehn Zehner werden wiederum zu einer neuen Denkeinheit vereinigt – dem Hunderter.

Problematisch an dieser Stelle ist, dass es nun zumindest drei verschiedene Sichtweisen auf das Zahlsymbol „100" gibt. „100" kann gedacht werden als 100 einzelne Objekte, „100" kann gedacht werden als zehn Zehner und „100" kann gedacht werden als ein Hunderter. Bei manchen Zahlen wird diese unterschiedliche Sichtweise auch durch die Zahlbezeichnung deutlich. So wird zum Beispiel die Zahl „1900" im Kontext von Jahreszahlen üblicherweise als „neunzehnhundert" bezeichnet, ansonsten spricht man eher von „eintausendneunhundert". An diesem Beispiel wird bereits der erneute Bruch in der Zahlbenennung deutlich. Nach der Logik der invertierten Zahlbenennung der Zahlen bis 99 würde „neun-zehn-hundert" die Zahl 119 bezeichnen.

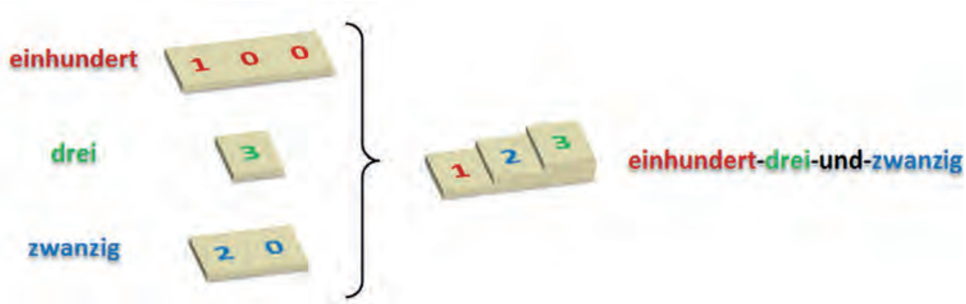
Auch wenn es zunächst vielleicht sehr aufwändig erscheint, sollten Sie die unterschiedlichen Sichtweisen auf mehrstellige Zahlen mit den Teilnehmern/Teilnehmerinnen anhand von konkreten Mengen thematisieren. Geben Sie den Teilnehmern/Teilnehmerinnen zum Beispiel eine große Menge an Steckwürfeln – sagen wir 123. Lassen Sie die Teilnehmer/-innen zunächst schätzen, wie viele es sind. Anschließend sollen sie die genaue Anzahl ermitteln und diese Anzahl aufschreiben. Die Frage ist nun, was die Ziffern 1, 2 und 3 mit der Anzahl der Objekte zu tun haben. Auf Grundlage der zuvor erarbeiteten Idee der Bündelung zu Zehnern ist zunächst eine Interpretation als zwölf Zehner und drei Einer naheliegend.



Was neu hinzukommt, ist die Idee der fortgesetzten Bündelung. Zehn der zwölf Zehner können zu einem Bündel höherer Ordnung zusammengefasst werden. Dadurch entsteht ein „Zehner-Zehner“ bzw. Hunderter.



Mit der entstandenen Strukturierung der Menge lässt sich das Zahlsymbol „123“ als Notation der Anzahl der vorhandenen Hunderterbündel, Zehnerbündel und Einer verstehen. Aufgrund der fortgesetzten Bündelung geht mit der Notation dreistelliger Zahlen also eine Zerlegung der Zahl in drei Teile einher. Dies spiegelt sich auch in der dreigliedrigen Bezeichnung der Zahl als „einhundert-drei-und-zwanzig“ wider. Mit Hilfe der Séguin-Montessori-Zahlenkarten lassen sich auch dreistellige Zahlen im Wortsinn „aufbauen“:



Um den Gedanken der mehrfachen Bündelung und seine Bedeutung für die Zahlnotation zu verdeutlichen, ist auch die Notation in einer Stellenwerttafel hilfreich, da sich die unterschiedlichen Sichtweisen bzw. Bündelungen hier auch in einer unterschiedlichen Notation niederschlagen.

Darstellungen verschiedener Bündelungen der 123 in der Stellenwerttafel:

H	Z	E
1	2	3
	12	3
		123

Dass die erneute Bündelung zu einem Hunderter wiederum erfolgt, wenn zehn Zehner vorhanden sind, ist übrigens keine Notwendigkeit, sondern der Logik des Dezimalsystems geschuldet. So werden zum Beispiel Eier in Waben zu je zehn abgepackt. Es gibt aber keinen Grund dafür die Kisten, in denen diese Waben verschickt werden, auch mit jeweils zehn Waben zu bestücken. Anders ist es bei der Bündelung im Dezimalsystem. Die Bündelung erfolgt stets bei zehn Objekten einer Bündelungsstufe, weil auf diese Weise für jeden Stellenwert die gleiche Anzahl an Ziffern benötigt wird. Durch dieses Konstruktionsprinzip reichen die Ziffern „0“ bis „9“ aus, um jede beliebige Anzahl darzustellen.

2.2 Die Rolle der Null

Bei der Zahlnotation im Stellenwertsystem hängt die Bedeutung einer Ziffer von ihrer Position innerhalb einer Zahl ab. Aus diesem Grund ist es nötig, auch unbesetzte Stellenwerte zu kennzeichnen, wenn es noch größere Stellenwerte gibt, die besetzt sind. Im dezimalen Stellenwertsystem werden die unbesetzten Stellenwerte durch eine Null gekennzeichnet.

Diese Bedeutung der Null für den Wert einer Zahl erschließt sich erst, wenn man die Grundideen der Zahlnotation im Stellenwertsystem bereits verstanden hat und weiß, dass die Ziffern auf den einzelnen Stellenwerten die Anzahl der Bündel einer bestimmten Bündelungsstufe beschreiben. Die Teilnehmer/-innen werden sich dieser Platzhalterfunktion der Null in der Regel nicht bewusst sein. Sie assoziieren mit „null“ vielleicht „nichts“ oder „die Zahl, die beim Rückwärtszählen als letztes kommt“. In Zahlen wie 20, 300 oder 1024, werden sie die Null wahrscheinlich einfach als Teil der Schreibfigur angesehen haben, nicht aber ihre Bedeutung für den Wert der Zahl reflektiert haben. Es gilt daher, bei den Teilnehmern/Teilnehmerinnen durch die Auseinandersetzung mit geeigneten Beispielen ein Bewusstsein für die Funktion der Null innerhalb einer Zahl zu entwickeln.

Um die Notwendigkeit der Kennzeichnung unbesetzter Stellenwerte herauszuarbeiten, bietet sich die Kontrastierung mit der Zahlnotation in einer Stellenwerttafel an. In der Stellenwerttafel ist wegen der expliziten Bezeichnung der Stellenwerte eine Kennzeichnung unbesetzter Stellenwerte nicht notwendig. So lässt sich die folgende Zahldarstellung ohne weiteres als Symbolisierung von zwei Hundertern und sechs Einern deuten. Dabei spielt es keine Rolle, dass die Bündelungsstufe der Zehner nicht besetzt ist.

H	Z	E
2		6

Anders sieht es aus, wenn die gleiche Anzahl ohne die Stellenwerttafel festgehalten werden soll. Dann reichen die Ziffern 2 und 6 allein nicht mehr aus. Auch die nicht vorhandenen Zehner müssen nun dargestellt werden, damit die Hunderter überhaupt als solche notiert werden können.

Sie können das mit den Teilnehmern/Teilnehmerinnen zum Beispiel thematisieren, indem Sie die Aufgabe stellen, die gleiche Anzahl einmal mit und einmal ohne Stellenwerttafel darzustellen. Wenn die Zahl dann auch ohne Stellenwerttafel als „26“ aufgeschrieben wird, ergibt sich der Gesprächsanlass unmittelbar, wenn man versucht, den beiden Zahldarstellungen die entsprechenden Mengen zuzuordnen. Wenn die Zahl korrekt als „206“ aufgeschrieben wird, sollten Sie nachhaken, aus welchem Grund denn nun die 2 und die 6 für die Darstellung nicht mehr ausreichen, was die Null in der 206 bedeutet und aus welchem Grund man sie bei der Zahldarstellung in der Stellenwerttafel nicht benötigt.

2.3 Benennung dreistelliger Zahlen

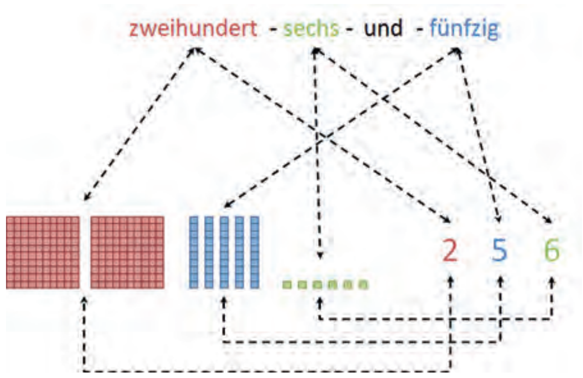
Neben der neuen Idee der mehrfachen Bündelung auf der Mengenebene ergibt sich bei den dreistelligen Zahlen auch durch die Zahlbenennung eine Verständnishürde. Manche Kinder setzen zum Beispiel die Zahlwortreihe bei 100 folgendermaßen fort: „…, 98, 99, hundert, ein-hundert, zwei-hundert, drei-hundert, …“. Offenbar zählen diese Kinder also ab der 100 nicht mehr in Einerschritten, sondern in Hunderterschritten: „…, 98, 99, 100, 200, 300, …“. Fordert man die Kinder aber auf, die Zahlen, die sie gerade aufgesagt haben, einmal aufzuschreiben oder die entsprechenden Mengen zu legen, so zeigt sich, dass sie mit ihren Zahlworten etwas ganz anderes meinen, nämlich die Zahlen …, 98, 99, 100, 101, 102, 103, … Diese Kinder übertragen die Regel „sprich die Zahlen von hinten“, die sie von den zweistelligen Zahlen kennen, auch auf die dreistelligen Zahlen: So wie die Zahl „23“ mit „drei-und-zwanzig“ bezeichnet wird, müsste es dieser Logik folgend auch „drei(-und-)hundert“ heißen, wenn man „103“ meint. Wenn die Teilnehmer/-innen diesen „Fehler“ machen oder früher gemacht haben, dann sollte ihnen deutlich gemacht werden, dass sie dabei streng logisch agiert haben, dass die Konvention hier also lediglich einer anderen Logik folgt. Die mehrfachen logischen Brüche in der Zahlbenennung mögen manchen Teilnehmer gerade deshalb verwirrt haben, weil die gängige Behauptung ist, dass die Mathematik logisch sei.

Diese Fortsetzung des Musters der Benennung zweistelliger Zahlen lässt die erneuten Brüche besonders deutlich hervortreten, die sich beim Übergang zur Benennung dreistelliger Zahlen vollziehen. Während die zweistelligen Zahlen in der Regel invertiert gesprochen werden („drei-und-zwanzig“ statt „zwanzig-und-drei“), wird nun der Hunderter-Anteil von dreistelligen Zahlen zuerst benannt. Die Zahl „123“ zum Beispiel wird daher nicht als „drei-und-zwanzig-(und-)einhundert“ bezeichnet, wie es nach der Logik der invertierten Sprechweise heißen müsste, sondern als „einhundert-drei-und-zwanzig“. Es findet also eine doppelte Änderung der Leserichtung statt.

Des Weiteren wird die Anzahl der Hunderter im Gegensatz zur Anzahl der Zehner explizit benannt. Zwei Hunderter werden zum Beispiel mit „zwei-hundert" bezeichnet, zwei Zehner aber nicht mit „zwei-zehn" sondern mit „zwanzig". Obwohl die Benennung des Hunderter-Anteils also eigentlich transparenter ist, lauern hier doch potenzielle Schwierigkeiten. Wie aus dem obigen Beispiel deutlich wird, ist es nicht unbedingt selbsterklärend, dass mit „hundert" und „einhundert" die gleiche Zahl gemeint ist. Wer aber schon hier immer wieder unsicher ist, ob es sich bei „einhundert" nun um 100 oder 101 handelt, oder ob vielleicht auch beides gemeint sein kann, der wird auch Schwierigkeiten haben, andere Zahlworte korrekt zu interpretieren. Handelt es sich zum Beispiel bei „zwei-hundert" um „zwei und 100", wie es die Analogie zu „zwei-und-dreißig" nahe legt, oder um zwei Hunderter? Handelt es sich bei „zwei-hundert" und „hundert-zwei" um die gleiche Zahl?

Man kann sich leicht ausmalen, dass die Bedeutung eines Zahlwortes wie „zwei-hundert-sechs-und-fünfzig" für jemanden, der diese Brüche in der Zahlbenennung nie als solche wahrgenommen hat, ein Buch mit sieben Siegeln bleibt. Wer die Konventionen der Zahlbenennung nicht verstanden hat, dem erschließt sich unter Umständen nicht, was „zwei", „hundert", „sechs" und „fünfzig" mit dem Zahlsymbol 256 zu tun haben, verweisen die Zahlworte für sich genommen doch auf etwas anderes, nämlich auf 2, 100, 6 und 50.

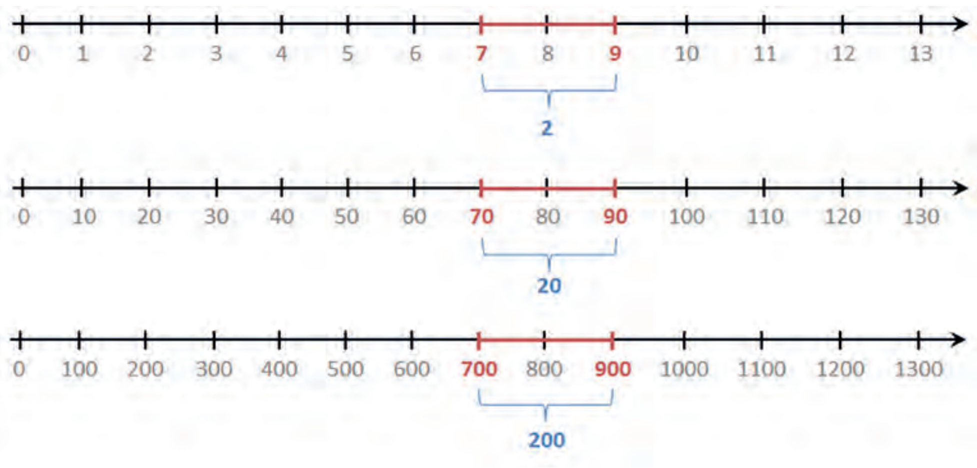
Um solche Missverständnisse aufzuklären und den Teilnehmern/Teilnehmerinnen die daraus resultierenden Unsicherheiten zu nehmen, sollten die Regelhaftigkeiten der Zahlbenennung und die dabei auftretenden logisch-konstruktiven Brüche im Kurs explizit thematisiert werden. Um die Zahlbezeichnungen mit Inhalt zu füllen, sollten dabei stets die Mengenebene, die Symbolebene und die verbale Ebene miteinander verknüpft werden.



3. Orientierung im Zahlraum bis 1000

3.1 Der Aufbau des Tausenders

Aufgrund der wiederkehrenden Zehner-Strukturierung lässt sich die Grobstruktur des Tausenders auf die Struktur eines Zehners zurückführen. Wie schon bei der Betrachtung der Analogien zwischen dem Aufbau eines Zehners und dem eines Hunderters lässt sich auch der Zahlraum bis 1000 durch ein „Hinein-" und „Herauszoomen" überschaubar machen. Fertig man zum Beispiel einen Zahlenstrahl von 0 bis 1000 an, auf dem nur die vollen Hunderter markiert sind, so zeigen sich die Entsprechungen: Im „Maßstab der 100er" ist 900 genauso weit von 700 entfernt wie die 90 von der 70 im „Maßstab der Zehner" und die 9 von der 7 im „Maßstab der Einer".

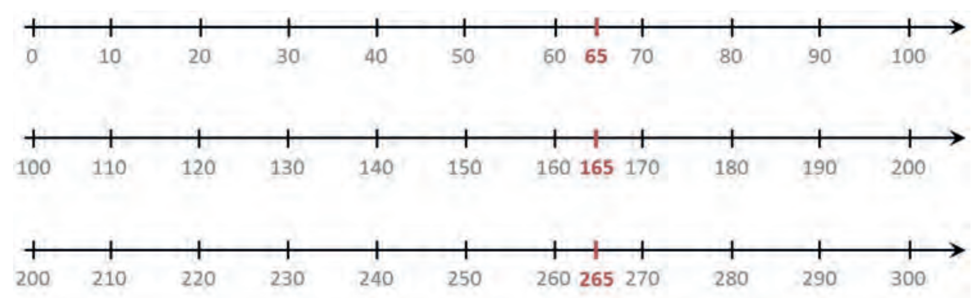


3.2 Der Aufbau der Hunderter

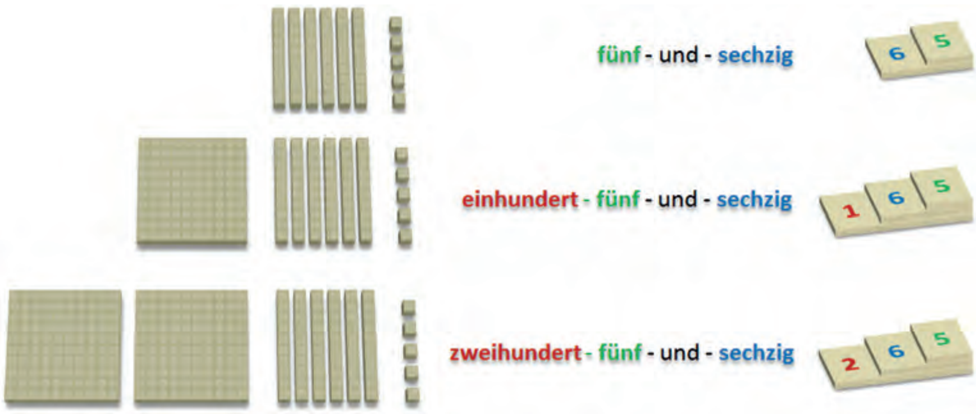
Nimmt man die Struktur der einzelnen Hunderter in den Blick, so wiederholt sich der Aufbau der Zahlen bis 100 analog in jedem weiteren Hunderter. Bewegt man sich innerhalb eines Hunderters, geschieht daher nichts prinzipiell Neues. Dies gilt es den Teilnehmern bewusst zu machen, um ihnen eine Stütze für die Orientierung im Zahlraum zu geben. Diese Orientierung wird den Teilnehmern/Teilnehmerinnen in der Regel fehlen, weil sie die wiederkehrenden Strukturen im Zahlaufbau von sich aus nicht erkannt haben.

Um die Analogien im Aufbau der Hunderter zu verdeutlichen, können Sie die Teilnehmer/-innen arbeitsteilig im gleichen Maßstab eine Zahlenstrahl-Darstellung jedes Hunderters anfertigen lassen. Auf dem einen sind also die Zahlen von 0 bis 100 eingetragen, auf dem nächsten die von 100 bis 200 usw.

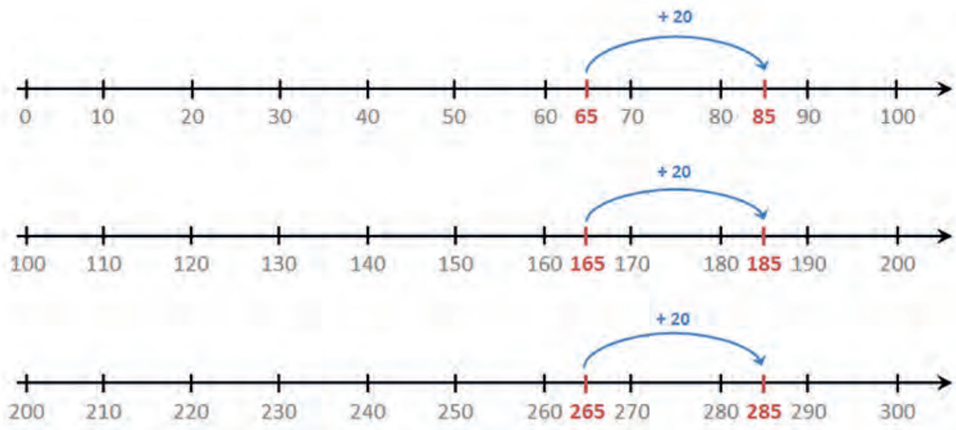
Platziert man die Darstellungen untereinander, lassen sich zum Beispiel Zahlen an den entsprechenden Positionen des jeweiligen Zahlenstrahls markieren. Die 65 liegt genau zwischen der 60 und der 70. Daher liegt die 165 genau zwischen 160 und 170, usw.



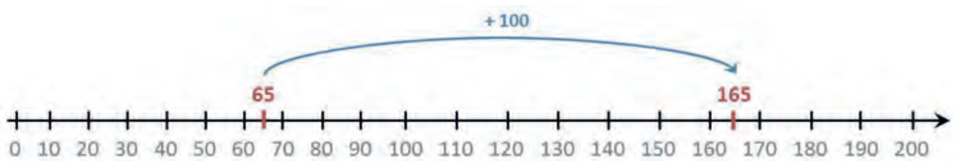
Die Frage ist nun, inwiefern sich diese Zahlen unterscheiden und was gleich ist. Ordnet man den markierten Positionen auf dem Zahlenstrahl die entsprechenden Mengen zu oder stellt die Zahlen in einer Stellenwerttafel mit Plättchen dar, so zeigt sich, dass sie sich nur durch die Anzahl der Hunderter unterscheiden. Auch in der Zahlbenennung finden sich die Analogien wieder. Die eine Zahl wird mit „fünfundsechzig“ bezeichnet, die andere mit „einhundert-fünfundsechzig“ und die letzte mit „zweihundert-fünfundsechzig“.



Führt man nun mit den Mengen jeweils die gleichen Operationen durch, so spiegeln sich diese Operationen in analogen Bewegungen auf dem jeweiligen Zahlenstrahl wider. Fügt man etwa jeder Menge noch zwei Zehner hinzu, so gelangt man auf jedem Zahlenstrahl an Stellen, die sich jeweils entsprechen.



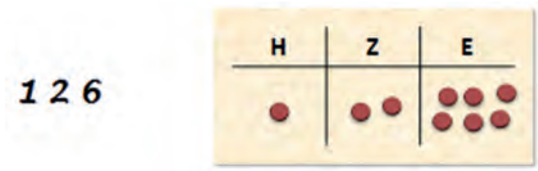
Fügt man den jeweiligen Mengen volle Hunderter hinzu, so gelangt man „auf einem anderen Zahlenstrahl“ an die entsprechende Stelle.



Solche und ähnliche Überlegungen sollten Sie mit den Teilnehmern/Teilnehmerinnen auf den gesamten Zahlraum bis 1000 ausdehnen. Die Aufgabenbeispiele zur Verbindung der Repräsentation am Zahlenstrahl und der Mengenebene aus dem ersten Kapitel lassen sich entsprechend übertragen und ausbauen.

4. Mengenoperationen im Zahlraum bis 1000

Wie schon bei der Erarbeitung des Verständnisses der zweistelligen Zahlen kommt dem Operieren mit Mengen eine besondere Bedeutung für das Verständnis mehrstelliger Zahlen zu. Dabei kann neben der konkreten Mengenrepräsentation auch eine „halbkonkrete“ Darstellung in einer Stellenwerttafel mit Plättchen hilfreich sein. In dieser Darstellung steht ein Plättchen nicht nur für ein Objekt, sondern repräsentiert eine Einheit des entsprechenden Stellenwertes.



Zum einen wird die analoge Zahlrepräsentation durch eine entsprechende Anzahl von Mengenelementen bei großen Anzahlen recht unpraktisch. Zum anderen kann die Plättchendarstellung in der Stellenwerttafel als Bindeglied zwischen der konkreten Menge und der abstrakten symbolischen Notation fungieren. Dies gilt insbesondere auch schon im Hinblick auf die Erarbeitung der schriftlichen Algorithmen der Addition und Subtraktion. Nicht zuletzt lassen sich anhand der Plättchendarstellung in einer Stellenwerttafel einige Übungen durchführen, die für das Verständnis des Stellenwertsystems aufschlussreich sind. Im Folgenden werden einige Beispiele für solche Übungen aufgegriffen.

4.1 Bündelungs- und Entbündelungshandlungen

Gegenüber den Mengenhandlungen mit Zehnern und Einern kommt im Zahlraum bis 1000 die Idee der fortgesetzten Bündelung ins Spiel. Dabei sind die Übergänge zwischen den Stellenwerten bzw. Bündelungsstufen die neuralgischen Punkte. Was an diesen Übergängen geschieht, sollte durch passende Fragestellungen in den Blick der Teilnehmer gerückt werden. Ausgehend von einer Menge von 9 Zehnern und 7 Einern könnte man etwa die folgenden Fragen stellen:

- Wie verändert sich die Menge, wenn man noch 6 Einer hinzufügt?
  Wie wird die dann vorhandene Anzahl notiert? Was hat diese Notation mit den vorhandenen 9 Zehnern und 13 Einern zu tun? Warum kann man die Anzahl nicht als 913 (im Sinne von 9 Zehnern und 13 Einer) notieren?
- Welche Anzahl erhält man, wenn man noch 1 Zehner hinzufügt?
  Wenn man die Anzahl ohne Stellenwerttafel notiert, steht an der Zehnerstelle eine „0“. Warum ist das so, obwohl doch 10 Zehner vorhanden sind? Was geschieht mit den 10 Zehnern?

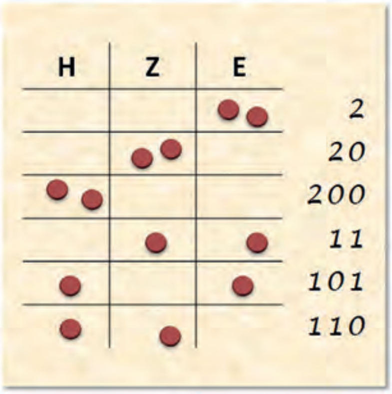
Noch deutlicher wird die Notwendigkeit, Bezüge zwischen den verschiedenen Bündelungsstufen herzustellen, wenn man subtraktive Handlungen vollzieht. Beginnt man zum Beispiel mit einer Menge von 2 Hundertern und 3 Einern, ergibt sich die Notwendigkeit zur Entbündelung eines Hunderters aus der Sache heraus:

- Wie kann man 1 Zehner von der gegebenen Menge wegnehmen, obwohl doch keine Zehner vorhanden sind?
  Wie wird die dann vorhandene Anzahl notiert? Warum sind nach dem Wegnehmen eines Zehners noch Zehner vorhanden, obwohl doch vorher keiner vorhanden war?

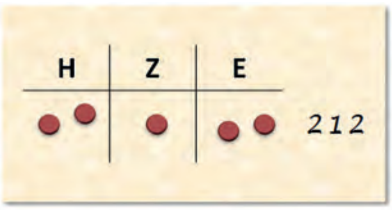
- Wie kann man 6 Einer von der gegebenen Menge wegnehmen, obwohl doch nur 3 Einer vorhanden sind?

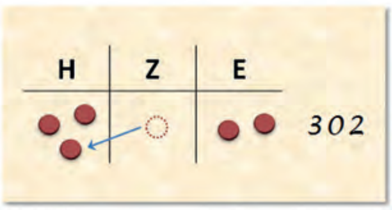
4.2 Systematische Überlegungen mit Plättchen an der Stellenwerttafel

Wie oben bereits angedeutet, lassen sich an der Stellenwerttafel einige systematische Überlegungen anstellen, die dazu beitragen können, das Verständnis des Stellenwertsystems noch einmal zu vertiefen, um verständiger rechnen zu können. So können Sie den Teilnehmern/Teilnehmerinnen zum Beispiel die Aufgabe stellen, alle möglichen Zahlen zu finden, die man mit einem (zwei, drei, …) Plättchen an der Stellenwerttafel darstellen kann.



Notiert man die gefundenen Möglichkeiten und legt die entsprechenden Anzahlen mit Zehner-Systemblöcken, wird durch diese Überlegungen noch einmal die unterschiedliche Bedeutung der Ziffern an den verschiedenen Stellen verdeutlicht: Mit der gleichen Anzahl an Plättchen kann man sehr unterschiedliche Mengen darstellen. Auf eine ähnliche Erkenntnis zielt die Fragestellung ab, wie sich die dargestellte Anzahl verändert, wenn man ein Plättchen zum Beispiel von der Einer- in die Zehner-Spalte oder von der Zehner- in die Hunderter-Spalte verschiebt:





Auch hier werden nochmals die positionsabhängige Gewichtung der Plättchen in der Stellenwerttafel und die entsprechende Gewichtung der Ziffern innerhalb einer Zahl hervorgehoben.

5. Abschätzen der Größenordnung von Summen und Differenzen

Oftmals ist es aufwändig, Summen oder Differenzen mehrstelliger Zahlen exakt zu bestimmen, wenn man keine technischen Hilfsmittel zur Hand hat – und zum Teil ist es auch unnötig, wenn es auf das exakte Ergebnis gar nicht ankommt. Es reicht dann aus, das Ergebnis näherungsweise zu bestimmen.

Beim Abschätzen der Größenordnung eines Ergebnisses sollte man zwei gegensätzliche Anforderungen im Auge behalten. Zum einen sollte die Überschlagsrechnung möglichst einfach durchzuführen sein. Man wird also versuchen, mit möglichst „glatten Zahlen“ zu rechnen. Zum anderen sollte das Ergebnis der Überschlagsrechnung aber auch nicht zu weit vom tatsächlichen Ergebnis abweichen.

Dabei ergibt sich ein wichtiger Schnittpunkt zwischen der Fähigkeit zur Orientierung im Zahlraum und der Fähigkeit zum verständigen Rechnen. Zum einen ist es für eine sinnvolle Rundung der Zahlen hilfreich, eine gewisse Vorstellung von deren Größenordnungen zu haben. Zum anderen kann aber auch gerade das Abschätzen von Ergebnissen eine Stütze für den Ausbau der Zahlraumvorstellung sein, weil man dazu wiederholt Zahlen miteinander in Beziehung setzen muss.

Um etwa das Ergebnis von 576 + 189 abzuschätzen, könnte man zum Beispiel 600 und 200 addieren. Um diese Abschätzung als sinnvoll und hilfreich zu erkennen, benötigt man zunächst eine Vorstellung davon, dass 576 (in Relation zur absoluten Größe) „nah bei“ 600 ist und auch 189 „nah bei“ 200. Deshalb macht man mit dieser Rundung keinen allzu großen Fehler. Des Weiteren muss man die „vollen Hunderter“ aber auch als Zahlen erkennen, mit denen sich besonders einfach rechnen lässt. Dieses In-Beziehung-Setzen der Zahlen, um eine sinnvolle Rundung zu erhalten, ist ein Anknüpfungspunkt für die obigen Überlegungen zum Aufbau der Hunderter und des Tausenders.

Nachdem man das Ergebnis der Überschlagsrechnung 600 + 200 = 800 ermittelt hat, sollte man sich noch überlegen, inwieweit man damit vom tatsächlichen Ergebnis abweicht. Weil man beide Zahlen aufgerundet hat, wird das tatsächliche Ergebnis kleiner sein als 800 und „irgendwo zwischen 750 und 800“ liegen. Im Verhältnis zur Größenordnung von 800 ist eine Unsicherheit von 50 in Ordnung. Hätte man die Summe von 76 und 89 abschätzen wollen, wäre die analoge Überschlagsrechnung 100 + 100 = 200 bereits deutlich weniger geeignet, denn „irgendwo zwischen 150 und 200“ ist im Vergleich zur absoluten Größe keine besonders gute Abschätzung. Zum Beispiel 76 + 100 oder 80 + 80 würden hier eine deutlich bessere Abschätzung liefern, ohne die Rechnung unnötig kompliziert zu machen.

Es gilt solche Überlegungen mit den Teilnehmern/Teilnehmerinnen anhand von Beispielen zu systematisieren:

- Wann reicht es aus, ein Ergebnis nur größenordnungsmäßig zu bestimmen?
- Wie exakt sollte das Ergebnis einer Überschlagsrechnung sein?
- Wie verändert sich das Ergebnis durch die Rundung der Zahlen?

- Warum sollte man bei Rechnungen mit mehreren Zahlen nicht alle Zahlen „in die gleiche Richtung“ verändern?
- Diskutieren Sie unterschiedliche Rundungen. Welche Vor- und Nachteile haben die verschiedenen Rundungen?
- Welche Rundungen sind für das Abschätzen von Ergebnissen sinnvoll?

Ein Ziel dabei ist es, aus der Diskussion dieser Überlegungen Kriterien für das sinnvolle Runden abzuleiten. Es geht aber explizit nicht darum, mit den Teilnehmern/Teilnehmerinnen unreflektiert bestimmte Regeln zur Rundung von Zahlen einzuüben. Im Mittelpunkt sollte unseres Erachtens der Ausbau des Gefühls für die Zahlbeziehungen stehen.

6. Verständnis beliebig großer Zahlen

Wenn die Teilnehmer/-innen die oben beschriebenen Grundideen verstanden haben, so besitzen sie im Prinzip alle Voraussetzungen, um beliebig große Zahlen verstehen zu können. Im Grunde geht es nur noch darum, den Teilnehmern das auch bewusst zu machen.

6.1 Fortsetzung der Prinzipien der Zahlnotation und -bezeichnung

Das Prinzip Zehnerbündelung von Mengenelementen setzt sich weiter fort: Zehn Hunderter werden zu einem Tausender gebündelt, zehn Tausender werden zu einem Zehntausender gebündelt, zehn Zehntausender werden zu einem Hunderttausender gebündelt usw. Aus diesem Grund werden auch für die Symbolisierung beliebig großer Anzahlen nur die zehn Ziffern von „0“ bis „9“ benötigt. Jede der neuen Bündelungsstufen wird durch genau einen Stellenwert innerhalb der Zahl symbolisiert.

Auf der sprachlichen Ebene gibt es ab Tausend eine neue Struktur bei der Zahlbenennung. Diese Struktur greift die Benennung der Zahlen bis Tausend wieder auf. Die Tausender werden mit einem neuen Zahlwort bedacht. Die nächste Bündelungsstufe wird dann als Zehntausender bezeichnet und die darauf folgende als Hunderttausender. Dieses Muster setzt sich bei der Bezeichnung der weiteren Zahlen fort: Millionen, zehn Millionen, hundert Millionen, Milliarden, zehn Milliarden, …. aufgrund dieses Zusammenfassens in „Dreierpakete“ mit dem Bezug zu den Bündelungsstufen aus dem Zahlraum bis 1000 spricht man auch von der *überlagerten Tausenderstruktur* der Zahlbenennung.

Diese überlagerte Tausenderstruktur wird durch die Séguin-Montessori-Zahlenkarten aufgegriffen: Einer und Tausender (grün), Zehner und Zehntausender (blau) sowie Hunderter und Hunderttausender (rot) werden jeweils in der gleichen Farbe dargestellt.

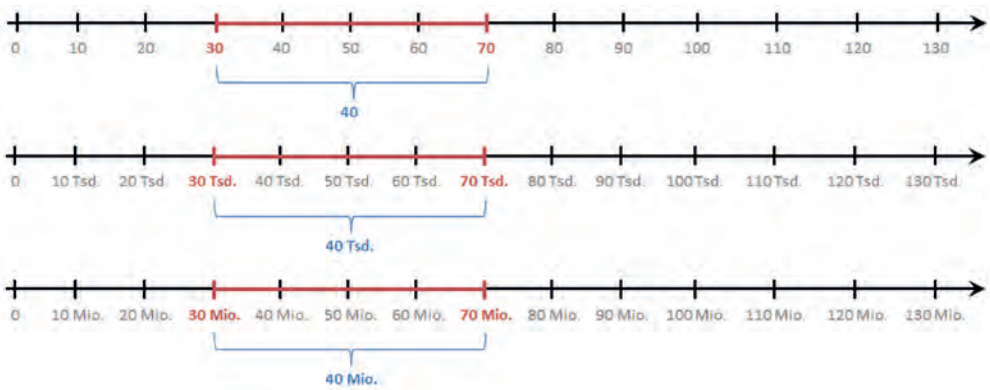
Auch bei der Notation großer Zahlen greift man diese Struktur auf. Um diese besser lesbar zu machen, werden jeweils drei Ziffern durch Punkte zu einem Paket zusammengefasst. Die Punkte geben die Ankerpunkte für die Zahlbenennung vor. Dabei werden die Pakete von links nach rechts benannt. Das Paket mit dem größten Wert wird also zuerst benannt.

12.345.678

„Zwölf-*Millionen* – dreihundert-fünf-und-vierzig-*Tausend* – sechs-hundert-acht-und-siebzig".

6.2 Orientierung in großen Zahlräumen

Bei großen Zahlen wie zum Beispiel 70.000 oder 70 Mio. versagt die Vorstellung einer konkreten Menge als Orientierungshilfe vollständig. Die überlagerte Tausenderstruktur des Dezimalsystems erlaubt es aber, die bisher erarbeiteten Zahlraumvorstellungen auch für die Orientierung in größeren Zahlräumen zu nutzen. Die Struktur des Zahlraums bis 1000 spiegelt sich in jedem weiteren „Dreierblock" wider. Wer zum Beispiel eine Vorstellung von den Beziehungen zwischen 30 und 70 hat, der hat auch eine Möglichkeit, sich ein Bild von den Größenverhältnissen von 30 Tsd. und 70 Tsd. oder 30 Mio. und 70 Mio. zu machen.



6.3 Ein spielerischer Zugang

Ein Zugang, um den Umgang mit großen Zahlen zu routinisieren, kann zum Beispiel über ein einfaches Spiel wie „hohe bzw. niedrige Hausnummern" erfolgen. Dazu ziehen die Teilnehmer/-innen entweder Ziffernkärtchen aus einem Topf oder würfeln mit einem Würfel. Die entsprechenden Ziffern tragen sie in eine Stellenwerttafel ein, die zum Beispiel Werte von Einern bis zu Millionen hat. Das Ziel ist es, mit den Ziffern eine möglichst hohe bzw. niedrige Zahl zu erzeugen. Am Ende ergibt sich auf natürliche Weise ein Anlass, die entstandenen Zahlen zu lesen. Wer mit seinen Ziffern die kleinste Zahl erzeugt hat, übernimmt im Anschluss an die Kurssitzung die erste Runde in der Kneipe …

Schriftliche Addition und Subtraktion

1. Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen verstehen, wie und warum das Verfahren der schriftlichen Addition und das Entbündelungsverfahren der schriftlichen Subtraktion funktionieren.

2. Die schriftliche Addition und Subtraktion als Rettungsanker?

In der Schule ist es oftmals so, dass mit der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren der Addition und Subtraktion (im Weiteren nur: „die schriftlichen Verfahren“) in der dritten Klasse scheinbar eine deutliche Abschwächung der Probleme von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (bSR) einhergeht. Auf einmal produzieren auch diese Kinder viele richtige Ergebnisse bei der Addition und Subtraktion mehrstelliger Zahlen, obwohl die Aufgaben, die sie bearbeiten, scheinbar viel schwieriger sind als die, die sie zuvor erfolglos bearbeitet haben. Für diese Kinder haben die damit verbundenen Erfolgserlebnisse einen spürbaren Entlastungseffekt. Diese Erfolgserlebnisse führen häufig dazu, dass die Kinder nun sämtliche Aufgaben mit Hilfe der schriftlichen Rechenverfahren lösen, ohne darauf zu achten, ob sie nicht auch anders einfacher zu lösen wären. Manche Kinder stellen sich sogar beim Kopfrechnen ein Abbild der Notation der schriftlichen Verfahren vor.

Wie kommt es zu diesen plötzlichen Erfolgen? Zum einen basieren die schriftlichen Rechenverfahren auf Algorithmen, also auf einer fest vorgegebenen Abfolge von Schritten, die mit Sicherheit zum richtigen Ergebnis führen, wenn sie korrekt ausgeführt werden. Um den Algorithmus ausführen zu können, muss man nicht verstanden haben, *warum* er zum richtigen Ergebnis führt und *warum* die Schritte in einer bestimmten Reihenfolge ausgeführt werden. Man muss lediglich das Verfahren abarbeiten und sich dabei an die vorgegebenen Schreibfiguren halten. Zum anderen sind die Algorithmen so angelegt, dass sich die Rechenanforderungen bei den einzelnen Schritten auf das kleine Einspluseins bzw. kleine Einsminuseins beschränken. Es werden stets nur die Zahlen auf den entsprechenden Stellenwerten miteinander verrechnet. Diese Rechenanforderungen können von den Kindern daher auch zählend bewältigt werden.

Um zum Beispiel 247 und 185 mit Hilfe des schriftlichen Algorithmus zu addieren, müssen folgende Schritte ausgeführt werden:

- Schreibe die beiden Zahlen stellengerecht untereinander.
- Beginne ganz rechts mit der Addition.
- 5 + 7 = 12
- Schreibe die 2 unter die 7. Schreibe eine kleine 1 zu der 8 der 185.
- 1 + 8 + 4 = 13
- Schreibe die 3 unter die 8. Schreibe eine kleine 1 zu der 1 der 185.
- 1 + 1 + 2 = 4
- Schreibe die 4 unter die 1 der 185.

Was die „kleinen Einsen“ bedeuten und warum sie an die entsprechenden Stellen geschrieben werden, muss man ebenso wenig verstanden haben wie die Begründung dafür, dass man „von rechts“ beginnt, die Zahlen zu addieren.

Das *unverstandene* Abarbeiten der Verfahren führt dazu, dass viele der Teilnehmer/-innen mittlerweile vergessen haben, wie die Verfahren auszuführen sind. Andere konnten die Verfahren nie korrekt ausführen, weil sie unverstandene Verfahren nicht routinisieren konnten. Manche werden vielleicht nur die Addition, nicht aber die Subtraktion beherrschen.

Haben die Teilnehmer/-innen die schriftlichen Rechenverfahren nicht auf der inhaltlichen Ebene verstanden, sondern lediglich als eine Prozedur kennengelernt, die es abzuarbeiten gilt, so werden sie auch nicht in der Lage sein, Fehler innerhalb dieser Prozedur zu finden und zu korrigieren. Wenn die Teilnehmer/-innen mit der schriftlichen Addition und Subtraktion keine Vorstellungen auf der inhaltlichen Ebene verbinden, werden Fehler oftmals auch dann unbemerkt bleiben, wenn der Algorithmus Ergebnisse liefert, die offensichtlich falsch sein müssen.

Im Kurs geht es darum, in eine emanzipierte Position gegenüber den Verfahren zu kommen, also zu erfahren, dass man in der Lage ist zu verstehen, wie und warum das Verfahren funktioniert. Wie tief die Teilnehmer/-innen die eigenen technischen Fertigkeiten im Ausführen des Verfahrens entwickeln möchten, sollte ihrer jeweiligen Motivlage angepasst sein. Der Kurs hat das Ziel, dass die Teilnehmer/-innen verständig rechnen und eine praktisch brauchbare Orientierung in den Zahlen haben, um mit Quantitäten und Maßen sicher umgehen zu lernen. Es geht darum, ihr rechnerisches Verstehen so weit zu entwickeln, dass sie den Taschenrechner verständig benutzen können. In diesem Sinne hat die Diskussion der schriftlichen Verfahren im Kurs eine Hilfsfunktion zur Vertiefung von verständigem Rechnen. Die Teilnehmer sind daran früher gescheitert, und wir gehen mit ihnen den Weg entlang des Verstehens der Stellenwertzusammenhänge. Diese Zusammenhänge werden in einer neuen Qualität deutlich, wenn man die schriftlichen Verfahren *in ihrem Bezug zum Stellenwertsystem* versteht. Dieses Verstehen vertieft ihre Fähigkeit zu überschlagendem Rechnen und zur Einschätzung, ob sie in einer konkreten Situation eher im Kopf, mit gestütztem Kopfrechnen oder mit dem Taschenrechner rechnen sollten. Das elaborierte technische Ausführen der schriftlichen Verfahren ist hingegen kein Kursziel.

3. Die Normalverfahren der schriftlichen Addition und Subtraktion

3.1 Schriftliche Addition

Für die schriftliche Addition wird in Deutschland im Wesentlichen nur ein Verfahren verwendet. Die Summanden werden stellengerecht untereinander geschrieben. Die Addition beginnt bei den Einern und wird dann sukzessive bei den höheren Stellenwerten fortgesetzt. Wird bei der Addition innerhalb eines Stellenwertes neun überschritten, so wird am unteren Rand der nächsten Spalte ein Übertrag notiert (s. o).

Vergleicht man das Vorgehen bei der schriftlichen Addition mit der (Kopf-) Rechenstrategie „Stellenwerte extra", stellt man fest, dass beide viele Gemeinsamkeiten aufweisen.

$$\begin{array}{rcrcr} 247 & + & 185 & = & 432 \\ \hline 200 & + & 100 & = & 300 \\ 40 & + & 80 & = & 120 \\ 7 & + & 5 & = & 12 \end{array}$$

3.2 Schriftliche Subtraktion

Für die schriftliche Subtraktion gibt es im Gegensatz zur Addition verschiedene Verfahren, die sich inhaltlich stark unterschieden. Diese Unterschiede ergeben sich zum einen durch die Art, wie die Differenz der einzelnen Stellenwerte ermittelt wird, und zum anderen durch den Umgang mit notwendigen Überträgen, wenn die Ziffer im Minuenden kleiner ist als im Subtrahenden. Die Verfahren werden hier dargestellt, damit Sie die eventuell unterschiedlichen Lösungswege der Teilnehmer/-innen besser nachvollziehen und miteinander in Beziehung setzen können.

Bestimmung der Differenz

Die Differenzen in den Teilrechnungen können sowohl abziehend als auch ergänzend ermittelt werden. Während die Schreibweise für beide Sichtweisen gleich ist, gibt es auf der gedanklichen Ebene deutliche Unterschiede.

$$\begin{array}{rccc} & 6 & 5 & 4 \\ - & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 5 & 3 & 1 \end{array}$$

Denkweise beim Abziehen:

- 4E minus 3E ist 1E
- 5Z minus 2Z sind 3Z
- 6H minus 1H sind 2H

Denkweise beim Ergänzen:

- 3E plus 1E sind 4E
- 2Z plus 3Z sind 5Z
- 1H plus 5H sind 6Z

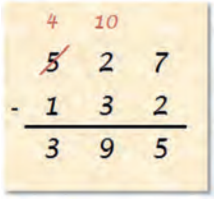
Umgang mit Überträgen

Ist mindestens eine der Ziffern im Minuenden kleiner als im Subtrahenden, so reicht es nicht mehr aus, die Stellenwerte getrennt zu betrachten. Es müssen Beziehungen zwischen den Stellenwerten hergestellt werden. Dabei gibt es im Wesentlichen drei Möglichkeiten, diese Beziehungen herzustellen: das Entbündeln, das gleichsinnige Verändern (auch als Erweitern bezeichnet) und das Auffüllen.

Entbündeln und Erweitern lassen sich sowohl mit dem Abziehen als auch mit dem Ergänzen kombinieren. Das Auffüllen hingegen lässt sich nur ergänzend denken.

Im Folgenden werden die Denkweisen des Entbündelns, Erweiterns und Auffüllens jeweils am Beispiel der Aufgabe 527 – 132 erläutert. Dabei wird für das Entbündeln und Erweitern eine abziehende Sichtweise eingenommen. Die ergänzende Sichtweise ergibt sich entsprechend.

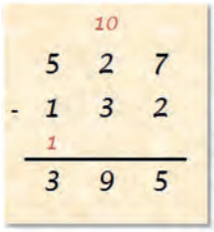
Abziehen mit Entbündeln



- „Wenn ich von 7 E(inern) 2E abziehe, bleiben 5E übrig."
- „Von 2 Z(ehnern) kann ich nicht 3Z abziehen. Ich entbündele einen der H(underter) zu 10 Zehnern. Dann habe ich insgesamt 12Z. Es bleiben 4H übrig"
- „Von den 12Z ziehe ich 3Z ab. Es bleiben 9Z übrig."
- „Von den verbleibenden 4H ziehe ich 1H ab. Es bleiben 3H übrig."

Beim Entbündeln wird also lediglich der Minuend umgeformt. Um alle Teilrechnungen durchführen zu können, wird falls nötig ein größerer Stellenwert in den nächstkleineren entbündelt. Auf der Mengenebene reproduzieren sich also genau die Handlungen, die die Teilnehmer/-innen schon bei der Erarbeitung des Verständnisses des Stellenwertsystems und bei früheren Subtraktionshandlungen vollzogen haben.

Abziehen mit Erweitern

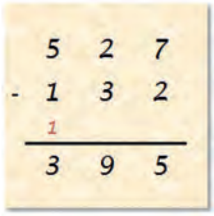


- „Wenn ich von 7E 2E abziehe, bleiben 5E übrig."
- „Von 2Z kann ich nicht 3Z abziehen. Ich erweitere den Minuenden mit 10Z und den Subtrahenden mit 1H. Damit bleibt die Differenz unverändert.
- „Im Minuenden habe ich dann 12Z."
- „Von den 12Z ziehe ich 3Z ab. Es bleiben 9Z übrig."
- „Von den 5H ziehe ich insgesamt 2H ab: 1H des ursprünglichen Subtrahenden und den 1H, um den ich den Subtrahenden erweitert habe. Es bleiben 3H übrig."

Beim Erweitern werden sowohl Minuend als auch Subtrahend verändert. Bei beiden wird die gleiche Anzahl hinzugefügt – allerdings jeweils in anders gebündelter Form. Beim Minuenden werden zum Beispiel 10Z ergänzt und im Subtrahenden 1H. Die Differenz ändert sich durch dieses gleichsinnige Verändern nicht. Diese Tatsache wird auch als *Gesetz von der Konstanz der Differenz* bezeichnet. Durch die Veränderung der Zahlen geht der Bezug zur ursprünglichen Aufgabe ein Stück weit verloren. In der Beispielaufgabe wird aufgrund der gleichsinnigen Veränderung von Minuend und Subtrahend nicht mehr 132 von 527 abgezogen, sondern 232 von 627.

Es gibt also drei Hürden beim Verständnis des Erweiterungsverfahrens: Zum einen muss verstanden werden, dass sich die Differenz zweier (An-)Zahlen nicht ändert, wenn jeweils die gleiche (An-)Zahl hinzugefügt wird. Zum anderen muss verstanden werden, dass diese (An-)Zahl auch in anders gebündelter Form addiert werden kann und muss. Und zuletzt muss der Bezug zwischen der neu entstandenen Aufgabe und der ursprünglichen hergestellt werden.

In der maximal verkürzten Schreibweise werden lediglich die Veränderungen im Subtrahenden notiert. Die Ergänzungen im Minuenden werden lediglich in Gedanken durchgeführt.



Auffüllen
Die Notation beim Auffüllverfahren entspricht der maximal verkürzen Notation beim Erweitern. Trotzdem ist die zugrunde liegende Idee eine deutlich andere.

- „Ich fülle die 132 so lange mit Einern auf, bis ich so viele Einer habe wie im Minuenden. Dafür benötige ich 5E und habe den Minuenden auf 137 aufgefüllt."
- „Anschließend fülle ich die 137 mit 7Z bis zum nächsten Hunderter auf. Die Überschreitung des Hunderters markiere ich, indem ich den Hunderter im Subtrahenden um 1 erhöhe. Ich habe jetzt bis 207 aufgefüllt."
- „Um auf die 2 Zehner der 527 zu kommen, benötige ich dann noch 2Z. Insgesamt habe ich der 137 also 9Z hinzugefügt und bin nun bei 227."
- „Der 227 füge ich 3H hinzu und bin bei 527."

Beim Auffüllverfahren wird also der Subtrahend beginnend bei den Einern stellenweise so lange aufgefüllt, bis der Wert des Minuenden an diesem Stellenwert erreicht ist. Die Differenz ergibt sich beim Auffüllverfahren also durch die Zahl, die dem Subtrahenden hinzugefügt werden muss, um den Minuenden zu erreichen. Die Idee im Hintergrund ist also ein Auffüllen des Subtrahenden bzw. ein Zahl- bzw. Mengenvergleich.

Die Notation beim Auffüllverfahren entspricht der maximal verkürzen Notation beim Erweitern. Trotzdem ist die zugrunde liegende Idee eine deutlich andere.

3.3 Entscheidung für ein Subtraktionsverfahren
Bis vor wenigen Jahren war in Deutschland durch Beschlüsse der Kultusminister-Konferenz (KMK 1958 und 1976) in der Schule das Ergänzen als Verfahren der Differenzbestimmung vorgeschrieben. Für den Zehnerübergang war die Technik des Erweiterns oder des Auffüllens vorgeschrieben. Hintergrund dieser Entscheidung war eine Untersuchung von Johnson, in der festgestellt wurde, dass diese beiden Verfahren den anderen hinsichtlich der Schnelligkeit und Fehlerhäufigkeit überlegen seien. Vor der Verbreitung von Taschenrechnern waren dies die entscheidenden Kriterien. Es gab in der Arbeitswelt eine Nachfrage nach Arbeitskräften, die schnell und sicher in der Lage waren, Zahlen zu addieren und zu subtrahieren.

Die Untersuchung von Johnson bezog sich allerdings auf eine stark drillorientierte Einführung der Rechentechniken, wie sie in den USA üblich war. In differenzierteren Untersuchungen, in denen (auch) Klassen untersucht wurden, in denen die Verfahren verständnisorientiert eingeführt wurden, konnten die Ergebnisse von Johnson hinsichtlich Fehleranfälligkeit und Schnelligkeit nicht bestätigt werden. Was sich allerdings zeigte, war eine deutliche Überlegenheit des Entbündelungsverfahrens hinsichtlich des Verständnisses des Verfahrens und seiner Übertragbarkeit auf noch unbekannte Aufgabentypen *(vgl. Padberg 1994, S. 30–34)*.

Mittlerweile ist von Seiten der KMK freigestellt, welches Verfahren der schriftlichen Subtraktion im Unterricht verwendet wird, weshalb Sie bei den Teilnehmern/Teilnehmerinnen unterschiedliche Verfahren und Notationsweisen vorfinden können. In der fachdidaktischen Diskussion zeigt sich jedoch eine deutliche Tendenz zum Verfahren des Abziehens mit Entbündeln. Auch in den aktuellen Schulbüchern ist dieses Verfahren mittlerweile das am weitesten verbreitete. Einige der Argumente werden im Folgenden näher beleuchtet. Eine ausführliche Gegenüberstellung der verschiedenen Verfahren der schriftlichen Subtraktion findet sich zum Beispiel bei *PADBERG & BENZ (2011, S. 237–252)*.

In diesem Kurs geht es darum, das Verfahren als verstehbar erlebbar zu machen. Deshalb empfehlen wir die Behandlung des Entbündelungsverfahrens. Wir empfehlen es in Verbindung mit der subtraktiven Denkweise, denn diese ist eng an die Subtraktionshandlungen angelehnt, die im Kurs bisher dominant waren: Es geht auf der inhaltlichen Ebene um die Extraktion einer Teilmenge aus einer Gesamtmenge – und genau das spiegelt sich auch beim Abziehen mit Entbündeln wider.

Des Weiteren greift das Entbündelungsverfahren auf der Mengenebene die Handlungen auf, die bei der Erarbeitung des Verständnisses mehrstelliger Zahlen durchgeführt wurden. Die notwendigen Mengenhandlungen ergeben sich beim Entbündelungsverfahren vollkommen ungezwungen. Demgegenüber sind die Mengenhandlungen, die nötig sind, um die anderen schriftlichen Subtraktionsverfahren nachzuvollziehen, deutlich schwieriger zu verstehen.

Diese Argumente überwiegen deutlich die Nachteile, die sich in der praktischen Anwendung des Entbündelungsverfahrens ergeben können. Zum einen kann das Entbündelungsverfahren vergleichsweise schreibaufwändig und unübersichtlich werden, wenn im Minuenden viele Nullen vorkommen oder wenn mehrere Entbündelungen vorgenommen werden müssen. Zum anderen sind Subtraktionen mit mehreren Subtrahenden unter Umständen schwerer durchzuführen als mit den anderen Verfahren.

4. Inhaltliche Begründungen der schriftlichen Rechenverfahren

4.1 Anbindung an die Mengenebene

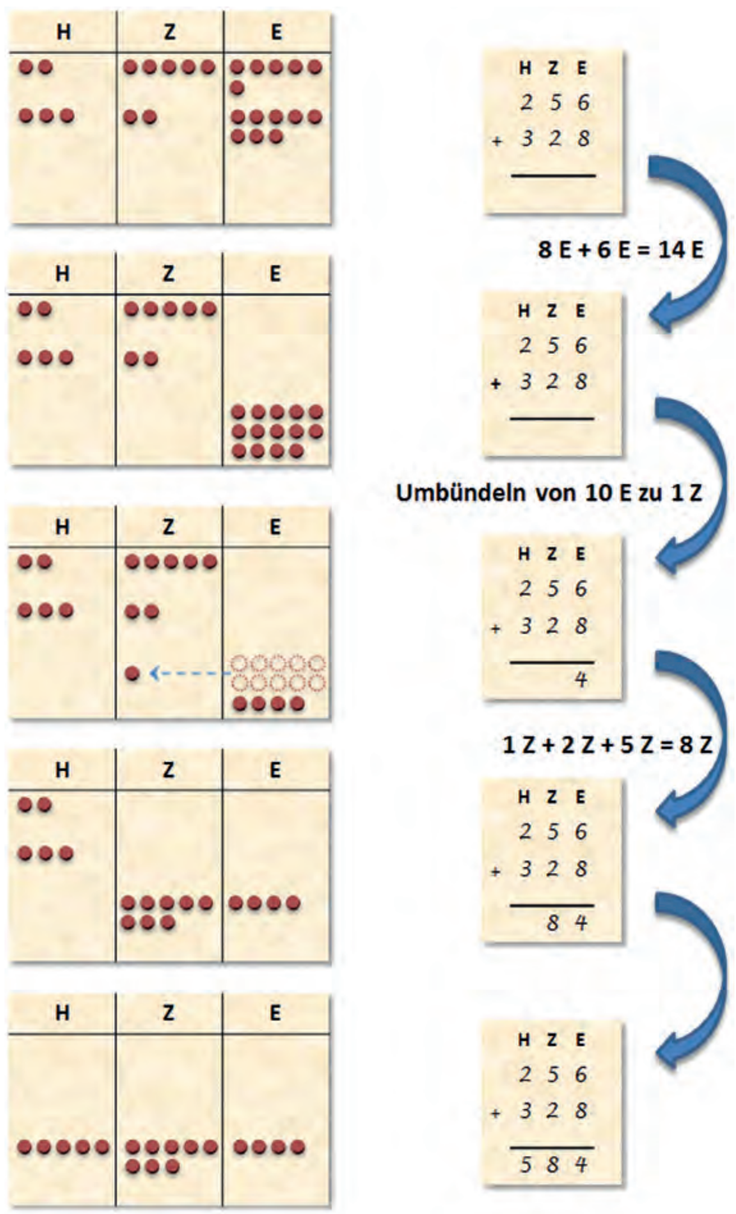
Für die Erarbeitung eines inhaltlichen Verständnisses der schriftlichen Rechenverfahren ist eine Anbindung des Vorgehens an die Mengenebene unabdingbar. Dafür eignet sich im Prinzip jedes Material mit einer Zehnerstruktur, insbesondere jedoch solche, bei denen die Bündelungsstufen nur durch einen Umtausch ineinander überführt werden können. Dies ist zum Beispiel bei den bereits vorn gezeigten Zehner-Systemblöcken der Fall. Auch Geld kann in diesem Sinne verwendet werden, wenn nur 1 €-Münzen sowie 10 €- und 100 €-Scheine zur Verfügung gestellt werden. Die Einschränkung auf diese Werte mag aber auf die Kursteilnehmer/-innen künstlich wirken.

Die Arbeit mit einer Plättchendarstellung in der Stellenwerttafel kann zum einen als Bindeglied zwischen der konkreten Mengenhandlung und der abstrakten symbolischen Notation fungieren. Zum anderen erlaubt die Verwendung der Stellenwerttafel auch bei großen Zahlen noch eine Anbindung an eine halbkonkrete Darstellung.

Die schriftliche Addition

Berechnet man zum Beispiel die Summe von 256 und 328 mit Hilfe der schriftlichen Addition und führt parallel zu den Schritten des schriftlichen Algorithmus die entsprechenden Mengenhandlungen mit Zehner-Systemblöcken oder mit Plättchen an der Stellenwerttafel aus, so wird die Bedeutung der Notation unmittelbar einsichtig.

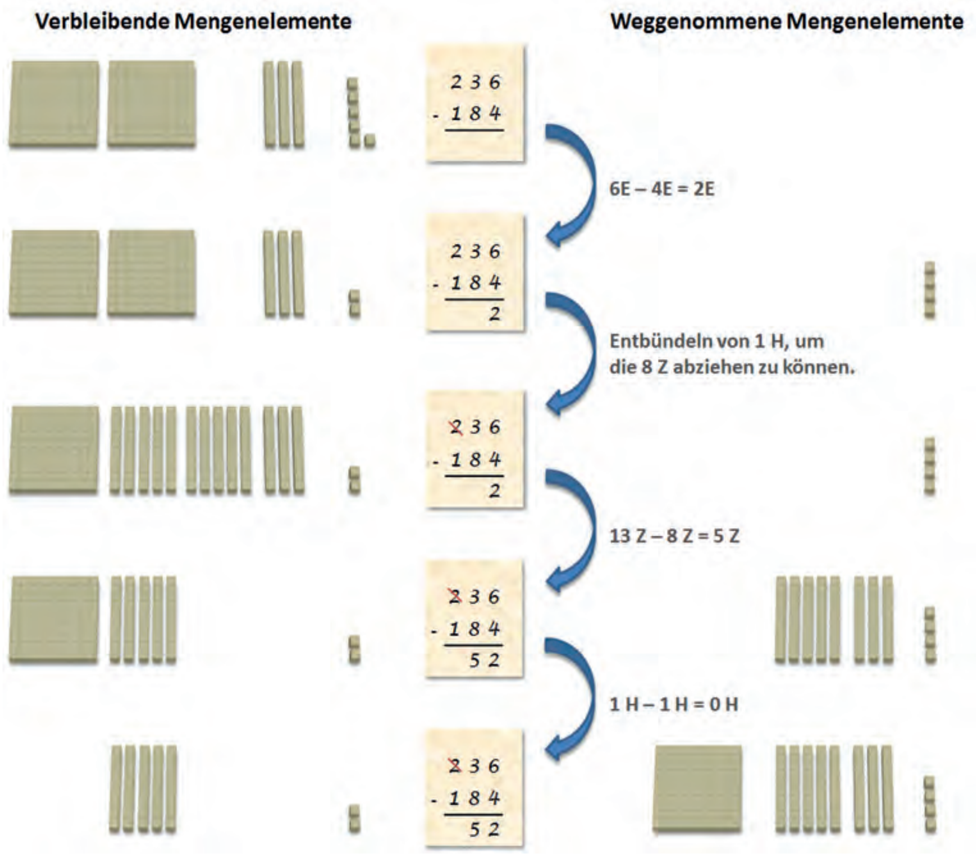
In einem ersten Zugriff kann es dabei hilfreich sein, die Stellenwerte der einzelnen Ziffern explizit kenntlich zu machen, um die Analogien zwischen den Teilrechnungen und den Handlungen auf der Mengenebene noch deutlicher hervortreten zu lassen.



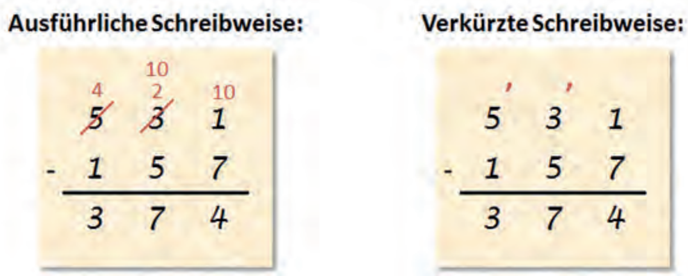
Zur weiteren Anbindung an bereits Bekanntes können Sie auch die enge Verbindung der schriftlichen Addition zur Strategie „Stellenwerte extra“ herausstellen.

Die schriftliche Subtraktion

Ebenso wie bei der schriftlichen Addition erschließt sich auch die Logik der schriftlichen Subtraktion relativ ungezwungen aus den entsprechenden Mengenhandlungen bzw. den Handlungen an der Stellenwerttafel, wenn man das Verfahren des Entbündelns mit Abziehen verwendet. Auch hier könnte man die Stellenwerte zunächst explizit kenntlich machen.



Wie bereits oben angedeutet kann die Notation des Entbündelungsverfahrens recht unübersichtlich werden, wenn innerhalb einer Subtraktion mehrere Entbündelungshandlungen vorgenommen werden müssen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Notation des Entbündelungsverfahrens zu verkürzen, was das Problem der Unübersichtlichkeit ein wenig abschwächt. So kann man zum Beispiel nur die Einheiten, die entbündelt wurden, markieren und die 10 Einheiten, in die entbündelt wurde, nur in Gedanken berücksichtigen.



Allerdings geht mit einer Verkürzung der Notation auch immer ein gewisser Informationsverlust einher. Es wird weniger transparent, was eigentlich geschieht. Inwieweit Sie im Kurs zu einer Verkürzung der Notation übergehen wollen, sollten Sie davon abhängig machen, welche Rückmeldungen Sie von Ihren Teilnehmern/Teilnehmerinnen bekommen.

4.2 Warum beginnt man mit dem kleinsten Stellenwert?

Intuitiv scheint es sinnvoller zu sein, bei seinen Rechnungen mit dem größten Stellenwert zu beginnen. Auf diese Weise erreicht man schon im ersten Rechenschritt die ungefähre Größe des Ergebnisses. Beim Kopfrechnen oder gestützten Kopfrechnen geht man oftmals auf diese Weise vor. Demgegenüber ist für die Verfahren der schriftlichen Addition und Subtraktion charakteristisch, dass mit dem kleinsten Stellenwert begonnen wird. Dies geschieht nicht willkürlich, sondern aus Gründen der Praktikabilität bei Rechnungen mit Stellenwertübergang. Würde man zum Beispiel bei der schriftlichen Addition 247 + 185 mit den Hundertern beginnen, so müsste man das Ergebnis dieser Teilrechnung nochmals korrigieren, nachdem man die Zehner addiert hat, weil zehn der insgesamt zwölf Zehner zu einem weiteren Hunderter gebündelt werden können. Ein entsprechendes Problem würde bei der Berechnung der Zehner auftreten. Beginnt man mit den Einern, ergeben sich diese Probleme nicht, da die neu gebündelten Einheiten bei den Teilrechnungen direkt berücksichtigt werden können.

Ähnlich verhält es sich bei der schriftlichen Subtraktion. Würde man zum Beispiel bei der Aufgabe 527 – 132 mit der Berechnung der Hunderter beginnen, so müsste man dieses Teilergebnis korrigieren, wenn man zu den Zehnern kommt, weil einer der übrigen Hunderter entbündelt werden muss.

Die Einsicht, aus welchem Grund man beim kleinsten Stellenwert beginnt, sollten Sie den Teilnehmern nicht vorenthalten. Lassen Sie die Teilnehmer/-innen eine Aufgabe mit Stellenwertübergang beginnend beim größten Stellenwert berechnen. Erst durch die Probleme, die sich bei dieser Kontrastierung ergeben, wird deutlich, warum der Beginn bei den Einern wesentlich effektiver ist.

4.3 Die schriftlichen Algorithmen als mächtiges Werkzeug erleben

Mit den schriftlichen Rechenverfahren haben die Teilnehmer/-innen mächtige Werkzeuge an der Hand, mit denen sie Zahlen beliebiger Größe addieren und subtrahieren können. Diese Erfahrung der eigenen Kompetenz sollten Sie den Teilnehmern/Teilnehmerinnen nicht vorenthalten. Stellen Sie den Teilnehmern/Teilnehmerinnen Aufgaben mit wirklich großen Zahlen. In der Praxis wird man solche Rechnungen kaum durchführen müssen, aber es ist eine erleichternde Erfahrung, dass auch solche „Ungetüme“ ein wenig von ihrem Schrecken verlieren, wenn man die passenden Werkzeuge an der Hand hat, um sie zu bändigen.

Multiplikation

1. Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen verstehen die Multiplikation im Sinne einer wiederholten Addition.
- Die Teilnehmer/-innen haben die Ergebnisse der Kernaufgaben des kleinen Einmaleins gedächtnismäßig verfügbar. Die Ergebnisse der restlichen Aufgaben des kleinen Einmaleins können sie aus den Kernaufgaben sicher im Kopf ableiten.
- Die Teilnehmer/-innen können – zumindest dem Prinzip nach – Multiplikationsaufgaben mit einem mehrstelligen Faktor durch stellenwertgerechte Zerlegung in mehrere Teilaufgaben lösen.

2. Operationslogiken der Multiplikation

Ähnlich wie bei der Addition und Subtraktion lassen sich mit Hilfe eines einzigen Multiplikationsterms sehr unterschiedliche Situationen abbilden. Andersherum betrachtet kann ein einzelner Multiplikationsterm hinsichtlich der Situation, die er beschreibt, sehr unterschiedlich gedeutet werden. Die Fülle an unterschiedlichen Situationen ist dabei bei der Multiplikation bedeutend größer als bei der Addition und Subtraktion.

So lässt sich zum Beispiel die Anzahl der Wasserflaschen in einer Kiste mit vier Reihen à fünf Flaschen ebenso durch den Term $4 \cdot 5$ beschreiben wie die Anzahl der Augen auf vier Würfeln, die jeweils eine fünf zeigen, oder die Summe, die für ein Geschenk zur Verfügung steht, wenn von vier Personen jeweils fünf Euro eingesammelt werden. Aber auch der Flächeninhalt eines vier Meter langen und fünf Meter breiten Teppichs oder die Anzahl der Möglichkeiten, vier verschiedene Krawatten mit fünf verschiedenen Hemden zu kombinieren, wird durch den Term $4 \cdot 5$ beschrieben. *(Eine umfassende Übersicht von multiplikativen Sachsituationen findet sich bei Gerster & Schultz 2004, S. 389.)*

In den ersten drei Situationen geht es um die *Vervielfachung* einer Menge bzw. Größe. Die Multiplikation kann hier als wiederholte Addition gleicher Summanden aufgefasst werden:

- In den vier Reihen sind 5 + 5 + 5 + 5 Flaschen vorhanden.
- Es sind 5 + 5 + 5 + 5 Augen auf den Würfeln.
- Es stehen 5 € + 5 € + 5 € + 5 € zur Verfügung.

Die Vervielfachung ist also eine Vereinigung mehrerer gleichmächtiger Mengen. Dabei wurde die „4“ jeweils als „Multiplikator“ gedeutet und die „5“ als „Multiplikand“. Die „4“ gibt also an, wie viele Teilmengen vorhanden sind, und die „5“ gibt an, wie groß diese Mengen jeweils sind. Dass im Term $4 \cdot 5$ der erste Faktor als Multiplikand und der zweite Faktor als Multiplikator gedeutet wird, ist lediglich eine Konvention. Man könnte ebenso gut die zu vervielfachende Menge als ersten Faktor setzen und den Vervielfacher als zweiten.

Im vierten Beispiel werden Maßeinheiten *miteinander* multipliziert. Die Interpretation der Multiplikation als wiederholte Addition scheint hier genauso zu versagen wie beim letzten Beispiel, bei dem Anzahlen miteinander multipliziert werden. Es geht hier eben nicht um $5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m$ bzw. $5 + 5 + 5 + 5$ Hemden. Allerdings lassen sich diese Situationen *indirekt* doch im Sinne der mehrfachen Addition deuten: Der Teppich lässt sich deuten als 4 Streifen mit je 5 m Länge und 1 m Breite. In diesem Sinne liegen $(5\,m \cdot 1\,m) + (5\,m \cdot 1\,m) + (5\,m \cdot 1\,m) + (5\,m \cdot 1\,m)$ vor, also $5\,m^2 + 5\,m^2 + 5\,m^2 + 5\,m^2$, also $20\,m^2$. Das Kombinationsbeispiel lässt sich so deuten: Krawatte 1 lässt sich mit 5 Hemden kombinieren, Krawatte 2 lässt sich mit 5 Hemden kombinieren, Krawatte 3 lässt sich mit 5 Hemden kombinieren und Krawatte 4 lässt sich mit 5 Hemden kombinieren, also ergeben sich $5 + 5 + 5 + 5$ Kombinationsmöglichkeiten.

3. Operationsverständnis der Multiplikation

Wie bereits in der Handreichung zum Kurs 1 dargestellt, lässt sich Operationsverständnis auffassen als die Fähigkeit, Verbindungen herzustellen zwischen:

- (verbal beschriebenen) konkreten Sachsituationen
- modell- oder bildhaften Darstellungen von Quantitäten oder Beziehungen
- symbolischen Schreibweisen für die zugrunde liegenden Quantitäten und Rechenoperationen

Man nennt diese Verbindungen auch „intermodalen Transfer“ zwischen den Darstellungsebenen. *GERSTER & SCHULTZ (2004, S. 387f)* sprechen anschaulich von drei verschiedenen „Sprachen“, zwischen denen übersetzt werden muss. Man sieht, dass sich diese Sicht auf das Operationsverständnis leicht in konkrete Anforderungen übersetzen lässt – man kann testen, ob jemand in der Lage ist, zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen hin und her zu übersetzen.

Die Auffassung des Operationsverständnisses als Fähigkeit zum Wechsel zwischen den Modalitäten verbleibt auf einer eher technischen Ebene. Ob jemand tatsächlich verstanden hat, was Multiplizieren bedeutet, zeigt sich in der Fähigkeit zum intermodalen Transfer nur indirekt. Wir schlagen daher eine weniger technisch orientierte Sicht auf den Begriff des Operationsverständnisses vor. Es gilt zu verstehen, welche Frage(n) die Multiplikation an Zahlen, Mengen und Größen stellt und auf welche Weise die Multiplikation diese Fragen beantwortet.

Bei der Multiplikation 3 · 4 ist eine dieser Fragen zum Beispiel, wie viele Mengenelemente man insgesamt hat, wenn man drei Mengen mit jeweils vier Elementen zusammenfügt. Im Jenaer Rechentest (JRT) wird das Operationsverständnis der Multiplikation mit folgender Frage überprüft: „Stell dir vor, du bist der Lehrer und erklärst, was mit 3 · 4 = 12 gemeint ist. Erkläre das mit Hilfe der Würfel." Vor dem Probanden liegen dabei Würfel oder Plättchen, mit denen er arbeiten soll. Wer nicht verstanden hat, was die Multiplikation inhaltlich bedeutet, legt zur Erklärung der Bedeutung von 3 · 4 = 12 vielleicht etwas wie:

Falls keine Mengenhandlung mit den Würfeln erfolgt, wird weitergefragt: „Kannst du eine Rechengeschichte erzählen, die zur Aufgabe 3 · 4 = 12 passt?" Hier zeigt sich zum einen, ob für den Teilnehmer/die Teilnehmerin mit der Multiplikation außerhalb der Zahlebene eine inhaltliche Vorstellung verknüpft ist. Zum anderen wird deutlich, ob es diesen Teilnehmern/Teilnehmerinnen möglich ist, multiplikative Situationen, die ihnen in ihrer Umwelt begegnen, mit Hilfe der Mathematik zu modellieren.

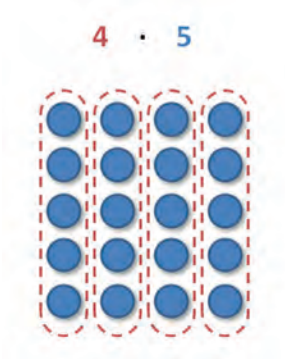
Was bedeutet „Malrechnen" für die Teilnehmer/-innen, wenn sie die Multiplikation nicht im oben erläuterten Sinne verstehen? Vielleicht ist es für manche der Teilnehmer/-innen eine besondere Art zu zählen, bei der man manche Zahlen auslassen muss. 4 · 5 ist für diese Teilnehmer/-innen dann die Aufforderung, beim Zählen nur jede fünfte Zahl laut zu nennen. Die vierte Zahl, die sie laut genannt haben, ist das Ergebnis von 4 · 5. Manche der Teilnehmer/-innen werden mit dem Multiplizieren vor allem das Auswendiglernen der Zahlreihen des kleinen Einmaleins verbinden. Viele werden diese Reihen in der Schule auswendig gelernt haben – oder es zumindest versucht haben – ohne zu verstehen, was es damit auf sich hat. Ohne ein inhaltliches Verständnis werden diese Zahlwortketten allerdings auch schnell wieder in Vergessenheit geraten sein.

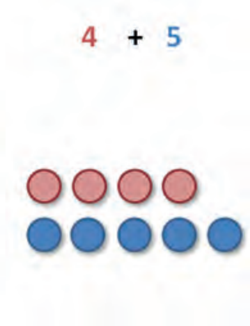
Das erste Ziel der Auseinandersetzung mit der Multiplikation im Kurs muss es daher sein, bei den Teilnehmern/Teilnehmerinnen ein adäquates Operationsverständnis aufzubauen.

4. Die wiederholte Addition als grundlegendes Operationsverständnis

Aus zwei Gründen liegt es nahe, den Zugang zur Multiplikation über die wiederholte Addition gleicher Summanden herzustellen. Zum einen haben die Teilnehmer/-innen die Addition als Vereinigung von Mengen kennengelernt. Die Interpretation der Multiplikation als wiederholte Addition knüpft an dieses Verständnis an, indem die Multiplikation auf der Mengenebene als Vereinigung mehrerer gleichmächtiger Mengen aufgefasst wird. Zum anderen bildet die Multiplikation als wiederholte Addition die Grundlage für das Verständnis der Zusammenhänge zwischen verschiedenen Multiplikationsaufgaben (siehe Seite 102 ff.).

Auf der Symbolebene ist die Multiplikation hier sozusagen eine verkürzte Schreibweise einer wiederholten Addition. Eine der Schwierigkeiten dabei ist, dass die Anforderungen beim konzeptuellen Verständnis der Multiplikation über das der Addition hinausgehen. Bei der Addition bewegen sich die Bedeutungen beider Summanden auf der gleichen Ebene. Beide beschreiben die Mächtigkeit einer Teilmenge. Dagegen sind die Bedeutungen von Multiplikand und Multiplikator auf unterschiedlichen Ebenen angesiedelt. Der Multiplikand beschreibt die Anzahl der einzelnen Elemente einer Teilmenge. Der Multiplikator hingegen „zählt" die Teilmengen. Er beschreibt also die Eigenschaft einer Menge von Mengen *(vgl. Gerster & Schultz 2004, S. 387)*.





Im Beispiel gibt der Multiplikand also an, dass es sich um Fünfer-Bündel handelt. Der Multiplikator gibt an, dass es *vier Fünfer* sind. Die vier ist also nicht als Anzahl von Einzelobjekten sichtbar, sondern entsteht sozusagen erst durch das Zusammendenken der Objekte in den Teilmengen zu neuen Einheiten. Die Teilnehmer/-innen müssen also auf der einen Seite in der Lage sein, einen Fünfer als *ein* Ding aufzufassen, das gezählt werden kann. Auf der anderen Seite müssen sie aber auch die Anzahlhaftigkeit der einzelnen Fünfer im Blick behalten. Dieser Zusammenhang ist für die Nutzung der Multiplikation in Sachkontexten relevant, hat sich vielen Teilnehmern/Teilnehmerinnen aber nie erschlossen, wenn ihr Mathematikunterricht die Multiplikation nur auf der Ebene der Malreihen betrieben hat.

Konzeptuell steht dieses Verständnis der Multiplikation dem Verständnis mehrstelliger Zahlen nahe: So wie die „4" als Multiplikator im Term $4 \cdot 5$ die Anzahl der Fünfer angibt, so steht auch die „4" in „43" für eine Anzahl von Teilmengen, nämlich für die vier Zehner, die in 43 enthalten sind. Dies ist der *multiplikative Aspekt des Stellenwertsystems*.

5. Strategien für die Multiplikation

Wir wissen nichts darüber, wie Erwachsene mit bSR die Multiplikation denken bzw. ausführen. Wir stellen deshalb hier dar, wie sich Strategien zum Multiplizieren bei Kindern entwickeln. Sie als Kursleiter müssen herausfinden, inwieweit es möglich ist, die Teilnehmer in dieser Entwicklungshierarchie zu verorten.

5.1 Zählgeführte Strategien

Gerster & Schultz (2004, S. 399) versammeln verschiedene Strategien, um Produkte wie $5 \cdot 4$ zählend zu bestimmen:

- **Modellieren und vollständiges Auszählen**
  Zunächst legt man fünfmal hintereinander vier Mengenelemente hin. Anschließend zählt man aus, wie viele Mengenelemente insgesamt vorhanden sind. Um den Überblick zu behalten, ist es dabei nützlich, die Mengenelemente in Portionen zu strukturieren, die dem Multiplikanden entsprechen. Dieses Vorgehen realisieren manche Kinder auch ohne konkret vorhandenes Material, indem sie sich die entsprechenden Mengenelemente im Kopf vorstellen. Der Merk- und Konzentrationsaufwand ist dabei allerdings enorm.

  Auf der einen Seite ist das Modellieren und vollständige Auszählen natürlich sehr aufwändig, da man jede Teilmenge zunächst einzeln und anschließend auch noch die entstandene Gesamtmenge zählen muss. Auf der anderen Seite zeigt sich in diesem Vorgehen aber zumindest ein adäquates Grundverständnis der Multiplikation als Vereinigung gleichmächtiger Mengen. Es müssen aber effektivere Strategien zur Ergebnisbestimmung erarbeitet werden.

- **Rhythmisches Zählen**
  Es wird die Zahlwortreihe bei eins beginnend aufgesagt, wobei das jeweils vierte Zahlwort betont wird: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, …, 17, 18, 19, 20“. Auch diese Methode erfordert hohe Konzentration, weil einerseits darauf geachtet werden muss, genau jedes vierte Zahlwort zu betonen, und andererseits mitgezählt werden muss, wie viele Zahlwörter man bereits betont gesprochen hat. Es laufen also zwei Zählprozesse parallel ab.

  Als Hilfe kann man dabei zum Beispiel beim Aufsagen der Zahlwortreihe jeweils vier Finger der linken Hand aufklappen und mit den Fingern der rechten Hand die Anzahl der Viererportionen festhalten.

- **Nutzen von Zahlenfolgen**
  Manche Kursteilnehmer/-innen werden vielleicht die Anfangsglieder einiger Einmaleins-Reihen auswendig können. Im Beispiel also: „4, 8, 12, 16, 20“. Um das Ergebnis von $5 \cdot 4$ zu bestimmen, muss man dabei den Überblick darüber behalten, wie viele Glieder der Einmaleins-Reihe man bereits genannt hat. Dies kann zum Beispiel wiederum durch das Aufklappen von Fingern geschehen.

- **Rückführung auf die Addition**
  Wer die Multiplikation als wiederholte Addition verstanden hat, kann die Aufgabe auch durch sukzessives Addieren der vier lösen: $4 + 4 = 8$; $8 + 4 = 12$; $12 + 4 = 16$; $16 + 4 = 20$. Das ist insofern ebenfalls eine Art Zählstrategie, als man ermitteln muss, wie oft man die vier bereits addiert hat. Eine besondere Schwierigkeit dabei ist, dass man beachten muss, dass man bei der ersten Addition ($4 + 4 = 8$) bereits zwei Vieren verwendet hat.

Schon bei Aufgaben des kleinen Einmaleins, wie zum Beispiel $6 \cdot 8$, bei denen größere Zahlen beteiligt sind, tragen diese Strategien nicht mehr, weil ihre Durchführung viel zu aufwändig wird. Es gilt daher, mit den Teilnehmern/Teilnehmerinnen zielführendere Strategien zu erarbeiten und gleichzeitig ihr Operationsverständnis der Multiplikation zu festigen.

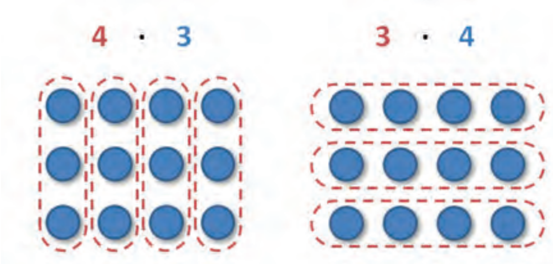
5.2 Mathematische Grundlagen nichtzählender Strategien für die Multiplikation

Nichtzählende Rechenstrategien für die Multiplikation beruhen grundlegend auf dem Verständnis der Multiplikation als wiederholte Addition bzw. auf der Zusammensetzung eines Ganzen aus mehreren gleich großen Teilmengen. Darüber hinaus sind das Kommutativ- und das Distributivgesetz von zentraler Bedeutung. Sie werden im Weiteren dazu dienen, Ableitungsstrategien an die Stelle eines Auswendiglernens des Einmaleins zu setzen.
Wenn die Rechengesetze hier in Form von Gleichungen mit Variablen dargestellt wurden, bedeutet das natürlich nicht, dass sie in dieser Form im Kurs thematisiert werden sollen. Es geht für die Teilnehmer/-innen darum, die Rechengesetze anwenden zu können und sich ihre Gültigkeit anschaulich klar zu machen.

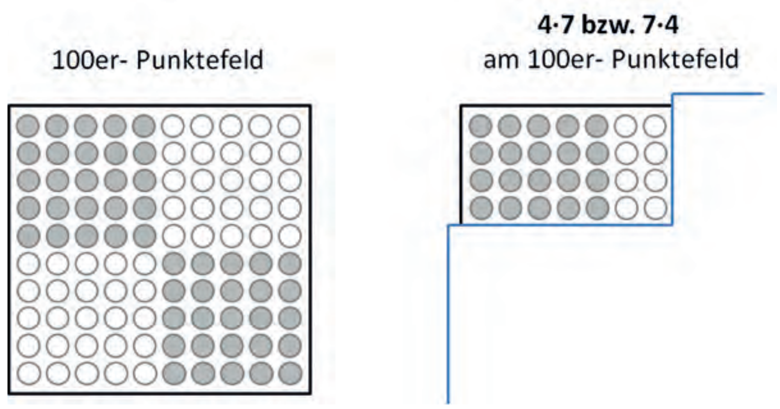
Kommutativgesetz

Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a \cdot b = b \cdot a$.
Bei der Addition ist die Gültigkeit des Kommutativgesetzes unmittelbar einsichtig, wenn man sich die Situation auf der Mengenebene klar macht. Beide Summanden sind im Prinzip gleichwertig. Die Gültigkeit des Kommutativgesetzes der Multiplikation ist dagegen keineswegs selbstverständlich. Vier Packungen mit je drei Äpfeln sind etwas anderes als drei Packungen mit je vier Äpfeln. Es bedarf einiger Überlegungen, eine schlüssige Begründung dafür zu finden, dass die Gesamtanzahl dennoch gleich ist. Zum Beispiel könnte man sich überlegen, dass man aus jeder der vier Packungen einen Apfel herausnehmen und auf eine Schale legen könnte. Auf diese Weise kann man drei Schalen mit je vier Äpfeln füllen. Man hat dann also drei Mengen mit je vier Äpfeln.

Eine anschaulichere Möglichkeit, die Gültigkeit des Kommutativgesetzes zu begründen, ist die Darstellung an einem Punktefeld:



Je nachdem, wie man auf das Punktefeld schaut, sind hier vier Spalten mit je drei Punkten oder drei Reihen mit je vier Punkten dargestellt. Die Gesamtanzahl der Punkte verändert sich dabei offensichtlich nicht. Das Prinzip lässt sich auf beliebige Faktoren übertragen. Zur Veranschaulichung unterschiedlicher Beispiele eignet sich insbesondere das sogenannte 100er-Punktefeld. Auf diesem Feld kann man mit einem Abdeckwinkel alle Aufgaben des kleinen Einmaleins auf der Mengenebne veranschaulichen.



Durch die Anwendung des Kommutativgesetzes lässt sich der Rechenaufwand mitunter deutlich reduzieren. $8 \cdot 2$ ist gedacht als $2 \cdot 8 = 8 + 8$ wesentlich einfacher zu berechnen als $2 + 2 + \ldots + 2$. Auch können neue Aufgaben auf bereits bekannte zurückgeführt werden. Wer zum Beispiel das Ergebnis von $9 \cdot 4$ kennt, der kennt auch das Ergebnis von $4 \cdot 9$. Damit reduziert sich die Anzahl der Aufgaben des kleinen Einmaleins, die auswendig gelernt werden müssen, auf fast die Hälfte.

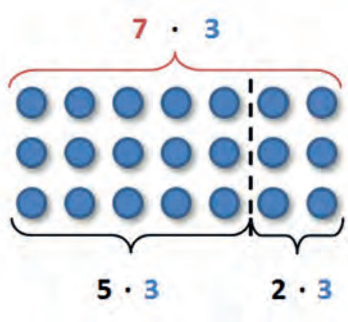
Distributivgesetz
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + a \cdot c$
$(a - b) \cdot c = a \cdot c - a \cdot c$

Aufgrund des Distributivgesetzes lassen sich schwierige Aufgaben in leichtere Teilaufgaben aufspalten, indem einer der Faktoren zerlegt wird. So lässt sich zum Beispiel $7 \cdot 4$ zurückführen auf die Teilaufgaben $5 \cdot 4$ und $2 \cdot 4$:

- $7 \cdot 4 = (5 + 2) \cdot 4 = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2$.

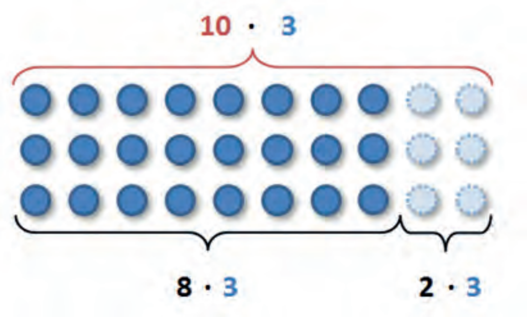
Analog lassen sich auch Multiplikationen mit mehrstelligen Faktoren auf einfachere Teilrechnungen zurückführen. Zum Beispiel lässt sich $256 \cdot 8$ zerlegen in $200 \cdot 8$, $50 \cdot 8$ und $6 \cdot 8$.

Die Gültigkeit des Distributivgesetzes wird unmittelbar einsichtig, wenn man es an einem Punktefeld veranschaulicht, also auf die Mengenebene zurückführt.



Die insgesamt 7 · 3 Punkte können zerlegt werden in Teilmengen von 5 · 3 und 2 · 3 Punkten. Die Gesamtzahl der Punkte bleibt dabei gleich.

Für das Distributivgesetz der Subtraktion ist eine dynamische Sichtweise erforderlich. Hat man zum Beispiel 10 · 3 Punkte und nimmt von diesen 2 · 3 Punkte weg, so bleiben 8 · 3 Punkte übrig. 8 · 3 ist also das Gleiche wie 10 · 3 – 2 · 3.



Auch bei der anschaulichen Begründung des Distributivgesetzes hängt die grundsätzliche Idee nicht an den konkreten Zahlenbeispielen. Sie lässt sich auf beliebige Beispiele verallgemeinern.

6. Wege zur Beherrschung des kleinen Einmaleins

Als das kleine Einmaleins werden die Multiplikationsaufgaben bezeichnet, bei denen beide Faktoren zwischen null und zehn liegen. Das kleine Einmaleins umfasst daher 121 Aufgaben.

Padberg & Benz (2011, S. 138f) unterscheiden idealtypisch zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen zur Erarbeitung des kleinen Einmaleins. Der lange Zeit übliche „traditionelle“ Weg war es, die einzelnen Einmaleins-Reihen isoliert durchzunehmen und diese auswendig zu lernen. Diese Praxis werden auch die Kursteilnehmer/-innen in der Regel in ihrer Grundschulzeit erlebt haben – und sind daran gescheitert.

Demgegenüber wird seit den 90er Jahren in der Fachdidaktik ein „ganzheitlicher“ Zugang zum Einmaleins propagiert. Bei diesem Zugang wird im Prinzip sofort das gesamte Einmaleins in den Blick genommen, um die Verbindungen zwischen den Reihen für die Automatisierung nutzen zu können und die universelle Anwendbarkeit der Rechenstrategien und die Parallelen bei der Erarbeitung der Reihen herauszustellen. Diesem Ansatz folgt auch diese Handreichung.

6.1 Ableiten aus bereits bekannten Aufgaben als Grundidee

Wir gehen davon aus, dass eine Speicherung von neuem Wissen im Langzeitgedächtnis besser möglich ist, wenn es an bereits vorhandenes Wissen anknüpfen kann. Für einen Zahlensatz des kleinen Einmaleins bedeutet das, dass er besser im Langzeitgedächtnis gespeichert wird, wenn ihm zum Beispiel über die Verbindung zu anderen, bereits gespeicherten Aufgaben eine Bedeutung beigemessen wird *(vgl. Gerster & Schultz 2004, S. 373)*. Diese Grundsätze greift ein ganzheitlicher Zugang zum Einmaleins einerseits durch die bewusste Anwendung der oben erläuterten Rechenstrategien und andererseits durch das Aufdecken der gemeinsamen Struktur aller Malreihen auf.

Von besonderer Bedeutung sind dabei die sogenannten „Kernaufgaben“ bzw. „kurzen Reihen“ *(Müller & Wittmann 1994, S. 188)*: $1 \cdot x$, $2 \cdot x$, $5 \cdot x$ und $10 \cdot x$. Die Kernaufgaben der 7er-Reihe bzw. die kurze Reihe der 7 ist also $1 \cdot 7 = 7$, $2 \cdot 7 = 14$, $5 \cdot 7 = 35$ und $10 \cdot 7 = 70$. Die Ergebnisse dieser Aufgaben sind zum einen besonders leicht zu merken, weil sich die Ergebnisse von $2 \cdot x$ und $5 \cdot x$ aus der Verdopplung bzw. Halbierung der einfachen Aufgaben $1 \cdot x$ und $10 \cdot x$ ableiten lassen. Zum anderen lassen sich die Ergebnisse aller weiteren Aufgaben des kleinen Einmaleins aus Kombinationen der Kernaufgaben ableiten. So lassen sich zum Beispiel alle Ergebnisse der 7er-Reihe folgendermaßen aus den Kernaufgaben bestimmen:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 7 &= 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 \\
4 \cdot 7 &= 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7 \\
6 \cdot 7 &= 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7 \\
7 \cdot 7 &= 5 \cdot 7 + 2 \cdot 7 \\
8 \cdot 7 &= 10 \cdot 7 - 2 \cdot 7 \\
9 \cdot 7 &= 10 \cdot 7 - 1 \cdot 7
\end{aligned}$$

Entsprechend lassen sich auch die Ergebnisse der anderen Reihen des kleinen Einmaleins aus deren Kernaufgaben ableiten. Neben der sichere Abrufbarkeit der Kernaufgaben und des distributiven Zusammenhangs ist dabei Sicherheit beim Addieren und Subtrahieren von Zahlen im Zahlraum bis 100 notwendig. Wenn es den Teilnehmern/Teilnehmerinnen noch schwer fällt, Aufgaben wie 35 + 7 oder 70 – 14 zu lösen, können sie zwar die Zusammenhänge zwischen den Malaufgaben und die Grundidee des Ableitens aus den Kernaufgaben verstehen, eine Automatisierung der abgeleiteten Aufgaben ist dann allerdings nicht zu erwarten.

In diesem Kurs geht es nicht darum, dass die Teilnehmer/-innen das kleine Einmaleins vollständig auswendig können – wir rechnen aber mit einer gewissen Motivation, „das jetzt endlich mal zu können“. Sie sollen lediglich die Ergebnisse der Kernaufgaben des kleinen Einmaleins gedächtnismäßig verfügbar haben und in der Lage sein, die Ergebnisse der restlichen Aufgaben des kleinen Einmaleins aus den Kernaufgaben im Kopf abzuleiten.

Neben den Kernaufgaben der kurzen Reihen sind erfahrungsgemäß auch die Quadratzahlen relativ leicht zu merken. Wie alle bereits auswendig gewussten Ergebnisse können auch diese als Stützpunkte für das Ableiten von Ergebnissen dienen, die noch nicht auswendig verfügbar sind. Je mehr Zahlensätze des Einmaleins die Teilnehmer/-innen bereits verfügbar haben, über desto mehr Stützpunktaufgaben verfügen sie.

6.2 Ein Vorschlag zur Ausgestaltung des Lernweges zum kleinen Einmaleins

In Anlehnung an *Gerster & Schultz (2004, S. 402–404)* wird im Folgenden ein Weg zur konkreten Ausgestaltung des Lernweges zur Erarbeitung des kleinen Einmaleins aufgezeigt, der die obigen Überlegungen systematisiert.

Veranschaulicht man sich die Aufgaben des kleinen Einmaleins in einer Tabelle, wird deutlich, dass sich die Anzahl der noch zu lernenden Aufgaben auf eine überschaubare Anzahl reduziert, wenn man die Kernaufgaben und deren „Tauschaufgaben“ (grün) bereits beherrscht.

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	1·10
2	2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6	2·7	2·8	2·9	2·10
3	3·1	3·2	3·3	3·4	3·5	3·6	3·7	3·8	3·9	3·10
4	4·1	4·2	4·3	4·4	4·5	4·6	4·7	4·8	4·9	4·10
5	5·1	5·2	5·3	5·4	5·5	5·6	5·7	5·8	5·9	5·10
6	6·1	6·2	6·3	6·4	6·5	6·6	6·7	6·8	6·9	6·10
7	7·1	7·2	7·3	7·4	7·5	7·6	7·7	7·8	7·9	7·10
8	8·1	8·2	8·3	8·4	8·5	8·6	8·7	8·8	8·9	8·10
9	9·1	9·2	9·3	9·4	9·5	9·6	9·7	9·8	9·9	9·10
10	10·1	10·2	10·3	10·4	10·5	10·6	10·7	10·8	10·9	10·10

Mit den Quadratzahlen (blau) verringert sich diese Anzahl noch weiter. Die übrigen Aufgaben lassen sich aus den Kernaufgaben durch die Nutzung von Nachbarschaftsbeziehungen (Distributivgesetz) und Verdopplungen ableiten.

Bei der Erarbeitung der Ableitungsstrategien ist es sinnvoll, sich zunächst innerhalb einer Reihe zu bewegen und diese Ideen erst dann auf andere Reihen zu übertragen. Dabei sollte in jeder Reihe zuerst die kurze Reihe beherrscht werden, um die nötigen Stützpunktaufgaben zur Verfügung zu haben. Bereits bei der Erarbeitung der kurzen Reihen ist es zweckmäßig, die Verbindungen zwischen den Aufgaben zu nutzen: $5 \cdot x$ ist die Hälfte von $10 \cdot x$ und $2 \cdot x$ ist das Doppelte von $1 \cdot x$.

Die Erarbeitung der weiteren Aufgaben sollte dann zunächst stets explizit an die Aufgaben der kurzen Reihe angekoppelt werden, zum Beispiel in Aufgabenserien wie der folgenden:

$1 \cdot 7 =$	Oder:	$10 \cdot 7 =$
$2 \cdot 7 =$		$5 \cdot 7 =$
$4 \cdot 7 =$		$6 \cdot 7 =$

Diese Erarbeitung der Ableitungsstrategien sollte natürlich nicht auf einer rein verbal-symbolischen Ebene erfolgen. Die Teilnehmer/-innen müssen die Zusammenhänge auf der Mengenebene verstehen und diese mit der symbolischen Ebene verknüpfen. Dazu kann man wie oben beschrieben zum Beispiel auf Darstellungen an Punktefeldern zurückgreifen oder mit Steckwürfeln entsprechende Stangen zusammenstecken. Die Mengenhandlungen und die angeschlossenen Fragen zur oben beschriebenen Aufgabenserie könnten dann wie folgt aussehen: Nimm zehn 7er-Stangen. Wie viele Steckwürfel sind es insgesamt? Wie viele Stangen muss man wegnehmen, damit es nur noch fünf 7er-Stangen sind? Wie viele Steckwürfel sind es jetzt noch insgesamt? Wie hängt die übrig gebliebene Menge mit der zuvor vorhandenen zusammen? Wie viele Stangen muss man jetzt noch wegnehmen, damit nur noch $4 \cdot 7$ Steckwürfel übrig bleiben? Wie viele Steckwürfel weniger sind es jetzt? Wie viele sind noch übrig?

Durch diese Anbindung an die Mengenebene kann man auch einem häufig zu beobachtenden Verständnisproblem entgegenwirken. Beim beschriebenen Übergang von $5 \cdot 7$ zu $4 \cdot 7$ sind sich erfahrungsgemäß viele Lernende unsicher, ob sie von den 35 nun einmal vier oder einmal sieben abziehen müssen. Wer auf der Mengenebene verstanden hat, was hier geschieht, der bewältigt dieses Problem.

Um die Leitgedanken des hier aufgezeigten Lernweges noch einmal zusammenfassend zu skizzieren: Es geht in einem ersten Zugriff darum, eine Grundvorstellung der Multiplikation als wiederholte Addition aufzubauen. Aufbauend auf dieser Grundvorstellung werden die Aufgaben des kleinen Einmaleins mit Hilfe verschiedener Strategien aus leicht zu erlernenden Kernaufgaben abgeleitet. Die Anwendung dieser Ableitungsstrategien soll einerseits dazu beitragen, dass die Ergebnisse des kleinen Einmaleins zunehmend automatisiert abgerufen werden können – auch wenn das Curriculum ausdrücklich nicht auf das Auswendigkönnen des gesamten Einmaleins rekurriert. Andererseits soll die reflektierte Verwendung der Ableitungen das Verständnis der Multiplikation als wiederholte Addition festigen, damit Sachprobleme als multiplikative erkannt werden können. Dazu ist es nötig, die Verbindung zwischen der verbal-symbolischen Ebene und der Mengenebene stets präsent zu halten.

Es erscheint uns wichtig, diesen Lernweg auch den Teilnehmern/Teilnehmerinnen transparent zu machen, denn für viele wird das Lernen des kleinen Einmaleins mit sehr negativen Erfahrungen verknüpft sein. Eltern von Kindern mit bSR berichten regelmäßig, dass sie unglaublich viel Zeit auf das Auswendiglernen des kleinen Einmaleins verwenden, ohne dass sich erkennbare Erfolge einstellen. Wenn dann doch einmal eine Reihe „sitzt“, so ist dieses Wissen nach kurzer Zeit scheinbar wieder verschüttet. Die obigen Überlegungen bieten eine plausible Erklärung, warum das so ist: Die Kinder sind nicht in der Lage, die auswendiggelernten „Zahlwortketten“ mit einem Sinn zu hinterlegen. Wenn eine Reihe dann eine Zeit lang nicht geübt wurde, gerät sie in Vergessenheit und kann wegen des fehlenden Verständnisses auch nicht neu erschlossen werden. Die Teilnehmer/-innen werden oftmals ähnliche Erfahrungen gemacht haben. Um ihnen die Angst vor einer Wiederholung dieser Erfahrungen zu nehmen, ist es hilfreich aufzuzeigen, dass ihr bisheriges Scheitern beim Erlernen des kleinen Einmaleins auch eine Folge einer falschen Lehr- bzw. Lernstrategie war.

6.3 Lernstrategien zur weiteren Festigung des kleinen Einmaleins

Nachdem die grundlegenden Ideen für die Erarbeitung des kleinen Einmaleins gemeinsam im Kurs thematisiert wurden, ist es sinnvoll, den Prozess der Routinisierung individuell zu gestalten. Dies kann zum Beispiel mit Hilfe einer Lernkartei geschehen. Je nach Ort im Lernprozess sollten die Karten dieser Kartei unterschiedlich gestaltet sein.

Zunächst geht es darum, die Kernaufgaben zu automatisieren. Dazu können die leichten Kernaufgaben $1 \cdot x$ und $10 \cdot x$ jeweils gemeinsam mit den anderen beiden Kernaufgaben auf eine Karteikarte geschrieben werden:

Vorderseite:	Rückseite:
$1 \cdot 7 =$ $2 \cdot 7 =$	$1 \cdot 7 = 7$ $2 \cdot 7 = 14$
$10 \cdot 7 =$ $5 \cdot 7 =$	$10 \cdot 7 = 70$ $5 \cdot 7 = 35$

Auf der Rückseite der Karteikärtchen sind dabei jeweils die Lösungen vermerkt.

Anschließend geht es darum, die Ableitungstechniken zu routinisieren. Dazu können die Aufgaben, die erschlossen werden sollen, zunächst gemeinsam mit den Kernaufgaben auf ein Kärtchen geschrieben werden. Dabei können ggf. auch unterschiedliche Kernaufgaben für eine Aufgabe verwendet werden:

Vorderseite:	Rückseite:
$2 \cdot 7 =$ $4 \cdot 7 =$	$2 \cdot 7 = 14$ $4 \cdot 7 = 28$
$5 \cdot 7 =$ $4 \cdot 7 =$	$5 \cdot 7 = 35$ $4 \cdot 7 = 28$

Zuletzt sollen die Aufgaben auch ohne den expliziten Hinweis auf eine geeignete Kernaufgabe gelöst werden. Auf der Vorderseite stehen daher nur noch die Aufgaben. Auf der Rückseite ist jeweils eine passende Kernaufgabe als Hinweis vermerkt. Hier dient die Rückseite also nicht der unmittelbaren Lösungskontrolle, sondern gibt nur einen Hinweis auf einen möglichen Weg, um die Lösung zu ermitteln.

Vorderseite:	Rückseite:
$4 \cdot 7 =$	$2 \cdot 7 = 14$ $5 \cdot 7 = 35$

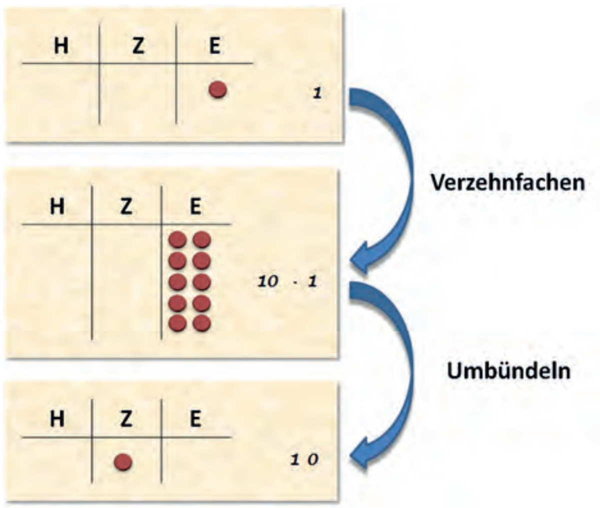
7. Multiplikation mehrstelliger Zahlen

7.1 Multiplikation mit Zehnerpotenzen

Im Dezimalsystem spielt die Multiplikation mit Zehnerpotenzen eine herausgehobene Rolle, weil sich die Multiplikation mehrstelliger Zahlen stets auf das kleine Einmaleins und die Multiplikation mit Zehnerpotenzen zurückführen lässt. So lässt sich eine Aufgabe wie zum Beispiel $8 \cdot 256$ zerlegen in die Teilrechnungen $8 \cdot 200$, $8 \cdot 50$ und $8 \cdot 6$. Die Berechnung dieser Teilergebnisse lässt sich wiederum auf das kleine Einmaleins und die Multiplikation mit Zehnerpotenzen zurückführen:
$8 \cdot 200 = (8 \cdot 2) \cdot 100$ und $8 \cdot 50 = (8 \cdot 5) \cdot 10$.

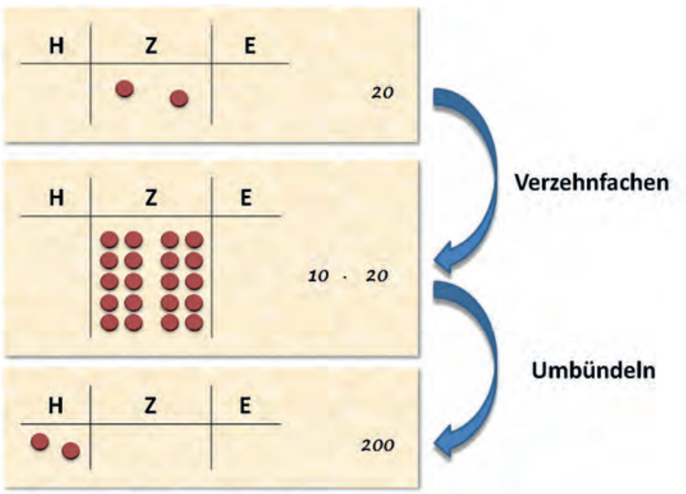
Auf der technischen Ebene ist die Multiplikation mit einer Zehnerpotenz besonders einfach durchzuführen. Das Ergebnis von $16 \cdot 100$ zum Beispiel werden wahrscheinlich auch viele der Teilnehmer richtig ermitteln können, indem sie an die 16 „einfach zwei Nullen anhängen". Es gilt dieses technische Wissen mit Verständnis zu unterfüttern: Aus welchem Grund reicht es bei der Multiplikation mit 100 aus, an den anderen Faktor „zwei Nullen anzuhängen" – und was bedeutet dieses Anhängen der Nullen?

Eine Möglichkeit, die Zusammenhänge klarzumachen, ist es, sich die Situation an einer Stellenwerttafel zu verdeutlichen. Hat man zum Beispiel einen Einer und verzehnfacht diesen, so kann man die dann vorhandenen Einer zu einem Zehner umbündeln.



Aus dem Einer ist dann sozusagen ein Zehner geworden. Auf der Ebene der Zahlnotation bedeutet es, dass man eine „0" an die „1" anhängen muss, um den Stellenwert der „1" von den Einern zu den Zehnern anzuheben.

Mit dem gleichen Grundgedanken kann man sich klarmachen, was geschieht, wenn man zum Beispiel eine beliebige Anzahl von Zehnern verzehnfacht: Aus jedem der verzehnfachten Zehner kann dann ein Hunderter gebündelt werden. Hat man zum Beispiel zwei Zehner und verzehnfacht diese, so kann man diese zu zwei Hundertern umbündeln. Auf der Ebene der Zahlsymbole wird an die „20" eine „0" angehängt, damit sich der Stellenwert der „2" entsprechend erhöht.



Analoge Überlegungen führen zu der Einsicht, warum man bei einer Multiplikation mit 100 zwei Nullen anhängen muss, warum man bei einer Multiplikation mit 1000 drei Nullen anhängen muss usw.

7.2 Strategien zur Multiplikation mehrstelliger Zahlen

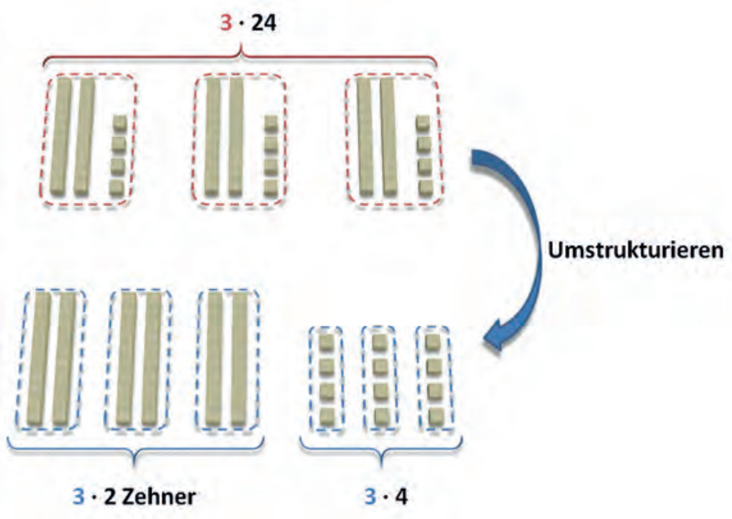
Aus den obigen Überlegungen ergeben sich verschiedene Möglichkeiten zur Multiplikation mehrstelliger Zahlen. Aufgrund der universellen Anwendbarkeit kommt der Strategie der Zerlegung eines Faktors in seine Stellenwerte dabei eine besondere Bedeutung zu.

Zerlegung eines Faktors in seine Stellenwerte

Aufgrund des Kommutativ- und Assoziativgesetzes und der Funktionsweise des Stellenwertsystems lassen sich Produkte mehrstelliger Zahlen auf das kleine Einmaleins und das Multiplizieren mit Zehnerpotenzen zurückführen, wie das folgende Beispiel verdeutlicht:

$$3 \cdot 24 = 3 \cdot (20 + 4) = 3 \cdot 20 + 3 \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot 10) + 3 \cdot 4 = (3 \cdot 2) \cdot 10 + 3 \cdot 4$$

Auf der Mengenebene wird unmittelbar einsichtig, warum man die Multiplikation in diese Teilrechnungen zerlegen kann: Man hat drei Portionen mit jeweils 24 Objekten, die man jeweils als zwei Zehner und drei Einer strukturieren kann. Insgesamt hat man also $3 \cdot 2$ Zehner und $3 \cdot 4$ Einer.



Dieses Vorgehen ist insofern von genereller Bedeutung, als sich beliebige Produkte, bei denen ein Faktor einstellig ist, auf diese Weise berechnen lassen. Es greift die Idee der Zerlegung eines Produkts in mehrere leichter zu berechnende Teilprodukte auf, die bereits bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins mit Hilfe der Kernaufgaben verwendet wurde.

In der Regel wird es nicht möglich sein, innerhalb des Kurses 2 zu erreichen, dass die Teilnehmer/-innen Produkte mit einem mehrstelligen Faktor im Kopf ausrechnen können. Zum einen ist für die Teilrechnungen eine sichere Abrufbarkeit des kleinen Einmaleins notwendig. Schon das wird innerhalb der begrenzten Zeit des Kurses nur in Ansätzen zu erreichen sein. Zum anderen müssen die Teilprodukte auch noch addiert werden. Inwieweit die Teilnehmer/-innen solche Rechnungen im Kopf ausführen können, wird auch davon abhängen, wie eingehend sie sich zuvor mit der Addition mehrstelliger Zahlen beschäftigt haben.

Was die Teilnehmer/-innen aber mit ihren Vorkenntnissen erreichen können, ist die Fähigkeit, solche Produkte im Sinne eines „gestützten Kopfrechnens" zu berechnen. Dazu können zum Beispiel die einzelnen Teilrechnungen komplett oder auch nur die Zwischenergebnisse notiert werden. Mit dieser Stütze müssen die Teilergebnisse nicht im Kopf behalten werden, so dass sich die Teilnehmer/-innen ganz auf die nötigen Teilrechnungen konzentrieren können. Auf diese Weise reicht es dann auch aus, wenn die Teilnehmer/-innen die für die Teilrechnungen nötigen Ergebnisse des kleinen Einmaleins sicher aus den Kernaufgaben ableiten können. Auch die Addition der Zwischenergebnisse ist deutlich einfacher, wenn man sie vor Augen hat, als wenn man sie sich lediglich im Kopf merkt.

Die Fähigkeit zum gestützten Kopfrechnen dient hier nicht so sehr zur Schaffung einer Unabhängigkeit vom Taschenrechner. Sie dient eher einer Emanzipation gegenüber dem Rechner im Sinne von „Ich kann abschätzen, wo das Resultat liegen wird." und „Notfalls kriege ich es auch ohne Rechner raus".

Weitere Vorgehensweisen

Neben der Zerlegung in die Stellenwerte lassen sich auch andere Zerlegungen in leichtere Teilaufgaben finden. Welche Zerlegungen sich dabei anbieten, hängt sowohl von den jeweiligen Faktoren als auch vom individuellen Zahlbeziehungswissen ab. So lässt sich eine Aufgabe wie $8 \cdot 26$ zum Beispiel auch folgendermaßen lösen:

- $10 \cdot 26 = 260$ und $2 \cdot 26$ ist 52. Also ist $8 \cdot 26 = 260 - 52$
- $8 \cdot 25 = 200$. Also ist $8 \cdot 26 = 200 + 8$
- $2 \cdot 26 = 52$; $2 \cdot 52 = 104$ und $2 \cdot 104 = 208$. Also ist $8 \cdot 26 = 208$.
- $8 \cdot 26$ ist genau so viel wie $4 \cdot 52$. $4 \cdot 50 = 200$ und $4 \cdot 2 = 8$. Also ist $8 \cdot 26 = 208$.

All diesen Vorgehensweisen ist gemein, dass für ihre Anwendung ein gewisses Zahlbeziehungswissen und zum Teil ein Repertoire an auswendig abrufbaren Zahlensätzen nötig ist. Man spricht hier auch vom „Zahlenblick". Inwieweit Sie auch solche Strategien im Kurs thematisieren wollen, sollten Sie wiederum von der Motivationslage Ihrer Teilnehmer/-innen abhängig machen. Unbedingt notwendig ist die Auseinandersetzung damit nicht, sie kann aber durchaus zu einem vertieften Verständnis der Multiplikation und der Förderung der Kopfrechenfähigkeiten beitragen.

Division

1. Lernziele

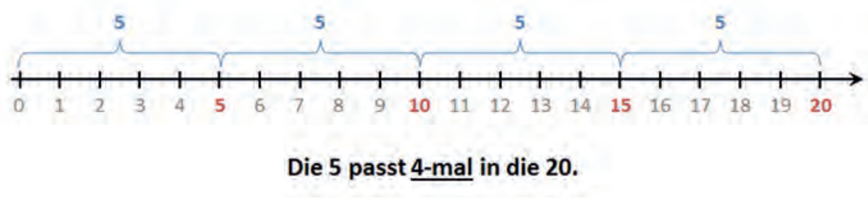
- Die Teilnehmer/-innen verstehen die Division sowohl im Sinne des Aufteilens als auch im Sinne des Verteilens.
- Die Teilnehmer/-innen verstehen den Zusammenhang zwischen Multiplikation und Divisionen.
- Die Teilnehmer/-innen können die Ergebnisse des kleinen Einsdurcheins aus dem Zusammenhang zum kleinen Einmaleins oder durch Bezüge zu bekannten Kernaufgaben bestimmen.
- Die Teilnehmer/-innen kennen ausgewählte Teilungen der 100 und nutzen diese zur Orientierung im Zahlraum. Sie können diese Strukturen entsprechend auf größere Zahlräume übertragen.

2. Operationslogiken der Division

Der Division können im Wesentlichen zwei Situationstypen zugrunde liegen: das Aufteilen und das Verteilen. Bis vor nicht allzu langer Zeit gab es für diese beiden Situationstypen sogar unterschiedliche Rechenzeichen. Das Aufteilen wurde durch ein „a ÷ b“ symbolisiert. Dieses Zeichen ist bei uns heute nur noch auf dem Taschenrechner üblich. Das Verteilen wurde durch einen Doppelpunkt symbolisiert „a : b“. Diese Darstellung ist heute in Deutschland üblich, um die Divisionen zu symbolisieren.

2.1 Aufteilen

20 : 5 kann verstanden werden als die Frage danach, in wie viele *Teilportionen mit je fünf Elementen* eine Menge mit 20 Elementen zerlegt werden kann. Werden zum Beispiel beim Training einer Mannschaft Fünfergruppen gebildet: Wie viele Gruppen entstehen dann, wenn es insgesamt 20 Spieler gibt? Allgemein wird also eine gegebene Menge in Teilmengen gleicher Größe aufgeteilt. Die Größe der Teilmengen ist vorgegeben. Die Frage ist, wie viele Teilmengen entstehen. Dabei kann natürlich auch die Situation vorkommen, dass sich die Menge nicht restlos aufteilen lässt, so dass nach dem Aufteilprozess einige Elemente übrig bleiben.



Man kann die Frage, die das Aufteilen stellt, auch so formulieren: Wie oft kann man jeweils fünf von 20 wegnehmen? Oder auch: Wie oft ist die fünf in der 20 enthalten?

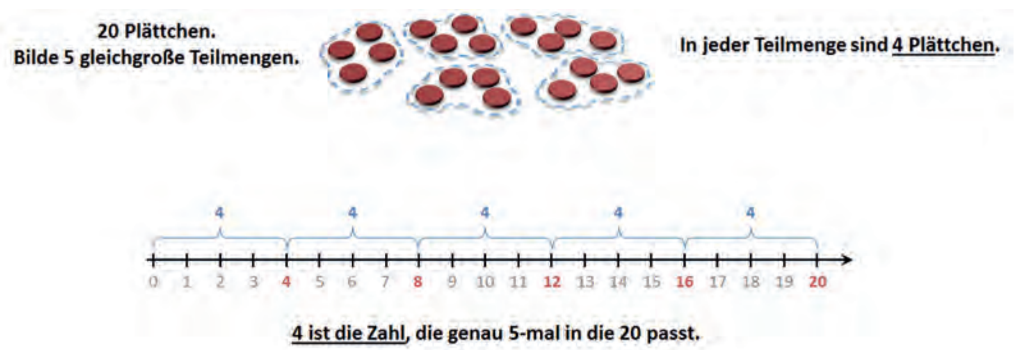
Die erste Formulierung verweist auf eine subtraktive Sicht auf das Aufteilen. Es werden sukzessive je fünf Elemente von den 20 weggenommen, bis keine Fünfer-Portionen mehr gebildet werden können. Diese subtraktive Sicht erschließt auch die Bedeutung des Minuszeichens zwischen den Divisionspunkten bei der Symbolisierung des Aufteilens mit Hilfe des früher üblichen Zeichens ÷ *(vgl. Gerster & Schultz 2004, S. 396)*.

Die zweite Formulierung verweist dagegen auf eine eher additive Sicht: Es werden so lange Fünfer zusammengefügt, bis die 20 erreicht ist. Mit dieser Sicht wird auch die enge Verbindung zwischen Division und Multiplikation deutlich, denn man kann das oben gestellte Problem der Aufteilung der 20 in Teilmengen zu je fünf auch multiplikativ formulieren: $\_\_ \cdot 5 = 20$.

Beim Umgang mit Größen ist der Prozess des Messens im Prinzip ein Aufteilproblem. Bei der Längenmessung mit einem Zollstock zum Beispiel fragt man – grob gesprochen – wie oft das Standardmaß 1 cm in das zu messende Objekt passt.

2.2 Verteilen

20 : 5 kann auch verstanden werden als die Frage danach, wie groß die Teilportionen werden, wenn die 20 in *fünf gleich große Teile* zerlegt wird. Es sollen also zum Beispiel 20 € Gewinn an fünf Mitspieler oder 20 Bonbons an 5 Kinder verteilt werden. Wie viel Geld bekommt dann jeder? Allgemein wird also eine gegebene Menge in gleich große Teilmengen zerlegt. Die Anzahl der Teilmengen ist vorgegeben. Die Frage ist, wie groß jede der Teilmengen dann ist.



Ebenso wie beim Aufteilen kann auch beim Verteilen das Problem auftreten, dass sich die Menge nicht komplett wie gefordert zerlegen lässt. Es kann dann nur ein Teil der gesamten Menge verteilt werden. Es bleibt also ein Rest übrig.

Anders formuliert stellt das Verteilen die Frage: Welche Anzahl kann man fünfmal von der 20 wegnehmen (so dass möglichst wenig übrig bleibt)? Oder auch: Welche Zahl ist genau fünfmal in der 20 enthalten?

Diese Formulierungen zeigen zum einen, dass der Zugriff über eine wiederholte Subtraktion bei einer Verteilsituation nicht so unmittelbar ist wie bei einer Aufteilsituation. Die wiederholte Subtraktion der fünf ist nur dann der Situation angemessen, wenn man dabei den Gedanken verfolgt, dass jede der Teilportionen sukzessive mit je genau einem Objekt aufgefüllt wird. Für jede „Runde" des Verteilens benötigt man dann genau fünf Elemente.

Zum anderen zeigt sich, dass die Verbindung zur Multiplikation hier einer anderen Logik folgt als beim Aufteilen. Wenn die Frage ist, welche Zahl fünfmal in der 20 enthalten ist, dann bedeutet das multiplikativ formuliert: $5 \cdot \_\_ = 20$. Aus der Logik der Situation heraus ergibt sich kein direkter Zugriff über die wiederholte Addition der fünf, denn es ist ja gerade gefragt, *welche* Zahl fünfmal addiert werden muss, damit man 20 erhält.

Auf der inhaltlichen Ebene stellen Aufteilen und Verteilen also verschiedene Fragen an Mengen oder Größen. Interpretiert man zum Beispiel 20 : 5 als die Frage danach, wie oft die fünf in der 20 enthalten ist (aufteilen), erhält man als Ergebnis *vier Mal*. Interpretiert man 20 : 5 als die Frage danach, welche Zahl fünfmal in der 20 enthalten ist (verteilen), so erhält man als Ergebnis *die vier*. Dennoch verwenden routinierte Rechner zur Lösung eines Divisionsproblems oftmals intuitiv die Sichtweise, die auf der Zahlenebene leichter zu lösen ist – unabhängig davon, ob es sich um ein Aufteil- oder Verteilproblem handelt. Das ist deshalb möglich, weil die aufteilende und die verteilende Sicht *auf der Zahlebene* das gleiche Ergebnis liefern. Die Antwort auf beide Fragen wird durch die Gleichung 20 : 5 = 4 erfasst.

Schon die Tatsache, dass es früher unterschiedliche Rechenzeichen für das Aufteilen und Verteilen gab, macht deutlich, dass es keineswegs unmittelbar einsichtig ist, warum dies für beliebige Divisionsprobleme der Fall ist. Manch ein Teilnehmer hat die Division deshalb nie verstanden, weil die Doppelgesichtigkeit der Division – völlig verschiedenen Problemstellungen wird dieselbe Gleichung zugeordnet – nie expliziert wurde.

2.3 Weitere Bedeutungen des Divisionszeichens

Eine Besonderheit des Divisionszeichens ist, dass es auch noch in anderen Kontexten verwendet wird. So werden zum Beispiel auch Verhältnisse mit diesem Zeichen dargestellt. Dabei gibt es aber keinen direkten Zusammenhang zum Aufteilen oder Verteilen. Werden bei einem Getränk zum Beispiel die Komponenten im Verhältnis 3 : 1 gemischt oder steht es in einem Fußballspiel 3 : 1, dann hat das nichts mit dem Aufteilen oder Verteilen von 3 Objekten zu tun.

Diese weiteren Bedeutungen des Divisionszeichens haben für die Arbeit im Kurs keine Bedeutung. Um Missverständnisse zu vermeiden, sollten sie aber angesprochen werden.

3. Strategien für die Divisionen

3.1 Zählgeführte Strategien

Die Zählstrategien der Division werden im Folgenden anhand der Aufgabe 14 : 3 erläutert, um auch den Fall eines Restes zu berücksichtigen. Dabei wird jeweils eine aufteilende Sicht eingenommen. Die Strategien lassen sich analog auf das Verteilen übertragen.

Modellieren und vollständiges Auszählen

Man zählt zunächst 14 Mengenelemente ab. Anschließend zählt man von diesen 14 Mengenelementen sukzessive drei ab. Um den Überblick zu behalten, ist es dabei hilfreich, die bereits gezählten jeweils auf separate Haufen zu legen. Dies setzt man fort, bis man keine weitere Dreier-Portion mehr erhalten kann. Anschließend zählt man die Anzahl der entstandenen Portionen und die übrigen Elemente ab.

Rhythmisches Zählen

Rückwärts: Ausgehend vom Dividenden wird die Zahlwortreihe rückwärts aufgesagt. Dabei wird jedes dritte Zahlwort betont: „14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1“. Ziel ist es also zu bestimmen, wie oft man die drei von der 14 abziehen kann.

Um aus diesem Zählprozess das Ergebnis zu ermitteln, muss man drei parallel ablaufende Zählprozesse gleichzeitig im Auge behalten. Erstens muss man die Zahlwortreihe rückwärts aufsagen, zweitens muss man darauf achten, genau jedes dritte Zahlwort zu betonen, und drittens muss man festhalten, wie viele Zahlwörter man bereits betont gesprochen hat.

Als Hilfe kann man dabei zum Beispiel beim Aufsagen der Zahlwortreihe jeweils drei Finger der linken Hand aufklappen und mit den Fingern der rechten Hand festhalten, wie viele Zahlwörter man bereits betont gesprochen hat.

Eine weitere Schwierigkeit entsteht bei der Ermittlung des Rests. Verbindet man das Zählen mit einer Mengenvorstellung, so ist klar, dass man nur noch zwei Elemente übrig hat, wenn man bei der drei angekommen ist. Bewegt man sich lediglich auf der Zahlwortreihe zurück, so ist nicht klar, ob man evtl. auch noch die Null mitzählen muss.

Vorwärts: Auf ähnliche Weise kann man auch vorgehen, wenn man die Zahlwortreihe vorwärts aufsagt. Dann werden entsprechend die Zählwörter bei eins beginnend in einem Dreier-Rhythmus aufgesagt: „1, 2, 3, 4, 5, 6, ,7 ,8, 9, 10, 11, 12, 13, 14“.

Ziel dieses Zählprozesses ist es zu ermitteln, wie oft die drei in die 14 passt. Die Schwierigkeiten sind ähnlich zu den oben beschriebenen. Allerdings kommt bei diesem Vorgehen zumindest nicht noch das Problem des Rückwärtszählens hinzu.

Zählen in Schritten

Vorwärts: Wenn man die Verbindung der Division zur Multiplikation verstanden hat, die Ergebnisse der Dreierreihe aber noch nicht beherrscht, kann man die Aufgabe auch lösen, indem man in Dreierschritten zählt und dabei mitzählt, wie viele Glieder der Zahlenfolge man bereits genannt hat: „3, 6, 9, 12“. Dieses Mitzählen kann wiederum durch Aufklappen von Fingern erfolgen.

Rückwärts: Ein solches Zählen in Schritten ist auch rückwärts möglich, allerdings kann man dabei nicht auf die vielleicht schon vertrauten Zahlen aus der Dreierreihe zurückgreifen: „11, 8, 5, 2.“

Rückführung auf die Subtraktion bzw. Addition
Wer die Division im Sinne einer wiederholten Subtraktion verstanden hat, kann die Aufgabe auch durch sukzessives Subtrahieren der drei lösen: 14 – 3 = 11; 11 – 3 = 8; 8 – 3 = 5; 5 – 3 = 2. Dieses Vorgehen ist insofern den Zählstrategien zuzuordnen, als zählend festgehalten werden muss, wie oft die drei subtrahiert wurde.

Mit Bezug auf die Verbindung zur Multiplikation kann man die Aufgabe auch lösen, indem man sukzessive drei addiert: 3 + 3 = 6; 6 + 3 = 9; 9 + 3 = 12 und 12 + 2 = 14. Dabei muss man wiederum beachten, dass man bei der ersten Rechnung bereits zwei Dreien addiert hat. Eine weitere Schwierigkeit ist, dass die Bedeutung der Zwei als Rest nicht unmittelbar klar wird.

Ähnlich wie bei der Multiplikation mögen diese Zähltechniken bei kleinen Dividenden noch praktikabel sein, bei größeren Zahlen hingegen versagen sie. Darüber hinaus ist durch die wiederholte Anwendung solcher Zähltechniken kein Fortschritt im Sinne einer zunehmend automatisierten Abrufbarkeit zu erwarten. Zum einen nimmt die Durchführung der Zählprozeduren viel Aufmerksamkeit in Anspruch, und zum anderen werden kaum Beziehungen zwischen verschiedenen Aufgaben geknüpft. Wie im Kapitel zur Multiplikation erläutert, ist aber gerade diese Einordnung in ein Beziehungsgeflecht von entscheidender Bedeutung für die Verankerung im Langzeitgedächtnis.

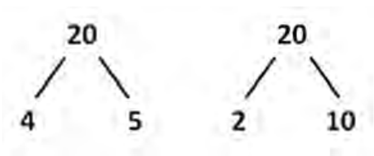
4. Wege zur Beherrschung des kleinen Einsdurcheins

Mit dem kleinen Einsdurcheins werden die 110 Aufgaben von 0 : 1 bis 100 : 10 bezeichnet. Um zu einer Beherrschung des kleinen Einsdurcheins zu gelangen, bieten sich im Wesentlichen zwei Wege an. Beide knüpfen an den Zusammenhang zwischen Division und Multiplikation an. Es geht dabei nicht um ein Entweder-Oder, sondern um ein ergänzendes Nebeneinander beider Wege.

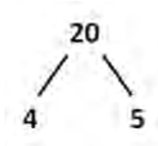
4.1 Kopplung des Einsdurcheins an das Einmaleins
Bereits bei der Darstellung der Operationslogiken der Division wurde der Zusammenhang zwischen Division und Multiplikation angedeutet. Dieser Zusammenhang wird nun weiter expliziert und für das Lernen des kleinen Einsdurcheins nutzbar gemacht.
Auf der Mengenebene entspricht die Division einer Zerlegung einer Menge in mehrere gleich mächtige Teilmengen.

Die entstandene Situation kann man sowohl unter dem Blickwinkel der Division als auch unter dem Blickwinkel der Multiplikation betrachten. In der Sicht als Division sind es 20 Mengenelemente, die auf vier Portionen verteilt wurden ($20:4 = 5$) bzw. 20 Elemente, die in Portionen zu je fünf aufgeteilt wurden ($20:5 = 4$). In der multiplikativen Sicht sind es viermal fünf Elemente, also insgesamt 20 ($4 \cdot 5 = 20$). (Das 20 Elemente sich auch aus fünfmal vier Elementen ($5 \cdot 4 = 20$) ergeben, erschließt sich aus der Situation in der Zeichnung nicht, sondern muss als mulitiplikativer Zusammenhang erarbeitet werden bzw. worden sein.)

Anschaulich gesprochen sind vier und fünf oder auch zwei und zehn „multiplikative Bausteine“ *(Gerster & Schultz 2004, S. 407)* der 20. In diese Bausteine kann die 20 aber auch wieder zerlegt werden. Dadurch ergibt sich, ähnlich wie bei der additiven Zahlzerlegung *(vgl. „Rechnen Basis 1“, S. 32ff)*, ein Zahlentripel:



Aus diesen multiplikativen Zahlentripeln ergeben sich jeweils vier Zusammenhänge:



$4 \cdot 5 = 20$
$5 \cdot 4 = 20$
$20 : 4 = 5$
$20 : 5 = 4$

Falls die Teilnehmer/-innen Teile des kleinen Einmaleins bereits beherrschen und diese Zusammenhänge verstanden haben, können sie daraus die entsprechenden Ergebnisse des kleinen Einsdurcheins ableiten. Dabei zeigt sich eine gewisse Analogie zur Erarbeitung des kleinen Einspluseins und Einsminuseins im Kurs 1, bei der die additive Zerlegbarkeit von Zahlen eine wichtige Rolle spielte *(vgl. ebenda)*.

4.2 Ableiten aus bereits bekannten Aufgaben

Für die Erarbeitung des kleinen Einmaleins war die Idee des Ableitens aus bereits bekannten Aufgaben von zentraler Bedeutung. Diese Idee kann auch für das kleine Einsdurcheins wieder aufgegriffen werden.

Aus der Umkehrung der Kernaufgaben des kleinen Einmaleins ergeben sich entsprechend der oben beschriebenen Idee der Zahlentripel Stützpunkte für das Ableiten von Divisionsaufgaben.

$1 \cdot 6 = 6 \dashrightarrow 6 : 6 = 1$
$2 \cdot 6 = 12 \dashrightarrow 12 : 6 = 2$
$5 \cdot 6 = 30 \dashrightarrow 30 : 6 = 5$
$10 \cdot 6 = 60 \dashrightarrow 60 : 6 = 10$

Aus diesen „Kernaufgaben der Division“ lassen sich alle weiteren Ergebnisse einer Reihe des kleinen Einsdurcheins ableiten, wie im Folgenden exemplarisch anhand der Division durch sechs verdeutlicht wird:

18 : 6	=	12 : 6	+	6 : 6
24 : 6	=	30 : 6	-	6 : 6
24 : 6	=	12 : 6	+	12 : 6
36 : 6	=	30 : 6	+	6 : 6
42 : 6	=	30 : 6	+	12 : 6
48 : 6	=	60 : 6	-	12 : 6
54 : 6	=	60 : 6	-	6 : 6

Zum Ergebnis der Aufgabe 42 : 6 kann man zum Beispiel durch folgende Überlegungen kommen: „30 : 6 ist 5. 42 ist um 12 mehr als 30. 12 : 6 ist 2. Also ist 42 : 6 gleich 7.“ Dieses Vorgehen ergibt sich relativ ungezwungen aus den Grundvorstellungen zur Division. Die vorhandenen Objekte werden sukzessive aufgeteilt bzw. verteilt.

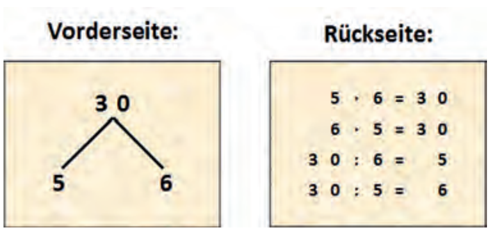
Die bekannte Aufgabe 30 : 6 kann aber auch als Ausgangspunkt für die Ermittlung des Ergebnisses von 24 : 6 dienen: „30 : 6 ist 5. 24 ist um sechs weniger als 30. Also ist 24 : 6 = 4.“ Dabei muss auf der Mengenebene sozusagen mit hypothetisch vorhandenen Objekten operiert werden: Wenn man 30 Objekte hätte, könnte man fünf Sechser-Portionen erstellen. Man hat aber tatsächlich sechs Objekte weniger zur Verfügung. Daher kann man auch nur vier Sechser-Portionen erstellen (aufteilen). Oder verteilend gedacht: Wenn man 30 Objekte hätte und diese an sechs Personen verteilt, dann bekäme jeder fünf. Man hat aber tatsächlich sechs Objekte weniger. Daher bekommt jeder nur vier.

Ein anderer Weg, sich das Ergebnis von 24 : 6 zu erschließen, könnte zum Beispiel über die Aufgabe 12 : 6 gehen: „12 : 6 ist zwei. 24 ist doppelt so viel wie 12. Also ist 24 : 6 auch doppelt so viel wie zwei, nämlich vier.“

4.3 Lernstrategien zur weiteren Festigung des kleinen Einsdurcheins

Zur Routinisierung der Ableitungsstrategien kann es auch beim kleinen Einsdurcheins sinnvoll sein, die Lernprozesse innerhalb des Kurses durch die Arbeit mit einer Lernkartei zu ergänzen.

Für die Thematisierung des Zusammenhangs zwischen Multiplikation und Division sind zum Beispiel Kartenvarianten möglich, bei denen auf der Vorderseite ein multiplikatives Zahlentripel steht, aus dem dann die entsprechenden Multiplikations- und Divisionsaufgaben abgeleitet werden sollen.



Die Automatisierung der Kernaufgaben der Division kann sowohl „operationsintern“ als auch über den Bezug zur Multiplikation erfolgen. Für die erste Variante können die Karten beispielsweise folgendermaßen gestaltet werden:

Vorderseite:	Rückseite:
6 : 6 = 12 : 6 =	6 : 6 = 1 12 : 6 = 2
60 : 6 = 30 : 6 =	60 : 6 = 10 30 : 6 = 5

Der Bezug zu den Kernaufgaben der Multiplikation kann hergestellt werden, indem auf die Vorderseite eine der Kernaufgaben der Division und auf die Rückseite die entsprechende Kernaufgabe der Multiplikation als Hinweis geschrieben werden:

Vorderseite:	Rückseite:
30 : 6 =	5 · 6 = 30

Die zweite Variante ist offensichtlich nur dann sinnvoll, wenn die entsprechenden Kernaufgaben der Multiplikation bereits sicher beherrscht werden.

Die Routinisierung der Ableitungstechniken kann ähnlich erfolgen wie bei der Multiplikation. Dazu werden die weiteren Divisionsaufgaben zunächst gemeinsam mit passenden Kernaufgaben auf eine Karteikarte geschrieben. Diese Kernaufgaben dienen dann als Stützpunktaufgaben für die Ableitung. Dabei können ggf. wiederum unterschiedliche Kernaufgaben als Stützpunkt dienen.

Vorderseite:	Rückseite:
30 : 6 = 24 : 6 =	30 : 6 = 5 24 : 6 = 4
12 : 6 = 24 : 6 =	12 : 6 = 2 24 : 6 = 4

Zuletzt sollen die Divisionsaufgaben ohne einen Hinweis auf geeignete Kernaufgaben gelöst werden. Auf der Vorderseite steht dann nur noch die zu lösende Divisionsaufgabe. Die Rückseite hat nur noch Hinweisfunktion. Auf ihr stehen passende Kernaufgaben, aus denen die Aufgabe auf der Vorderseite abgeleitet werden kann.

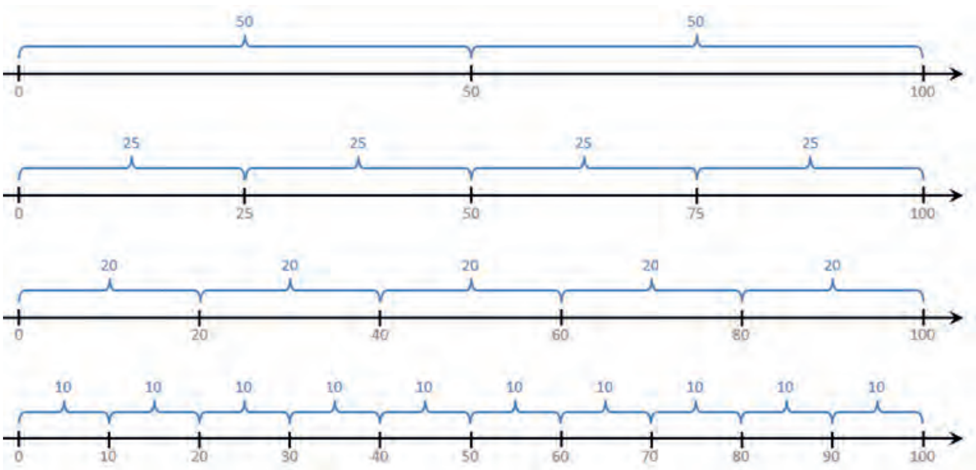
5. Kenntnis ausgewählter Teilungen der 100 und 1000 als Stütze für die Zahlraumorientierung

Im Hinblick auf die Zahlraumorientierung, aber auch für lebenspraktische Aspekte wie zum Beispiel den Umgang mit Geld, ist es hilfreich, manche Teilungen der 100 und 1000 abrufbereit zu haben.

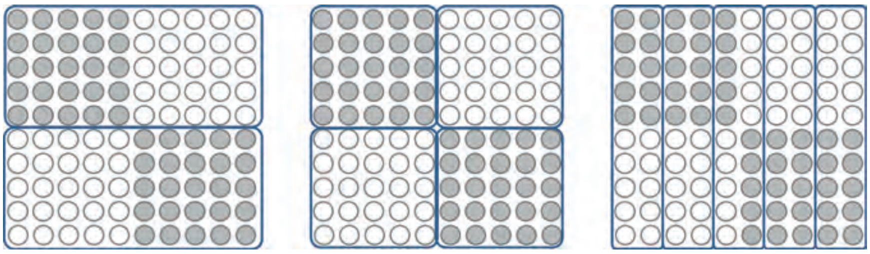
5.1 Zahlraumorientierung

Teilungen der 100

Hinsichtlich der Zahlraumorientierung bietet die Kenntnis der möglichen Teilungen der 100 über die 10er-Struktur hinaus eine weitere Orientierungshilfe. Hilfreich in dieser Hinsicht sind insbesondere die Zerlegungen eines Hunderters in 2, 4, 5 und eben in 10 Teile. Als Stütze für die Orientierung kann hier wiederum der Zahlenstrahl dienen …



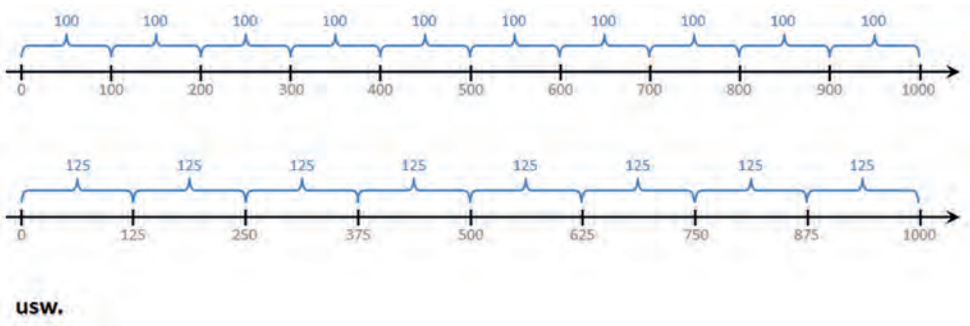
… oder das 100er-Punktefeld, auf dem die Beziehungen auf der Mengenebene deutlich werden.



Dieses Wissen um die gleichmäßige Zerlegbarkeit eines Hunderters lässt sich vielfach auch für die Strukturierung größerer Zahlen nutzen. Wenn man zum Beispiel weiß, dass ein Hunderter aus zwei Fünfzigern besteht, kann man sich daraus ableiten, dass in drei Hundertern dreimal so viele, also sechs Fünfziger enthalten sind.

Teilungen der 1000

Analog zum Hunderter kann auch ein Tausender in 2, 4, 5 oder 10 Teile eingeteilt werden. Als weiterer nützlicher Stützpunkt kommt hier noch die Einteilung in 8 Teile zu je 125 hinzu:



Die Strukturierungen des Hunderters und des Tausenders bieten aufgrund der überlagerten 1000er-Struktur des Dezimalsystems auch eine Stütze für die Orientierung in größeren Zahlräumen. So kann man zum Beispiel aus der Kenntnis, dass sich ein 100er in fünf Teile zu je 20 zerlegen lässt, ableiten, dass sich 100.000 in fünf Teile zu je 20.000 zerlegen lassen.

5.2 Umgang mit Geld

Auch hinsichtlich des Umgangs mit Geld ist die Kenntnis wichtiger Teilungen von 100 und 1000 von Bedeutung. Manche der Teilnehmer werden gerade deshalb in den Kurs gekommen sein, weil ihnen der Umgang mit dem monatlich verfügbaren Geld schwerfällt. Dies mag bei manchem auch der Tatsache geschuldet sein, dass er zum Beispiel bisher schlicht keine Vorstellung davon hatte, wie viel seine 400 € Miete oder seine 50 € Telefonkosten im Verhältnis zu den 1000 € sind, die er im Monat zur Verfügung hat.

Ein Problem dabei ist, dass man üblicherweise Beträge solcher Größenordnung nicht auf einmal vor Augen hat. Wenn man dann nicht über eine abstrakte Vorstellung der Größenordnung von Zahlen verfügt, hat man kaum eine Möglichkeit, sich klar zu machen, wie sich die einzelnen Ausgaben auf das verfügbare Budget auswirken. Im Kurs haben Sie die Gelegenheit, mit Hilfe von Rechengeld solche Beträge (be-)greifbar zu machen. Beträge wie 100 € oder 1000 € bilden dabei wichtige

Bezugspunkte. Auf diese Weise kann man sich zum Beispiel veranschaulichen, über wie viele 50er man verfügt, wenn man 1000 € hat, und wie viele dieser 50er bereits für die laufenden Kosten verwendet werden müssen. Das kann man an der Tafel oder auf einem Poster auch konkret mit Geldscheinen „legen". Ein anderes Beispiel wäre zu schauen, wie viele 20 €-Scheine einem 100 €-Schein entsprechen oder welche Stückelungen von 100 € noch möglich sind und welche Gegenwerte diesen 100 € entsprechen.

Solche Überlegungen sollten dabei auch an die Veranschaulichung am Zahlenstrahl angekoppelt werden, damit die Teilnehmer/-innen Gelegenheiten erhalten, die verschiedenen Darstellungsformen der Zahlen zu verknüpfen.

Literaturverzeichnis

FUSON, KAREN C. (1990):
Issues in Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction Learn-ing and Teaching. In: Journal for Research in Mathematics Education 21, S. 273–280.

GERSTER, HANS-DIETER; SCHULTZ, RITA (2004):
Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt „Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen". Hg. v. Pädagogische Hochschule Freiburg. Online verfügbar unter www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397/.

GRAY, EDDIE; PITTA DEMETRA; TALL, DAVID (2000):
Objects, Actions and Images: A Perspective on Early Number Development. In: Journal of Mathematics Behavior 18 (4), S. 401–413.

KLUGE, FRIEDRICH; SEEBOLD ELMAR (2002):
Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache. 24. Aufl. Berlin: De Gruyter.

LANDERL, KARIN; KAUFMANN, LIANE (2008):
Dyskalkulie. München: Ernst Reinhardt Verlag.

PROF. DR. MEYERHÖFER, WOLFRAM (2012):
Didaktik der Arithmetik 1–3, Teil 2. Addition/Subtraktion: Operationsverständnis und Routinisierung. Vorlesungsskript. Universität Paderborn.

PADBERG, FRIEDHELM (1994):
Schriftliche Subtraktion – Änderungen erforderlich! In: Mathematische Unterrichtspraxis 15 (2), S. 24–34.

PADBERG, FRIEDHELM; BENZ, CHRISTIANE (2011):
Didaktik der Arithmetik. 4. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

WITTMANN, ERICH CH.; MÜLLER GERHARD N. (1994):
Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1 – Vom Einspluseins zum Einmaleins. 2. Aufl.: Klett-Schulbuchverlag.

Stufe 3:

Dr. Thomas Jahnke
unter Mitarbeit von
Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer

Ziele und Prinzipien

1. Mathematische Bildung – Funktionalität in und für Lebenssituationen und Teilhabe an der menschlichen Kultur

Es liegt nahe, Menschen mit geringen mathematischen Kenntnissen nur oder vorrangig eine funktionale, lebenstaugliche Mathematik zu lehren. Eine solche Beschränkung nimmt sie aber in ihrer Bildsamkeit nicht ernst und spricht ihnen das Recht auf Bildung ab. Mathematische Bildung sollte stets und für alle Menschen in einer ausgewogenen Balance und Verbindung von Funktionalität in Lebenssituationen und persönlicher Teilhabe an der menschlichen Kultur (Enkulturation) sein. Lebensorientierung und Kulturorientierung mathematischer Bildung sollten nicht als sich ausschließende, kontradiktorische Pole, sondern als sich gegenseitig durchdringende und bereichernde Aspekte betrachtet werden. Mathematik als Weltzugang eigener Art, als Modus der Weltbegegnung ist untrennbar verbunden mit einer Mathematik in und für Lebenssituationen, die ohne ein Reflexionswissen über Mathematik und die Charakteristik ihres Denkens nur eine Anhäufung von unverbundenen Faustregeln darstellt und einem unverstandenen Formelgehorsam unterworfen ist.

2. Entscheiden und Urteilen

Ein Ziel des Kurses ist, die Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu befähigen, in mathematikhaltigen Situationen mit Rechnungen, mathematischen und außermathematischen Abwägungen und Argumenten zu sinnvollen, vernünftigen und für sie zufriedenstellenden Entscheidungen zu kommen. Dies betrifft zunächst ihren individuellen Lebensbereich, in dem zuweilen mathematische Aktivitäten erforderlich sind. Hier stehen die Bewältigung, Bearbeitung und Gestaltung von mathematikhaltigen Lebenssituationen im Vordergrund. Zumeist begegnet man aber Situationen, deren mathematischer Gehalt bereits bearbeitet ist, z. B. an der Supermarktkasse oder bei Miet-, Energie- oder Lohnabrechnungen. Hier geht es darum, dass man nachrechnen und beurteilen kann, ob die mathematische Bearbeitung richtig und der Sachsituation angemessen ist, dass man sie nachvollziehen, befragen und auch anzweifeln kann. Diese Urteilsfähigkeit ist ein zentraler Bestandteil einer alltagstauglichen mathematischen Bildung und sollte im Kurs angestrebt und systematisch entwickelt werden.

3. Abgrenzung von der Schulmathematik

Lernen von Mathematik wird im Kern mit schulischem Lernen von Mathematik in eins gesetzt, und es ist nicht einfach, sich von dieser Kopplung gedanklich, pädagogisch und inhaltlich zu lösen. Auch wenn viele Inhalte dieses Kurses sich mit solchen aus den Jahrgangsstufen 4 bis 7 überschneiden, ist eine klare Abgrenzung von der Schulmathematik und ihrer Ausrichtung erforderlich. Der Kurs verfolgt eine deutlich andere Zielsetzung. Während schulisches Lernen auf einem langfristigen, in Teilen redundanten und spiralig angelegten Curriculum beruht und auch ein Vorratslernen beinhaltet, ist das Lernen in diesem Kurs auf unmittelbarere Ziele gerichtet. Während

Schülerinnen und Schüler in der Einrichtung Schule nur langsam zunehmend die Verantwortung für ihr Lernen übernehmen, entscheiden Erwachsene von vornherein selbst, was und wie viel sie von dem angebotenen Stoff annehmen und aufnehmen. Nur ein solcher Angebotscharakter nimmt sie in ihrer Lebenssituation ernst und ermöglicht ihnen souveränes, selbstbestimmtes und selbsttätiges Lernen. Die Abgrenzung von der Schulmathematik sollte auch den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Kurses bewusst werden.

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer waren in der Schule in der Regel nicht affin zum Fach Mathematik. Ein wesentlicher Grund dafür lag in der technischen Orientierung des Mathematikunterrichts. Damit ist gemeint, dass das Abarbeiten von Techniken des Rechnens, des Umformens, der Bestimmung von Koeffizienten usw. im Zentrum steht. Viele Lehrerinnen und Lehrer glauben, dass „schlechte“ Schülerinnen und Schüler erst einmal Techniken üben müssten und dass nur die „Guten“ verstehen könnten, warum die Verfahren funktionieren. Man kann aber genau umgekehrt auf das Feld schauen: Die schwachen Schülerinnen und Schüler können (nur?) rechnen lernen, wenn sie verstehen, warum ein Verfahren funktioniert. Rechentechniken ohne Verständnis abarbeiten kann man hingegen nur bis zu einer bestimmten Komplexitätsstufe. Da die Verfahren im Verlauf der Schulzeit immer komplexer werden, bröckeln peu à peu immer mehr Schülerinnen und Schüler weg. Daraus ergibt sich für diesen Kurs folgende Orientierung:

Im Kursteil 3.1 treten formalisierte Rechentechniken nur auf, wenn sie von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern eingebracht werden oder wenn sie dabei helfen, die von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern eingebrachten Lösungswege vertiefend zu diskutieren. Im Kursteil 3.2 werden Rechentechniken nur vorsichtig formalisiert, soweit dies beim Verstehen hilfreich ist. Eine Mechanisierung von Rechentechniken wird nicht angestrebt. Wenn Techniken thematisiert werden, dann steht im Zentrum die Frage, wie sich diese Technik in die Lösungswege der Teilnehmerinnen und Teilnehmer einordnet und warum die Technik funktioniert. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern sollte möglichst bewusst werden, warum sie die Technik früher nicht verstanden haben bzw. nicht routinisieren konnten.

Schulmathematische Aufgabenstellungen folgen nicht nur oftmals dieser technischen Orientierung. Wenn sie *reale Probleme* in den Blick nehmen, dann verabsolutieren sie in der Regel in unbewusster und nicht hinterfragter Selbstverständlichkeit die mathematische Perspektive. Anwendungen in Textaufgaben dienen häufig vorrangig oder sogar ausschließlich dazu, die gelernten mathematischen Inhalte und Verfahren zu üben, und nicht dazu, sich mit der gestellten Frage oder Situation tatsächlich auseinanderzusetzen.

Mathematik kann nur mathematische Probleme lösen. Problem- und Lebenssituationen, Fragen, die sich im Leben stellen, können aber mathematikhaltig sein, mathematische Perspektiven enthalten. Mathematik kann dann dazu beitragen, sie zu bearbeiten, aber immer nur als ein Teil, als ein Ansatz, als ein Zugang von mehreren möglichen – der vielen Kursteilnehmerinnen und -teilnehmern bislang eher verschlossen war. Letztlich ist aber das Gesamturteil niemals nur auf Mathematik gegründet, und wenn dies einmal so sein sollte, dann hat der Urteilende realitätsfremd entschieden, andere Perspektiven zurückzustellen. Ziel des Kurses ist einerseits, die Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu bereichern und zu befähigen, einen mathematischen Blick auf Situationen werfen zu können, andererseits aber auch die Grenzen dieses Blickes im Auge zu behalten, wenn Entscheidungen in mathematikhaltigen Situationen zu fällen sind. Schulzentriertes Wissen hat einen grundsätzlich anderen Charakter als lebensorientiertes Wissen, das darauf zielt, sich in Lebenssituationen selbstbestimmt und souverän zu bewegen und sie zu gestalten oder mitzugestalten.

Schulmathematik hat die Tendenz, zum traditionellen Ritual zu werden und seine Zwecke nur in sich selbst und möglicherweise in einer bildungsmäßigen Selektion und der Zuteilung von Lebens- und Berufschancen zu sehen, ohne dass sie für sich beanspruchen kann, tatsächlich der Lebensvorbereitung zu dienen. Vor allem im ersten Teil des Kurses sollte die Mathematik hingegen den Anwendungen dienen und nicht die Anwendungen der Mathematik.

4. Lebensbereicherung statt Lebensvorbereitung

Lebensvorbereitung ist der falsche Terminus für erwachsene Kursteilnehmerinnen und -teilnehmer, die auch vor dem Kurs ihr Leben organisiert, gestaltet und gemeistert haben und danach meistern werden. Ein Mensch mit geringen mathematischen Kenntnissen ist in gewissem Sinne und stark abgeschwächter Form einem Menschen vergleichbar, der sich längere Zeit in einem Land aufhält, ohne die Landessprache zu beherrschen. Sein Handlungsspielraum und seine Mitwirkungs- und Gestaltungsmöglichkeiten sind eingeschränkt. Ohne eine lebenstaugliche mathematische Bildung ist man darauf verwiesen, in mathematikhaltigen Situationen anderen zu ver- oder misstrauen, Entscheidungen anderen zu überlassen, sie zufällig und zum eigenen Nachteil zu fällen oder sie nach Möglichkeit gänzlich zu meiden. Solchen Einschränkungen entgegenzuwirken, ist ein zentrales Ziel des Kurses. Er soll die Teilnehmerinnen und Teilnehmer stark machen und ihnen ein selbstbestimmtes Handeln, Entscheiden, Gestalten und Leben in solchen Situationen und auch darüber hinaus ermöglichen.

5. Ich-Stärke

Mathematische Bildung sollte wie alle Bildung die Lernenden stärken. Gegen diesen Grundsatz wird im schulischen Mathematikunterricht häufig verstoßen. Er erzeugt zuweilen eher eine falsche Hochachtung und Ängste vor diesem Metier und Minderwertigkeitsgefühle. Solche mathematische Sozialisation führt zu Unterwerfung und Anpassung und nicht zur Stärkung des individuellen Denkens. Mathematische Bildung sollte niemals nur als Kulturtechnik im affirmativen Sinne, sondern als Erweiterung und Gestaltungsmöglichkeit des eigenen Lebens- und Gedankenraumes gelehrt, gelernt, erworben, aufgebaut und sich zu eigen gemacht werden. Das Vertrauen in die eigene Person und die eigenen Fähigkeiten innerhalb und außerhalb der Mathematik zu stärken, ist ein zentrales Ziel dieses Kurses. Dazu müssen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer selbst tätig sein und werden, diskutieren, Situationen untersuchen und erschließen. Es sollte sich also nicht um Unterricht im klassischen Sinne, sondern um Anleitung zum Selbstlernen, Denken und Arbeiten handeln, das von den Lehrpersonen zurückhaltend und ermutigend, aber nicht belehrend moderiert wird.

6. Didaktische Prämissen und Prinzipien

Mathematik im Kontext dient gleichermaßen der Erschließung der Welt wie der Erschließung der Mathematik. Elementarmathematik, ihre Begriffsbildungen und Argumente können und sollen aus Lebenssituationen, aus der erlebten Wirklichkeit emergieren, sich aus ihrer Beschreibung und Bearbeitung entwickeln, sich ergeben und entstehen. Das wurzelt sie in unser allgemeines Denken ein, lässt sie verständlich werden, macht sie zugänglich und öffnet sie. Im Kurs sollte das mathematische Denken zunächst nicht dem allgemeinen Denken trennend gegenübergestellt werden, sondern aus diesem und der Lebenserfahrung erwachsen, sie erweitern und in sie eingebettet werden. Prämissen und Prinzipien sind dabei:

- Muße
- Selbsttätigkeit
- Variation und Lösungsvielfalt
- Reichhaltigkeit
- Beziehungshaltigkeit
- Veranschaulichungen – Wechsel von Darstellungsarten
- Einsichtige Begründungen und Formulierungen
- Kommunikation
- Individuelles und dialogisches Lernen

Zur **Muße** gehört, dass man sich auf einen Gegenstand oder eine Fragestellung einlässt. Eine Frage verstehen, heißt sie sich stellen. So wird aus der Frage eine eigene, individuelle oder gemeinsame Frage, an deren Antwort man interessiert ist und arbeitet. In den Kurssitzungen sollte in der Regel nicht mehr als ein Themenfeld bearbeitet werden, um in Ruhe bei einem Sachzusammenhang zu verweilen, ihn gründlich zu erörtern. Ein Weiterschreiten setzt voraus, dass alle Kursteilnehmerinnen und -nehmer mit der Fragestellung und ihrer Bearbeitung ausreichend vertraut sind und sich einen Fortgang wünschen.

Die **Selbsttätigkeit** ist eine grundlegende Voraussetzung für jedes Lernen. Man lernt nicht durch Mitteilungen und Anweisungen, sondern indem man selbst über die Dinge – häufig auch unter Anleitung und durch Anstöße – nachdenkt.

Bei der Bearbeitung einer mathematikhaltigen Sachsituation sind die **Vielfalt** von Lösungen und die **Variation** der Problemstellung von ausschlaggebender Bedeutung. Eine Lösung kann man nur finden und recht verstehen, wenn man unterschiedliche Wege einschlägt, wenn man eine zweite und dritte Lösung sieht, die das Problem gleichsam umkreisen und aus verschiedenen Blickwinkeln erscheinen lassen. Mehrere Lösungswege bieten zudem die Sicherheit, kohärent gedacht und gerechnet zu haben. Ein ‚Das geht doch so!' hilft nicht zu verstehen, sondern drängt sich nur auf und drückt die eigenen Gedanken, ohne die ein eigenes Verstehen gar nicht möglich ist, weg. Man muss sich die Sache schließlich selbst klar machen. Mit fremdgedachten Lösungswegen sind die Teilnehmer oft genug gescheitert.

Aufgabenstellungen wie

> *In einem Laden kostet eine Packung mit 30 Brausetabletten 6 Euro, ein anderer Laden verkauft eine Packung mit 50 Brausetabletten für 8 Euro. In welchem Laden sollte man die Tabletten kaufen?*

lassen vielfältige Bearbeitungswege zu:

Man überlegt,
1. wie viele Pillen jeweils 1 Euro kosten.
2. wie viele Pillen jeweils 2 Euro kosten.
3. wie viel 10 Pillen jeweils kosten.
4. wie teuer eine Pille jeweils ist.
5. dass 5 Packungen aus dem einen Laden so viele Pillen enthalten wie 3 Packungen aus dem anderen Laden.
6. wie viele Pillen man jeweils für 24 Euro erhält.
7. wie viel 100 Pillen jeweils kosten.
8. wie viel man in dem ersten Laden für 50 Pillen zahlt.
9. wie viel man im dem zweiten Laden für 30 Pillen zahlt.
10. dass eineinhalb Packungen aus dem ersten Laden weniger Pillen enthalten als eine Packung aus dem anderen, aber teurer als diese sind.

Auch die Berechnung, wie viel 30 % von 600 sind, lässt ganz unterschiedliche Rechenwege zu, die nicht durch einen Normansatz ersetzt oder standardisiert werden sollten.

Die **Variation** der Daten in Sachsituationen und Aufgaben macht diese durchsichtiger, schafft eine Vorstellung von den zu erwartenden Größenverhältnissen und bestätigt den Sinn der Rechnung.

Alltagsnahe mathematische Problemstellungen sind in der Regel komplex und lassen ganz unterschiedliche Fragestellungen und Perspektiven zu. Diese **Reichhaltigkeit** sollte im Kurs nicht eliminiert, sondern gepflegt werden. Anders als bei Schulaufgaben geht es bei Fragen, ‚die das Leben stellt', um verschiedene mögliche, sinnvolle Antworten und nicht um genormte Lösungswege, die einzuüben und zu memorieren sind. Vor allem Vergleichssituationen können reichhaltig sein und variantenreich bearbeitet werden.

Der Begriff **Beziehungshaltigkeit** geht auf den Mathematikdidaktiker Hans Freudenthal zurück. Er schreibt dazu:

> *Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muss man nicht in erster Linie die Zusammenhänge direkt suchen; man muss sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das – ich meine die Wirklichkeit – ist das Skelett, an der sich die Mathematik festsetzt. […]*

> *Wenn ich über beziehungshaltige Mathematik spreche, so lege ich den Nachdruck auf Beziehungen zu erlebter Wirklichkeit, nicht zu einer eigens zu diesem Zwecke konstruierten toten Scheinwirklichkeit, wie sie etwa im Rechenunterricht häufig heraufbeschworen wird.*[13]

Veranschaulichungen und der **Wechsel von Darstellungsarten** helfen in grundlegender Weise, eine Problemstellung zu verstehen und Ideen für ihre Bearbeitung zu entwickeln. Skizzen, Grafiken und Diagramme – wie vorläufig und zunächst unvollständig auch immer – führen – auch einfache – Sachsituationen vor Augen, machen sie sichtbar, übersichtlich und einsichtig; an ihnen kann sich ein Bearbeitungsplan und schließlich eine Lösung entwickeln.

Einsichtige Begründungen und Formulierungen sind für das Verstehen mathematischer Problembearbeitungen grundlegend und verhindern ein gedankenloses Anwenden oder undurchdachtes Übernehmen von Faustregeln, Verfahren und Formeln. Ihnen ist besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Die Argumentation ist – soweit möglich – an der Sache zu entwickeln und nicht mit oder innerhalb mathematischer Sprech- oder Schreibweisen.

Die **Kommunikation** über Sachverhalte und ihre mathematikhaltigen Lösungen sollte nicht nur schriftlich – in unkommentierten Zeichenreihen – sondern auch mündlich erfolgen. Die schriftliche und mündliche Versprachlichung dient in gleicher Weise dem eigenen Verstehen wie dem Lernen und Verstehen anderer Kursteilnehmerinnen und -teilnehmer: Lernen durch Dialog, gemeinsames Klären und gegenseitiges Erläutern. Zur Kommunikationsfähigkeit gehört nicht zuletzt, dass man in der Lage ist, ein Problem, mit dem man selbst nicht zurechtkommt, anderen darzustellen, wenn man sie um ihre Hilfe bitten will, und ebenso, dass man die Lösungen anderer befragen kann.

Individuelles und dialogisches Lernen statt Dozieren oder Erklären durch die Lehrperson sind die Richtschnur für den Kurs. Man muss sich zunächst eine Problemstellung selbst zu eigen machen, bevor man in den Dialog mit anderen tritt. Lernen und Verstehen sind individuell, der Austausch mit Partnern kann sie in Gang setzen und beflügeln, aber nicht ersetzen.

7. Gliederung des Kurses 3

Der Kurs 3 ist in zwei Teile gegliedert:

- Im Kursteil 3.1 Mathematik im Leben werden mathematikhaltige Sachsituationen besprochen, befragt und bearbeitet.
- Im Kursteil 3.2 Mathematik fürs Leben werden die mathematischen Erfahrungen und Erkenntnisse aus dem ersten Teil systematisiert und zu einer alltagstauglichen und lebenskundlichen mathematischen Bildung verbunden und verdichtet, die in den behandelten Sachsituationen erarbeitet wurde und sich nun auch in anderen Bereichen anwenden lässt.

13) *Hans Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Klett Verlag. Stuttgart 1977, S. 77 und 79.*

Kursteil 3.1 Mathematik im Leben

Im ersten Teil des Kurses soll von konkreten Problemstellungen ausgehend Mathematik im Kontext gesehen und betrieben werden. Dies dient einerseits dem Kennenlernen des mathematischen Wissens und Könnens sowie der Problemlösestrategien der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die ernst zu nehmen, auszubauen und nicht als defizitär zu betrachten sind, und andererseits einer ersten sanften und sorgfältigen Bearbeitung mathematikhaltiger Situationen. Die Tiefe der Behandlung wird zunächst im Wesentlichen durch das Vorwissen und Vermögen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer und deren Austausch bestimmt. Die Lehrperson soll hier gezielt Anstöße geben und Angebote machen, insbesondere solche, die nachgefragt werden, aber nicht Modelllösungen vorexerzieren oder ein festgelegtes Pensum abarbeiten.

Grundlage zur Erkundung und Behandlung der unten genannten Themenfelder sollten stets Materialien wie Kopien aus Kochbüchern, Kataloge von Reiseunternehmen, Fahrpläne, Prospektmaterial, Zeitschriftenartikel u. Ä. sein. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer werden selbst Fragen zu dem Material entwickeln, moderiert und ergänzt von der Lehrperson. Das Begreifen ist – wo möglich – auch wörtlich zu verstehen.

Eine Auswahl für die Inhalte von Kursteil 3.1

- Kochrezepte[14]
- Reisen
- Bankgeschäfte
- Einkaufen
- Mieten und Wohnen
- Energieverbrauch
- Löhne, Gehälter, Hartz IV
- Zahlen, Daten und Grafiken aus Zeitungen

Nicht alle diese Themenfelder sollen bearbeitet werden, die Kursteilnehmerinnen und -teilnehmer können hier über die Auswahl und Reihenfolge mitentscheiden, andere Vorschläge machen und auch aufgefordert werden, Material zu einem Themenfeld zu sammeln und mitzubringen.

Im Themenfeld **Kochrezepte** kann man zunächst die Maßeinheiten klären, verschiedene Rezepte zum gleichen Gericht miteinander vergleichen und sie auf eine andere Personenzahl (z. B. 6 statt 4) umrechnen.

14) Denkbar wäre, dass zum persönlichen Kennenlernen ein Essen nach einem dieser Rezepte gemeinsam gekocht und verzehrt wird.

Im Themenfeld **Reisen** kann man Fahrpläne studieren, Routen zusammenstellen, Reisezeiten und -kosten (Bahn, Auto, Flugzeug, Fähre) abschätzen, berechnen und vergleichen. Auch Pauschalreisen und die Buchung von Hotels und Ferienwohnungen geben Anlass zu Berechnungen und Vergleichen.

Im Themenfeld **Bankgeschäfte** kann man sich mit den Kontoständen vor und nach Einzahlungen/Auszahlungen befassen, die Einträge in Sparbüchern klären und einen ersten Blick auf Zinsen werfen.

Im Themenfeld **Einkäufe** kann es um die Planung von kleineren und größeren Anschaffungen gehen, um den Vergleich von Angeboten und um Rabatte. Auch die Führung eines Ausgabenheftes kann hier besprochen werden.

Im Themenfeld **Mieten und Wohnen** kann man Mieten vergleichen, sie aufschlüsseln (Kaltmiete/Warmmiete/Nebenabgaben/weitere feste Kosten) und anspruchsvoller die Wohnflächen in Beziehung zu den Miethöhen setzen.

Zum Themenfeld **häuslicher Energieverbrauch** bietet sich die Durchführung eines Projekts zur Messung des Stromverbrauchs von Elektrogeräten an – mit Messgeräten, die vielerorts von den Stadtwerken oder lokalen Stromanbietern verliehen werden. Dies führt in naheliegender Weise zur Besprechung der auftretenden Größen, zur Anlage von Tabellen, zu Vergleichen, Hochrechnungen und Kalkulationen.

Im Themenfeld **Löhne und Hartz IV** kann man Abrechnungen lesen und detailliert untersuchen, Stunden- und Monatslöhne in Beziehung setzen, Mindestlöhne (nach Branchen) und Hartz-IV-Zahlungen vergleichen.

Im Themenfeld Zahlen, Daten und **Grafiken aus Zeitungen** geht es um das mediale Auftreten und den medialen Einsatz von Zahlen, Rechnungen und Mathematik. Ist dieser stimmig? Ist er durchsichtig und angemessen? Sind die hier getroffenen Aussagen, Folgerungen und Wertungen verständlich und nachvollziehbar? Sind Grafiken sinnvoll angelegt? Was besagen sie?

Jeder 10. trinkt Alkohol am Arbeitsplatz

Berlin – Jeder zehnte Arbeitnehmer trinkt täglich Alkohol im Büro, 41% gelegentlich, warnt die Krankenkasse AOK. Demnach leisten Alkoholkranke ein Viertel weniger als nicht abhängige Kollegen. Sie fallen durch 16-mal häufigere Fehlzeiten auf, haben 3,5-mal häufiger Arbeitsunfälle. In einer Firma mit 1000 Beschäftigten entstehen durch Alkohol und Drogen Einbußen von rund 325.000 Euro/Jahr.

BILD-Zeitung vom 19. Juli 2013

Weitere Themenfelder sind je nach der Interessenlage der Kursteilnehmerinnen und -teilnehmer denkbar:

- Im Themenfeld Nähen und Werken kann man Stückpläne aufstellen, den Materialverbrauch, die zugehörigen Kosten und den Zeitaufwand ermitteln und vergleichen.
- Im Themenfeld Sport kann man Tabellen lesen, Ergebnisse aus verschiedenen Sportarten und Jahren untersuchen und vergleichen.
- Im Themenfeld Spiele und Chancen kann man Würfel- und Glücksspiele untersuchen, Strategien und Gewinnchancen erörtern.

Die in den genannten Themenfeldern eingesetzte Mathematik soll den Situationen und Problemstellungen angemessen sein; Über-Mathematisierungen und Formalisierungen sind zu vermeiden. Will man z. B. ermitteln, ob es günstiger ist, einen Handyvertrag inklusive eines Handys für 24 Monate abzuschließen oder ein Handy zu kaufen und den Vertrag separat abzuschließen, ist es nicht erforderlich, eine Funktion aufzustellen, die die jeweiligen Kosten in Abhängigkeit von der Zahl der Monate erfasst, sondern es genügt, für beide Alternativen die Kosten für 24 Monate zu berechnen. Auch die Aufstellung von Gleichungen mit Variablen ist zur Beschreibung einfacher Sachsituationen meist nicht erforderlich. Wenn man etwa errechnen will, wie viele Personen an einem Ausflug mit einem für 500 € gemieteten Bus teilnehmen müssen, damit der Fahrpreis für den Einzelnen nicht höher als 12,50 € ausfällt, bietet es sich an, eine kleine Divisions- oder Multiplikationstabelle anzulegen, aus der das Ergebnis nicht nur ersichtlich, sondern auch durchschaubar ist.

Mathematische Begriffe und Verfahren sollen nicht um ihrer selbst willen benutzt und entwickelt werden, sondern in der Regel nur so weit, wie es die Problemstellung erfordert. Soweit das möglich ist, sollten sie in der Bearbeitung von Sachsituationen als nützliche und notwendige Werkzeuge entstehen. Andererseits sind mathematisch falsche Ausdrucks- und Schreibweisen, auch wenn sie zu richtigen Ergebnissen führen, wie zum Beispiel in der sukzessiven, dem Rechnen im Kopf nachgebildeten Addition $28 + 17 = 28 + 10 = 38 + 7 = 45$, sanft und nachvollziehbar zu korrigieren. Insgesamt sollen also sowohl die jeweilige Sache als auch das mathematische Handwerkszeug und ihre Nutzerinnen und Nutzer ernst genommen werden.

Wichtige Tätigkeiten für Mathematik im Leben sind

- Überschlagen
- Schätzen
- Größenordnungen überblicken
- Umgehen mit Taschenrechnern und Computern (z. B. Tabellenkalkulationssoftware).

Sie sollten im Kurs durchgehend gepflegt und geübt werden.

Manche der Teilnehmerinnen und Teilnehmer (z. B. Hausmeister) sehen sich zunehmend mit der beruflichen Anforderung konfrontiert, Tabellenkalkulationssoftware zu verwenden. Der Kurs kann ihnen zeigen, dass diese Programme ihnen Rechenarbeit abnehmen können – weshalb sie anfangs auch als „elektronische Rechenblätter“ bezeichnet wurden. Sind solche Programme verfügbar, dann können damit Tabellen angelegt und Daten in Balken- und Kreisdiagrammen veranschaulicht werden. An solchen elektronischen Rechenblättern kann man auch anhand der Verknüpfung der Felder einen ersten sinnvollen und inhaltlichen Zugang zum Funktionsbegriff gewinnen, der in diesem Kurs nicht explizit benannt und diskutiert werden soll.

Das Überschlagen sollte nahezu jeder Rechnung vorausgehen. In vielen Situationen ist es wichtiger und nützlicher als eine genaue Rechnung. Es schafft Sicherheit beim Rechnen und ermöglicht, ein eigenes oder fremdes Rechenergebnis auf seine Stimmigkeit zu prüfen.

- Stimmt eine Restaurantrechnung von 47 € in etwa, wenn vier Personen je eine Pizza und ein Getränk bestellt hatten?
- Was kostet eine Pauschalreise für 572 € ungefähr, wenn ein Frühbucherrabatt von 35 % eingeräumt wird?
- Was wird mein Einkauf in einem Lebensmittelladen in etwa kosten?
- Wie viel kosten Straßenbahn- und Busfahrten einer 4-köpfigen Familie im Monat? Werden 100 € dafür ausreichen?
- Reichen zehn Euro, um Brot, Butter, Wurst, Käse, Zahnpasta und Briefmarken zu kaufen?
- Wie viel kostet ein Auto monatlich?
- Wie viele Flaschen Wasser, Bier und Wein sollte man für eine Einladung von 12 bis 14 Personen bereitstellen?
- Wie viel Pfand werde ich für eine Einkaufstasche voller Glas- und Plastikflaschen erhalten? Oder irrt der Automat?

Beim **Schätzen** geht es darum, in Situationen, in denen man weder Werte noch Näherungswerte für Größen kennt, vernünftige Werte zu schätzen und Argumente für diese Schätzungen vorzubringen.

Das **Überblicken von Größenordnungen** ist für das Überschlagen und Schätzen grundlegend, und man übt das eine mit dem anderen und umgekehrt.

Der verständige **Umgang mit Taschenrechnern**, wie sie zum Beispiel in mobilen Telefongeräten eingebaut sind, **und Computern** (z. B. Tabellenkalkulationssoftware) erleichtert und stützt das eigene Rechnen. Ohne ein sinnvolles und der Situation angemessenes Runden kommt man hier leicht zu übergenauen oder unsinnigen Ergebnissen.

Kursteil 3.2 Mathematik fürs Leben

Im zweiten Teil des Kurses sollen die im ersten Teil an Problemsituationen verwendeten mathematischen Begriffe, Argumentationen und Verfahren systematisiert, verbunden und zueinander in Beziehung gesetzt werden. Ausgangspunkt sind nun jeweils mathematische Themenfelder, bei denen man auf die Beispiele aus Kursteil 3.1 zurückgreifen oder weitere entwickeln kann. Auch hier sollen also die mathematischen Inhalte ihre Korrespondenz in der erfahrenen Wirklichkeit finden.

Inhalte von Kurs 3.2

- Zahlen
- Größen und Maßeinheiten

- Prozentrechnung
- Statistik – einfache Begriffe und Maße
- Tabellen und Grafiken

- Proportionalität und Antiproportionalität
- Dreisatz
- Lineare Gleichungen und Funktionen

- Flächen und Körper

- Chancen

Die ersten drei Blöcke umfassen Inhalte, die auch als ‚Bürgerliches Rechnen' bezeichnet und im täglichen Leben als unverzichtbar betrachtet werden. Sie sind obligatorisch. Die Reihenfolge der Themen innerhalb der Blöcke ist nicht festgelegt. Zumeist wird es sich anbieten, diese Themen nicht nacheinander, sondern gleichzeitig und miteinander zu bearbeiten.

Im Themenfeld Zahlen / Maßeinheiten ist zu behandeln:

• das Rechnen mit mehrstelligen natürlichen Zahlen
Hier geht es ums Prinzip, bei der Multiplikation etwa um das Vervielfachen mit 10, um das Verdoppeln und Halbieren und an Beispielen um den distributiven Charakter der Multiplikation. Die Rechnungen werden dann mit einem Taschenrechner durchgeführt. In diesem Zusammenhang können auch die Notation und die Bezeichnungen von großen Zahlen behandelt werden.

- **Dezimalzahlen**

Anknüpfend an reale Situationen können hier zunächst Geldbeträge, Temperaturen, Längen und Zeiten im Leistungssport und Benzinpreise wie 154,9 Cent betrachtet und erläutert werden. Dann erfolgt eine Erweiterung der Stellenwerttafel (vgl. Kurs 2) auf Zehntel, Hundertstel und Tausendstel.

- **Runden und Näherungswerte**

Bei Rechnungen mit Dezimalzahlen mit dem Taschenrechner ist ein vernünftiges Runden zu besprechen.

- **Einfache Bruchzahlen**

Einfache Bruchzahlen wie $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}$ können in Anwendungssituationen als Maßzahlen von Größen behandelt werden. Es sollten hier nur Beispiele betrachtet werden, die in natürlicher Weise auf Bruchzahlen führen, wie etwa Aufteilung eines Erbes (an den Ehepartner, drei Kinder und zwei Enkel).
Ein elaboriertes Beispiel ist ein amerikanisches 16-teiliges Maulschlüssel-Set, das in aufsteigender Größe, wie folgt, beschriftet ist:
1/4“ – 5/16“ – 3/8“ – 7/16“ – 1/2“ – 9/16“ – 5/8“ – 11/16“ – 3/4“ – 13/16“ – 7/8“ – 15/16“ – 1“ – 1.1/16“ – 1.1/8“ – 1.1/4“.
Wie lässt sich diese Beschriftung und Ordnung erklären?

- **Gängige Maßeinheiten** für Gewichte, Entfernungen, Zeiten u. Ä.

- **Das Umrechnen von Maßeinheiten** in größere und kleinere der gleichen Art.

Anspruchsvoller kann man zum Beispiel fragen, mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit in km/h ein 100-m-Läufer diese Strecke zurücklegt oder wie viele Meter man bei einer Autofahrt mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h, 120 km/h oder 130 km/h in einer Sekunde zurücklegt.

Im Themenfeld Prozentrechnung / Statistik / Tabellen und Grafiken ist die Prozentrechnung ohne begrifflichen Aufwand wie Grundwert, Prozentwert, Prozentsatz etc. zu behandeln. Es genügt ein Prozentbegriff auf der Grundlage von $p\,\% = \frac{p}{100}$. Formeln, wie sie die gängigen Schulbücher anbieten, sind zu vermeiden. Sie verstellen nur das inhaltliche Begreifen durch formales Operieren und durch das überflüssige Kodieren und Dekodieren von Formvariablen und Parametern.
Im Dezimalsystem ist es einfach, 1 % einer Größe oder Zahl zu bestimmen, aber es ist bei vielen Fragestellungen nicht erforderlich oder angebracht, in einer Art Dreisatzmanier stets zunächst 1 % zu ermitteln: 15 % von 600 kann man auch in naheliegender Weise ermitteln, in dem man die Zahlen 60 (als 10 % von 600) und 30 (als die Hälfte der ermittelten 10%) addiert.

Eine multiplikative Auffassung des Prozentbegriffs (35 % von 600 erhält man durch die Rechnung $600 \cdot 0{,}35 = 210$) vereinfacht die Prozentrechnungen auf schlichte Multiplikations- und Divisionsaufgaben, sollte aber erst nach einer nachvollziehbaren Grundlegung des Prozentbegriffs (‚50 % von‘ bedeutet die ‚Hälfte von‘, 25 % ein Viertel, 10 % ein Zehntel usf.) eingeführt werden, damit das Rechnerisch-Formale nicht das inhaltliche Verständnis überlagert und in den Hintergrund drängt.

Eine Analyse von Tankquittungen, bei der auffällt, dass der ausgewiesene Mehrwertsteuerbetrag nicht 19 % des Gesamtbetrages sind, kann hier einen Abschluss darstellen.

TANKQUITTUNG	
Diesel	42,56 Liter
	1,419 €/Liter
Gesamtbetrag	**60,39 €**
Netto	*50,75 €*
Mwst. 19%	*9,64 €*
Brutto	*60,39 €*

Im Rahmen der Prozentrechnung ist auch das Thema Zinsen anzusprechen und in seinen Grundzügen zu bearbeiten: Guthabenzinsen bei Sparbüchern und Schuldzinsen bei Konsumentenkrediten und deren Rückzahlung. Die Behandlung der Dynamik von Zinseszinsentwicklungen, die nicht nur bei Bankgeschäften, sondern auch bei der elementaren Modellierung von Wachstumsprozessen eine charakterisierende Rolle spielt, könnte hier einen allgemeinbildenden Schlusspunkt setzen.[15]

In der **Statistik** sind anknüpfend an das Themenfeld **Grafiken** aus Zeitungen und anderen Quellen aus Kursteil 3.1 an inhaltlichen Beispielen in natürlicher Weise die Begriffe Maximum, Minimum, arithmetisches Mittel und Median einzuführen. Einfacher kann man auch vom größten und vom kleinsten Wert, vom Durchschnitt und vom mittleren Wert sprechen. In diesem Zusammenhang sind Stab- und Kreisdiagramme zu besprechen. Die Anlage und Beschriftung solcher Diagramme sollte an einfachen, inhaltlich sinnvollen und für die Kursteilnehmerinnen und -teilnehmer überschaubaren und aussagekräftigen Beispielen thematisiert werden. Denkbar ist hier auch die Einbeziehung von Computersoftware zur Erstellung solcher Diagramme. Ebenso wichtig ist die Sichtung von Grafiken aus Zeitungen und anderen Quellen, ihre Interpretation, die Überprüfung ihrer Aussage und Angemessenheit.

Das Erstellen von **Tabellen** ist ein probates und häufig unterschätztes Mittel, ein Problem zu verstehen, aufzubereiten und zu bearbeiten. In vielen Fällen sind sie geeignet, eine Formelschreibweise zu vermeiden und sich stattdessen schrittweise einen Überblick zu verschaffen und an der Sache selbst zu arbeiten.

Im Themenfeld Proportionalität und Antiproportionalität/Dreisatz sind die Begriffe Proportionalität und Antiproportionalität an geeigneten Sachsituationen zu entwickeln. Auch hier geht es nicht um ein Erlernen von Begriffen, sondern ein Erfassen von proportionalen Situationen: dem Vielfachen (Doppelten; Dreifachen; Vierfachen usw.) einer Größe entspricht das gleiche Vielfache (Doppeltes; Dreifaches; Vierfaches usw.) einer anderen Größe, was sich durch Tabellen entwickeln und erschließen und durch Pfeilbilder veranschaulichen lässt. Wichtig ist eine sprachliche und verständliche Fassung und nicht eine formelmäßige Darstellung. Gleiches gilt für Situationen, denen eine antiproportionale Zuordnung von Größen zugrunde liegt:

15) Vgl. Kirsch, A. (1977): Zur Behandlung von Wachstumsprozessen. Online unter: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1977%20Band%201%20Salzburg/Kirsch1977.pdf.

dem Doppelten, Dreifachen, Vierfachen, Fünffachen usw. der einen Größe entspricht die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel, ein Fünftel usw. der anderen Größe.

Der sogenannte Dreisatz ist eine Möglichkeit, bei proportionalen und bei antiproportionalen Entsprechungen von Größen Schlüsse zu ziehen. Er sollte aber nicht standardisiert, formalisiert oder als mathematisches Verfahren expliziert und herausgestellt, sondern inhaltsbezogen und zumeist in ganzen deutschen Sätzen vollzogen werden. Man kann dann auch zur Abkürzung zu einer Pfeilschreibweise übergehen, wenn sich das anbietet und der Sache und dem Verständnis der Kursteilnehmerinnen und -teilnehmer dient. Vielfach ist das mechanische ‚Über-die-Einheit-Gehen' beim Dreisatz nicht erforderlich und eher inhaltsfern: Wenn man zum Beispiel weiß, dass 4 Brötchen 1,20 € kosten, dann ergibt sich daraus unmittelbar, wie viel 2 oder 8 oder 6 oder 10 Brötchen kosten, ohne dass man den Preis eines Brötchens als Zwischenergebnis errechnen müsste.

Problemstellungen, denen eine Proportionalität oder Antiproportionalität zugrunde liegt, lassen sich stets auf ganz verschiedene Weisen mit einem Dreisatz bearbeiten; ein inhaltliches Beispiel zeigt die skizzierte Bearbeitung der Aufgabenstellung auf Seite 131. Zunächst ist in Sachsituationen stets zu prüfen, ob sie durch eine proportionale oder antiproportionale Entsprechung von Größen erfasst werden können oder ob dies nicht der Fall ist. Ein Höhepunkt, was die Komplexität anlangt, kann möglicherweise in einer Aufgabenstellung der folgenden Art erreicht werden:

> *Frau Meyer stellt beim Tanken fest, dass ihr Auto auf einer 460 km langen Fahrt 31,6 Liter Diesel verbraucht hat. Wie viele Liter Diesel verbraucht das Auto durchschnittlich auf 100 km?*

die, wenn man durchschaut hat, dass 460 km das 4,6fache von 100 km sind und damit 100 km der 4,6-te Teil von 460 km,

460 km fuhr das Auto mit **31,6** Liter

: 4,6 ↓   ↓ : 4,6

100 km fuhr das Auto mit **? Liter.**

auf die schlichte Division $31{,}6 : 4{,}6 \approx 6{,}9$ führt, die man mit einem Taschenrechner ausführen und mit dem Überschlag $32 : 5 = 6{,}4$ oder $32 : 4 = 8$ oder $30 : 5 = 6$ überprüfen kann.

Bei der Auswahl der Aufgabeninhalte ist die Lebenssituation der Lernenden zu berücksichtigen. Diese vorstehende Aufgabe wird man also nur stellen, wenn wenigstens einige der Kursteilnehmerinnen oder -teilnehmer über ein Auto verfügen, ein solches Gefährt also überhaupt im Rahmen ihrer Lebensinteressen auftaucht.

Lineare Gleichungen und Funktionen sollten in dem Kurs nur angesprochen werden, wenn dafür Zeit und Muße bleiben und die davor stehenden Inhalte ausreichend und zufriedenstellend bearbeitet wurden. Mit linearen Funktionen kann man Sachsituationen mathematisch erfassen, in denen zum Beispiel ein Grund- und ein Einheitenpreis vorliegen, wie etwa bei der Kostenberechnung des Strom- oder Gasverbrauchs. Es ist aber daran zu erinnern, dass auch die Fragestellung, welcher Tarif welches Energieanbieters bei welchem Verbrauch günstiger ist, durch das Anlegen einer Tabelle zufriedenstellend und einsichtig beantwortet werden kann. Den Steigungsbegriff einzuführen, hat in dem Kurs nur einen Sinn, wenn er zur Bearbeitung lebensnaher Problemstellungen nützlich und Gewinn bringend ist. Hier kann man etwa die Verkehrsschilder für Steigung und Gefälle besprechen und die Frage aufwerfen, ob es Steigungen mit mehr als 100 % geben kann.

Im Themenfeld Flächen und Körper können einfache Umfangs- und Inhaltsberechnungen von Flächen und einfache Oberflächen- und Volumenberechnungen von Körpern stattfinden. Einschränkend ist allerdings zu sagen, dass viele Aufgabenstellungen hier eher künstlich sind. Will man etwa aus dem Quadratmeterpreis einer Teppichware die Kosten für die Auslegung eines 3,5 Meter mal 4 Meter großen Wohnzimmers ermitteln, dann sind nicht nur die Größe, dessen Bodenfläche und mögliche Versprünge und Erker zu berücksichtigen, sondern auch, wie breit die Bahnen sind, in denen die Teppichware angeboten wird. Auch beim Kauf eines Aquariums ist man auf den Erwerb von Normgrößen angewiesen. Man könnte aber verschiedene Aquariengrößen vergleichen und berechnen, wie viel Liter Wasser sie fassen und welche Kosten mit ihrer Füllung verbunden sind. Ebene Koordinaten können anhand von Spielen (wie Schach und ‚Schiffe-Versenken‘) oder Landkarten angesprochen werden. Eine Abfolge von Zeichnungen zum Zusammenbau von Möbeln kann raumgeometrisches Denken anregen, bedarf aber kaum schulmathematischer Begrifflichkeiten. Die Planung einer Küche mit entsprechender Software schult das Vorstellungsvermögen.

Im optionalen Themenfeld Chancen kann man Wahrscheinlichkeiten, die zum Beispiel in Würfel- und Kartenspielen und in Lotterien auftreten, ermitteln, vergleichen und der Teilnahme an Automaten- und Lottospielen und der damit verbundenen Geldausgabe entgegenwirken. Das für die Kursteilnehmerinnen und -teilnehmer bildende Erlebnis kann darüber hinaus darin bestehen, dass sie erkennen, dass man auch Zufallssituationen mathematisch erfassen kann.

Literaturverzeichnis

FREUDENTHAL, H. (1977):
Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Klett Verlag. Stuttgart 1977, S. 77 und 79.

KIRSCH, A. (1977):
Zur Behandlung von Wachstumsprozessen. Online unter:
http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1977%20Band%201%20Salzburg/Kirsch1977.pdf

Autoren

Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer
ist Professor für Mathematikdidaktik an der Universität Paderborn.

Christian Hartmann
ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Bereich Mathematikdidaktik an der Universität Paderborn.

Dr. Thomas Jahnke
ist Professor für Mathematikdidaktik an der Universität Potsdam.

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

Deutscher
Volkshochschul-Verband

Herausgeber:

Projekt „Anpassung der Basisqualifizierung ProGrundbildung“

Deutscher Volkshochschul-Verband e. V.
Obere Wilhelmstraße 32
53225 Bonn
Tel.: 0228. 97569-0
Fax: 0228. 97569-30

1. Auflage: 2015

Redaktion: Gundula Frieling, Ralf Häder
Gestaltung: gastdesign.de

Prof. Dr. Bernd Remmele,
Prof. Dr. Günther Seeber, Friederike Stoller

Modul 6:
Rechnen lehren und Ökonomische Grundbildung

Teil 2:
Ökonomische Grundbildung

Ökonomische Grundbildung

Prof. Dr. Bernd Remmele, Prof. Dr. Günther Seeber, Friederike Stoller

1. Einführung: Grundbildung als Voraussetzung zur Lebensbewältigung

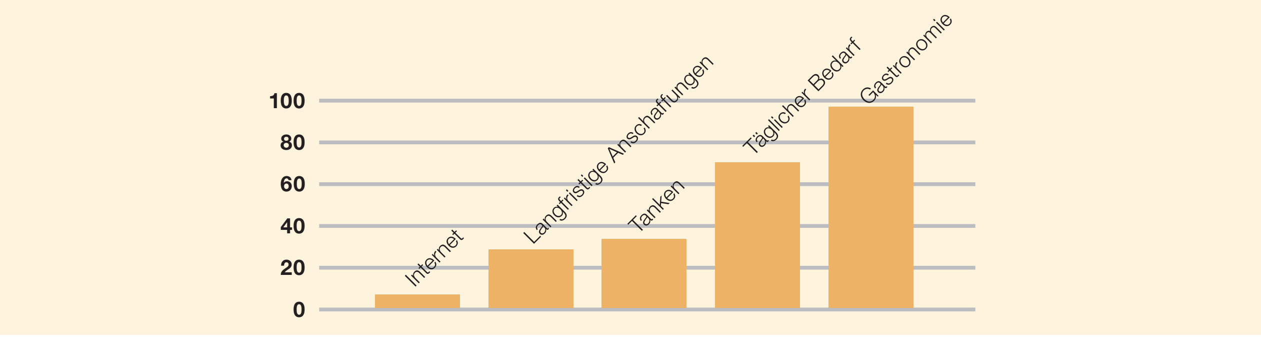
Würde man Erwachsenenbildner fragen, was eigentlich zur Grundbildung zählt, würden sie vermutlich zunächst Alphabetisierungskurse, den Erwerb grundlegender Rechenkenntnisse und vielleicht sogar elementare Medienkompetenz im Sinne informationstechnischer Grundbildung nennen. Aber bereits in dem vor einigen Jahren vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) geförderten Projekt „Grundbildung – Alphabetisierung – Wirtschaft" wurde Grundbildung in Bezug zu ökonomischen Lebenssituationen gesetzt und so inhaltlich erweitert (Klein, Stanik 2009). In diesem Projekt wurden vor allem auf dem Arbeitsmarkt verwertbare Kompetenzen anvisiert. Das sind in erster Linie – in Anbetracht der Adressaten – nicht abstrakte Schlüsselqualifikationen, sondern am Arbeitsplatz konkretisierbare und dennoch kontextübergreifende Fähigkeiten. Zum Beispiel sollen die Lernenden Arbeitsabläufe nachvollziehen oder Gegenstände nach bestimmten Merkmalen sortieren können. Außerdem werden notwendige Persönlichkeitsmerkmale thematisiert, wie Zuverlässigkeit, Leistungsbereitschaft u.a.m.

Weshalb kam es zu einer solchen Erweiterung des Grundbildungsverständnisses? Die Erklärung lässt sich anhand zweier miteinander sachlich verbundener Argumentationslinien verdeutlichen. Zum einen soll Grundbildung einen Beitrag zur selbstständigen Alltagsbewältigung leisten. Grundlegende Kulturtechniken sind dafür zwar eine Conditio sine qua non, aber eben nicht ausreichend. Vielmehr bieten alltagsrelevante Zusammenhänge gerade auch wichtige Lernanlässe für die allgemeinen Kulturtechniken. Zum anderen verändern sich die Bedingungen des Alltagshandelns, und das Verständnis von Grundbildung entwickelt sich mit „veränderten Anforderungen und Lebenslagen" permanent weiter (Röhrig 2010, S. 2).

Betrachten wir dazu einmal Beispiele aus unserer Geldwirtschaft: Während noch bis in die 1970er Jahre Löhne häufig wöchentlich und in bar ausgezahlt wurden, ist seither die Überweisung auf ein Girokonto die Regel. Weil ein solches Konto des Weiteren für Überweisungen (z.B. Miete, Interneteinkäufe, Energiekosten) und weitere Zahlungseingänge (z.B. Steuerrückzahlungen, Transferleistungen) vielfältiger Art dient, wird heute diskutiert, ob nicht jedem EU-Bürger das Recht auf ein Girokonto und auf eine EC-Karte zustehen sollte (Kyriasoglou 2013).

Als Annette Claar 1990 zentrale Ergebnisse zum ökonomischen Wissen von Kindern und Jugendlichen veröffentlichte, kannten viele den Scheck als Zahlungsmittel, die Kreditkarte war aber nahezu allen unbekannt. Heute spielt der Scheck kaum noch eine Rolle. Schon 2008 waren von insgesamt knapp 16 Milliarden bargeldlosen Transaktionen nur noch 65 Millionen per Scheck getätigt worden, also 0,41%. Die wichtigste Zahlungsform sind heute Überweisungen und Lastschriften, und mittlerweile werden ca. 35mal mehr Zahlungen mit Kreditkarte oder Girocard vorgenommen als mit dem Scheck. Auch die Bargeldzahlung ist auf dem Rückzug, wie Abb. 1 zeigt.

Abbildung 1: **Verwendung von Bargeld gegenüber anderen Zahlungsmitteln in Deutschland**[1]



1 Deutsche Bundesbank (Hrsg.) 2014, S. 24.

Bereits bei Besorgungen des täglichen Bedarfs zahlt circa ein Drittel der Kunden mit Karte. Neu und mengenmäßig noch (!) nicht so relevant ist die Zahlung per Mobiltelefon. Der Handel erwartet aber, dass sie ab 2018 EC- und Kreditkarte ersetzen wird.[2] Der Trend geht zum komplett bargeldlosen Einkauf.

Mit solchen Veränderungen gehen auch neue Anforderungen an die Alltagsbewältigung einher: Die notwendigen Fähigkeiten bei Vertragsabschlüssen mit der Bank oder dem Kreditkarteninstitut demonstrieren dabei gut das Zusammenspiel von be nötigter Lesefähigkeit und ökonomischer Kompetenz. Kostenvergleiche bei Kontoeröffnung oder Kreditaufnahme sind weitere Beispiele, die über ökonomische und Lesefähigkeiten hinaus z.B. elementare Rechenfähigkeiten voraussetzen. Nicht zuletzt stellt die Geldwirtschaft auch Anforderungen bezüglich des Umgangs mit Geld, die nicht alleine kognitiver Natur sind, sondern die den Handelnden zum Beispiel auch Einstellungen abverlangen, wie die Bereitschaft zu langfristigem Denken oder ein Bewusstsein für Kosten bei der Inanspruchnahme von Dienstleistungen.

Die Beispiele deuten bereits an, dass die Bewältigung des Alltags in vielfältiger Weise in einen ökonomischen Kontext eingebunden ist. Nicht zuletzt deshalb hat der deutsche Volkshochschulverband bereits ein Angebot zur ökonomischen Grundbildung aufgelegt.[3] Dieses knüpft zwar auch an den Alphabetisierungsbegriff an, hat aber zum Ziel, die ökonomischen Kompetenzen von Menschen mit ungünstigen Bildungsvoraussetzungen zu stärken. Kompetenzen sind aber mehr als nur elementares Wissen. Sie beinhalten zudem Handlungswissen im Umgang mit täglichen Herausforderungen und Bereitschaften. Auf diesem Kompetenzverständnis baut der folgende Studientext auf.

1.1 Grundbildung allgemein

Ganz allgemein geht es bei Grundbildung um den Erwerb von grundlegenden Kenntnissen und Fertigkeiten, die eine selbstständige Gestaltung des Lebens und ein aktives Handeln in unserer Gesellschaft ermöglichen. Weitergehend formuliert die UNESCO (UNESCO Institut für Pädagogik 1997, 7), dass es insgesamt um die Möglichkeit des Einzelnen gehe, in der Gemeinschaft sein individuelles Potenzial zu entfalten. Deshalb ist zu fragen, ob nicht über eine rein pragmatische Handlungsorientierung hinaus die Partizipationsfähigkeit der Menschen als Bürger ebenfalls bei einer ökonomischen Grundbildung angesprochen werden sollte. In der allgemeinen Grundbildung gilt Literalität zum Beispiel als Voraussetzung für politische Partizipation (Zeuner, Pabst 2011, 44) – Grundbildung und Bürgerbildung werden also zusammengeführt.

Eine solchermaßen definierte Grundbildung sollten eigentlich alle besitzen. Gerade wenn es aber um die politische Partizipation geht, wird schnell die Grenze von einer Grund- zu einer Tiefenbildung überschritten. Vieles, was hier für uns alle von Bedeutung ist, muss in der Schule vermittelt werden. Beispiele sind: Was sind die Prinzipien der Sozialen Marktwirtschaft? Was sind Institutionen unserer Demokratie? Wie funktioniert unser Sozialversicherungssystem? Es gilt also die für alle Erwachsenen relevanten Anforderungen zu identifizieren, die dann auch in Kursen als Grundbildung umgesetzt werden können.

Diese Anforderungen sollen im Folgenden als Kompetenzen formuliert werden, weil *Kompetenzen von einer in die andere Situation übertragbar sind.* Es müssen also nicht alle denkbaren, ökonomisch relevanten Lebenssituationen abgedeckt werden, sondern es sollen Kompetenzen über die Behandlung typischer Situationen vermittelt werden, die dann aber in unterschiedlichen Zusammenhängen angewendet werden können. Damit ist (ökonomische) Grundbildung nicht kontextlos und nicht zeitlos (Klein, Stanik 2009, 1).

Als genereller Kontext gelten im Folgenden alle ökonomisch geprägten Lebenssituationen. Die in ihnen relevanten Kompetenzerwartungen lassen sich über konkrete Anforderungen definieren. Darüber hinaus unterliegen diese Anforderungen einem Wandel. Diesen Tatsachen trägt der Studientext Rechnung, indem er die relevanten Lebenssituationen konturiert und die Anforderungen vor dem Hintergrund aktueller sozioökonomischer Entwicklungen identifiziert und legitimiert.

2 www.welt.de/finanzen/article125102062/Bargeld-und-EC-Karte-verschwinden-im-Jahr-2018.html Zugriff 30.10.2014
3 www.grundbildung.de/fileadmin/redaktion/pdf/Neue_Medien/Flyer_iwl_2010_DEUTSCH.pdf, Zugriff: 15.10.2014

Zwischenfazit zur Grundbildung
In den mittlerweile üblichen weiteren Definitionen von allgemeiner Grundbildung werden neben den Fähigkeiten in Rechnen, Lesen und Schreiben zusätzlich soziale, personale und informationstechnologische Grundkenntnisse integriert. Im Vordergrund stehen die Entwicklungsmöglichkeiten des Einzelnen (Tröster 2000, 13). Hinsichtlich der angestrebten Kompetenzen lässt sich auf der allgemeinen Ebene formulieren:

- Grundbildung befähigt zur Lebensbewältigung in Alltagssituationen und zur gesellschaftlichen Partizipation.
- Die Anforderungen an Grundbildung im Allgemeinen ändern sich aufgrund objektiver Veränderungen der gesellschaftlichen Rahmenbedingungen.
- Für das Individuum ändern sie sich zudem aufgrund subjektiver Bedarfsänderungen (individuelle Biographien).
- Aus diesem Grund soll der Kern ökonomischer Grundbildung durch situationsübertragbare Kompetenzen definiert werden. Auch wenn sie also auf die Bewältigung konkreter Situationen (z.B. Kreditaufnahme wegen Anschaffung eines bestimmten Gebrauchsgutes) zielt, vermittelt sie Kompetenzen, die eine Alltagsbewältigung in ähnlich gelagerten Situationen erlaubt.

1.2 Inhalte und Ziele des Studientextes
Im weiteren Text werden Sie sich zunächst damit auseinandersetzen, was unter ökonomischer Bildung im Allgemeinen zu verstehen ist. Sie werden eine mögliche Differenzierung dieses Kompetenzfeldes in drei unterschiedliche Bereiche kennen lernen.

Im nächsten Schritt wird die zentrale Frage, wozu ökonomische Grundbildung benötigt wird, aus unterschiedlichen – sich teilweise überlappenden – Perspektiven intensiv diskutiert. Es geht hier um eine umfassende Analyse der Bedarfe und Bedingungen, die ökonomische Grundbildung besonders notwendig machen.

Vor diesem Hintergrund lässt sich dann eine Bestimmung ökonomischer Grundbildung entwickeln, die in die Unterscheidung von grundlegenden Rollen bzw. Anforderungsbereichen mündet: jene der Verbraucher, der Erwerbstätigen und der Wirtschaftsbürger. Der Abschnitt schließt mit ersten übergreifenden Kompetenzdefinitionen zu diesen Bereichen.

Nachdem so der inhaltliche Rahmen geschaffen wurde, werden zuerst die genannten Rollen intensiv beschrieben – wobei der Verbraucher aus pragmatischen Gründen in einen Konsumenten und einen Finanzkunden aufgeteilt wird. Dann werden Sie weitere kompetenztheoretische Grundlagen kennenlernen, um im Ergebnis eine differenzierte Übersicht über die Kompetenzziele der ökonomischen Grundbildung nachvollziehen zu können.

Vor diesem Hintergrund wird dann das Angebot „Leben und Geld“ des Deutschen Volkshochschulverbandes gewürdigt.

Eine theoretisch und praktisch wichtige Perspektive soll mit den Herausforderungen angesprochen werden, denen sich ökonomische Grundbildung gegenüber sieht. Es geht nicht um konkrete didaktisch methodische Fragestellungen, sondern allgemein um das Spannungsfeld, das sich durch die an Grundbildung gerichteten Erwartungen und durch die tatsächlich bei Erwachsenen vorhandenen Bereitschaften und Fähigkeiten ergibt.

Diesem Problemaufriss folgt einer Darstellung der bestehenden Angebote. Auch die Angebotsstruktur stellt letztlich ein Problem dar, denn sie weist relevante Lücken auf.

In der Schlussbemerkung wird kurz das Verhältnis von ökonomischer Grundbildung und anderen Grundbildungsbereichen reflektiert. Einerseits ist ökonomische Grundbildung abhängig von grundlegenden Lese- und Rechenfähigkeiten. Andererseits können Lernprozesse im Bereich der (notwendigen) ökonomischen Grundbildung einen geeigneten (u. a. motivationalen) Rahmen für Alphabetisierungsprozesse etc. bilden.

Der folgende Studientext beruht zu größeren Teilen auf Ergebnissen, die die Autoren im Rahmen einer durch das BMBF initiierten und unterstützten Forschungswerkstatt zur ökonomischen Grundbildung für Erwachsene entwickelt haben (Weber u.a. 2013). Während sich die Autoren dort insbesondere mit der Frage beschäftigt haben, wie sich Inhalte ökonomischer Grundbildung systematisch bestimmen lassen, wurden von der Prognos AG und dem Deutschen Institut für Erwachsenenbildung die Zielgruppen und die Anbieter ökonomischer Grundbildung untersucht. Im Folgenden werden auch zentrale Ergebnisse dieser Analysen wiedergegeben.

2. Was versteht man unter ökonomischer Bildung?

Für die allgemeinbildenden Schulen wird seit langem diskutiert, ob ökonomische Bildung gelehrt werden sollte und wenn ja, welchen Stellenwert sie im Fächerkanon haben sollte. In der Konsequenz führt wirtschaftliche Bildung in manchen Bundesländern ein Dasein im Schatten der politischen Bildung, steht dieser manchmal aber auch gleichwertig zur Seite oder ist gar in einem eigenen Fach vertreten. Die Diskussion zwischen Befürwortern und Gegnern einer eigenständigen ökonomischen Bildung dreht sich im Grunde immer um zwei Punkte, die für unsere Definition von Bedeutung sind: Gibt es erstens eine eigene ökonomische Weltsicht, die sich von der anderer Perspektiven klar unterscheidet? und zweitens – ist die Vermittlung einer solchen Sichtweise vereinbar mit dem Bildungsgedanken? Die Beantwortung beider Fragen ist auch für die Erwachsenenbildung von Relevanz.

Wenn man von einer speziellen ökonomischen Bildung spricht, muss diese sich von beispielsweise einer politischen oder geographischen Bildung abgrenzen lassen, obwohl beide Fachgebiete sich unter anderem auch mit dem Gegenstand Wirtschaft beschäftigen. Sie unterscheidet sich in der ihr eigenen Perspektive, in welcher sie die Welt betrachtet.

Um zu erkennen, was mit Perspektive gemeint ist, ist es am Einfachsten sich zunächst einmal darauf zu besinnen, was eigentlich ‚Wirtschaften' bedeutet. Der Begriff Ökonomie entspringt dem Altgriechischen, in dem ‚Oikos' Haushalt bedeutet. In diesem Sinne ist eine Person, die wirtschaftet, eine, die haushält. Sie muss namentlich mit ihren knappen Mitteln haushalten. Da wir nicht im Schlaraffenland leben, in dem uns die gebratenen Tauben zufliegen, ist die Knappheit von Ressourcen – Geld, Zeit, Rohstoffe, Arbeitskraft u.v.m. – ein alltägliches Phänomen. Deshalb müssen alle Menschen wirtschaften. Wenn wir außerdem die Wirtschaftswissenschaft als Bezugswissenschaft für eine ökonomische Bildung heranziehen, dann heißt Wirtschaften darüber hinaus, den Umgang mit Knappheit möglichst effizient zu gestalten. Aus diesem Grund ist der optimale, also effiziente Umgang mit Knappheit mit der ökonomischen Perspektive gleichzusetzen. Um die Effizienz von Entscheidungen beurteilen zu können, muss der Ressourceneinsatz ins Verhältnis zum erwarteten oder erreichten Nutzen gesetzt werden. Wenn die Handelnden das tun, spricht die Ökonomie von einem rationalen Vorgehen.

Auf der anonymen Ebene von nationalen Volkswirtschaften und im weltumspannenden Handel gelten den Ökonomen Märkte als die geeignete Verteilungsinstanz, die eine effiziente Zuteilung von Gütern gewährleistet. Märkte bedürfen aber wiederum Regeln, denn die Ergebnisse, die sie in der Realität zustande bringen, sind keineswegs immer erwünscht – weder sozial, noch unbedingt ökonomisch, wie die Finanzkrise einmal mehr gezeigt hat. Deshalb, und weil andere gesellschaftliche Ziele wie Freiheit, Gerechtigkeit und Sicherheit jenem der individuellen Nutzen-Effizienz vor- oder zumindest beigeordnet sind, greift der Staat in das Wirtschaftsgeschehen ein.

Was also der Nutzen ist, dem das Streben nach Effizienz gilt, definieren wir selbst. Auf der persönlichen Ebene tun wir das über die Werte, die uns wichtig sind. Diese hängen wiederum von unserem direkten sozialen Umfeld und auch von gesellschaftlichen Wertvorstellungen ab. Letztere im Kontext des Wirtschaftens zu gewährleisten, ist die Aufgabe der Wirtschaftsordnung.

Grundsätzlich ist der effiziente Umgang mit knappen Ressourcen mit ethischen Überlegungen vereinbar. Ökonomisches Handeln soll einer menschenwürdigen Lebensführung dienen. Es soll Individuen die Befriedigung ihrer existenziellen (und darüber hinausgehenden) Bedürfnisse erlauben und zugleich Belange des gesellschaftlichen Zusammenlebens unterstützen. Wer wollte denn Verschwendung als Zielsetzung im Umgang mit knappen Ressourcen vorgeben? Wer wollte nicht, dass der Staat die nicht (!) ökonomisch gesetzten Ziele zum Beispiel in der Familienpolitik oder der Sozialpolitik möglichst unter einem verantwortlichen und effizienten Einsatz der von uns zur Verfügung gestellten Geldmittel verfolgt? Wer wollte nicht effizient Ressourcen schonen, um nachfolgenden Generationen eine lebenswerte Welt zu hinterlassen? Wirtschaften ist also Mittel zum Zweck, nicht Selbstzweck.

Deshalb sind in der ökonomischen Bildung Inhalte und Wissen nicht grundsätzlich von sozialer Verantwortung und Werten zu trennen. Ziel der ökonomischen Bildung ist dann die Befähigung zur mündigen, sachkompetenten und verantwortungsvollen Bewältigung ökonomisch geprägter Lebenssituationen. Mit diesem Anspruch ist zugleich die zu Beginn des Abschnitts gestellte Frage nach dem Bildungswert ökonomischer Bildung zumindest teilweise beantwortet. Mündigkeit, Sachkompetenz und Verantwortung sind typische Kategorien, mit denen beschrieben wird, was eigentlich Bildung ausmacht. Und dieser Bildungsanspruch besteht auch in der Erwachsenenbildung.

2.1 Zur Differenzierung ökonomischer Kompetenzen

Ein 2012 veröffentlichtes Kompetenzmodell (Seeber u.a. 2012) will diesem Anspruch gerecht werden. Es ist Ausgangspunkt für die später zu bestimmenden Kompetenzziele der ökonomischen Grundbildung und soll deshalb kurz erläutert werden. Es versucht die Bestimmung der ökonomischen Bildungsdomäne in drei Kompetenzbereichen abzubilden, die mit den Begriffen ‚Entscheidung und Rationalität', ‚Beziehung und Interaktion' sowie ‚System und Ordnung' überschrieben sind. Der erste Bereich steht für die Fähigkeit, für sich selbst zu wirtschaften; der zweite dafür, zu erkennen, dass dies in einer sozialen Umgebung geschieht und der dritte schließlich für eine sachgerechte Urteilsbildung angesichts gesellschaftlicher Rahmenbedingungen. Die nachfolgende Tabelle zeigt die mit den Kompetenzbereichen verbundenen Teilkompetenzen und charakterisiert die Inhalte sehr kurz.

Tabelle 1: **Skizze des zugrundeliegenden Kompetenzmodells**

Kompetenzbereiche	Teilkompetenzen	Situationen
Entscheidung und Rationalität (des Einzelnen)	• Situationen analysieren • Handlungsalternativen bewerten • Handlungsmöglichkeiten gestalten	Menschen treffen ökonomisch begründete Entscheidungen und verfolgen ihre eigenen legitimen Interessen bestmöglich.
Beziehung und Interaktion (mit Anderen)	• Interessenkonstellationen analysieren • Kooperationen analysieren, bewerten und gestalten • Beziehungsgefüge analysieren	Wirtschaftliches Handeln findet in einem sozialen Kontext statt. Der ökonomisch gebildete Mensch berücksichtigt verantwortungsvoll die Interessen, Wünsche und Werte anderer, wenn er in wirtschaftlicher Absicht interagiert.
Ordnung und System (des Ganzen)	• Märkte analysieren • Wirtschaftssysteme und Ordnungen analysieren • Politik ökonomisch beurteilen und gestalten	Voraussetzung für verantwortungsvolles Handeln und Urteilen ist die sachgerechte Analyse, damit für den gewünschten Zweck die adäquaten Mittel gewählt werden. Dies gilt auf allen Ebenen und somit auch auf der System- und Ordnungsebene.

Im Vordergrund bei der Umsetzung dieser Vorgaben steht in der Grundbildung sicherlich das Handlungswissen und weniger ein theoretisches und politisches Wissen. Sie wird individuelle Auswahlentscheidungen und damit die Akteursperspektive des ersten Kompetenzbereiches in den Vordergrund stellen. Auch im Kompetenzbereich ‚Beziehung und Interaktion' stehen wieder die eigenen Erfahrungen als Konsumenten und beim wirtschaftlichen Handeln im privaten Haushalt im Mittelpunkt sowie Probleme der Arbeitswelt. Wirtschaftliche Systemzusammenhänge übersteigen, von ersten Ansätzen abgesehen, die für eine Grundbildung sinnvolle und mögliche ökonomische Bildung. Sie werden aber mit Blick auf wirtschaftsbürgerliche Partizipationsanforderungen nicht ganz außen vor bleiben können.

Die Differenzierung der Bereiche liefert so zwar den konzeptionellen Hintergrund für die folgenden Darstellungen, wird aber als Strukturierungsprinzip nicht direkt genutzt.

Allgemeine ökonomische Bildung vermittelt Wissen und Kompetenzen, die zur Partizipation in der Gesellschaft, vor allem aber für die Gestaltung des eigenen Lebens grundlegend sind. Damit schließt sie – als grundlegendes Element – Verbraucher-, Erwerbstätigen- als auch Wirtschaftsbürgerbildung ein.

3. Wozu braucht man ökonomische (Grund)Bildung?

Bisher war von einer zunehmenden Komplexität der Lebensbedingungen und von der dadurch sich schwieriger gestaltenden Alltagsbewältigung die Rede. Was heißt eigentlich in diesem Zusammenhang Komplexität? Nehmen wir das Beispiel der Altersvorsorge. Seit Jahren weisen die Regierungen unterschiedlicher parteipolitischer Couleur auf die Notwendigkeit der privaten Alterssicherung hin. Die Menschen sollen möglichst früh beginnen, selbstständig für ihr Alter vorzusorgen. Nun bieten die Banken und andere Finanzunternehmen eine Vielzahl von Produkten mit unterschiedlichen Konditionen an. Hinzu kommen die staatlichen Fördermöglichkeiten, die je nach persönlicher Situation, wie z.B. der Einkommenshöhe, sinnvoll in Anspruch genommen werden können oder auch nicht. Tatsächlich weiß man aber, dass sich viele Menschen nicht um weit entfernt liegende Eventualitäten kümmern (wollen). Wer zum Beispiel für seine Altersvorsorge spart, sollte die Geldentwertung durch die Inflation berücksichtigen. Dazu muss man wissen, dass der Wert des Einkommens, gemessen in seiner Kaufkraft, heute höher ist als zum Beispiel im Jahr 2040. Die alljährlich von der Deutschen Rentenversicherung verschickte Renteninformation weist darauf hin. Die meisten Versicherten, so zeigen empirische Untersuchungen, lesen diese Hinweise aber gar nicht (Haupt 2014).

Ein weiteres Beispiel liefert eine Untersuchung der EU-Kommission (2012), die 2011 in allen Mitgliedstaaten 562 Websites prüfte, die online Verbraucherkredite anboten. Wegen vielfältiger Mängel wurden insgesamt 70% der Seiten beanstandet; in Deutschland 20 von 26 (77%). Es fehlten zum Beispiel gesetzlich vorgeschriebene Angaben, systematische Aufgliederungen der Kreditkosten in ihre Bestandteile und Angaben zur Vertragslaufzeit. Auf 20% der Websites waren gar irreführende Angaben zu finden. Hier wird offensichtlich, dass die Nutzer jenseits des Vertrauens auf einen Schutz durch staatliche Normen eigenes Orientierungs- und Sachwissen benötigen: Welche Rechte habe ich? Wie finde ich weitere Angebote?
Wie lassen sich diese vergleichen? Usw.

Dies gilt umso mehr, als die Konsumfinanzierung über Kredite ein wachsendes Volumen verzeichnet. 2011 hatten die Banken in Deutschland Konsumkredite in Höhe von 230 Mrd. Euro vergeben. Gleichzeitig verharrt die Zahl der Überschuldungen bei deutschen Haushalten ungefähr auf dem 2007 erreichten Höchststand: 2010 waren mehr als drei Millionen Haushalte überschuldet, wenn auch die durchschnittliche Schuldenlast von 32.000 auf 27.000 Euro gesunken war (Knobloch, Reifner 2011, 11 u. 33).

3.1 Subjektive Bedarfe ökonomischer Grundbildung

Subjektive Bedarfe entstehen bei den Menschen, wenn sie selbst Wissenslücken erkennen. Allerdings muss hinzugefügt werden, dass die Erkenntnis über ein fehlendes Wissen nicht zwingend in eine Nachfrage nach Bildungsangeboten mündet. Die Motivation und Bereitschaft sind eher gering. „37% der Befragten geben … an, keine Lust zu haben, sich mit wirtschaftlichen Fragen auseinanderzusetzen – in umso stärkerer Ausprägung, je weniger Wissen existiert.“ (Weber u.a. 2013, S. 22) Dem grundsätzlichen Bedarf steht zudem in der Breite kein entsprechendes Angebot gegenüber, das die Menschen nutzen könnten, auch wenn Sparkassen, Versicherungsträger und öffentliche Einrichtungen auf spezielle Probleme zugeschnittene Veranstaltungen anbieten.

Fragt man die Menschen, wie sie ihre ökonomischen Kenntnisse selbst einschätzen, dann geben sie auf dieser allgemeinen Ebene eher an, diese seien sehr hoch. Tatsächlich muss bei ca. 20% der Bevölkerung aber eher davon ausgegangen werden, dass sie gering sind (Pfeiffer u.a. 2013, 57). Bei einer Befragung des Bankenverbandes gaben so auch 50% der Menschen an, in Fragen von Geld und Finanzen nicht oder nicht sonderlich versiert zu sein (Bankenverband 2012).

3.2 Objektive Bedarfe ökonomischer Grundbildung

In den Befragungen unterschiedlicher Zielgruppen ergibt sich seit Jahren ein überwiegend unzureichender Kenntnisstand in Bezug auf wirtschaftliche Phänomene. Das gilt übrigens nicht nur für Deutschland, sondern in anderen Ländern der EU ebenso wie in den USA. Für Schülerinnen und Schüler zeigen dies erneut die aktuell veröffentlichten Ergebnisse der letzten PISA-Studie. 15% von ihnen sind schlechter als das von den Testern festgesetzte Basisniveau – das Wissen, über das die Schülerinnen und Schüler auf jeden Fall verfügen sollten (OECD 2014, 14).

Graduelle Unterschiede bzgl. des Kenntnisstands verlaufen entlang der Kriterien Alter, Geschlecht, Herkunft, Einkommen und Vermögen, Beruf, Bildung und Krisensituationen (Arbeitslosigkeit, Überschuldung etc.). So besitzen Menschen mit höherem Einkommens- und Bildungsniveau überwiegend einen besseren Wissenstand zu wirtschaftlichen/finanziellen Themen. Generell lassen sich vor allem Menschen mit geringer Bildung und geringem Einkommen als Zielgruppe mit einer größeren Wissenslücke identifizieren. Werden Frauen und Männer getestet, schneiden die Frauen bezüglich des Wissens üblicherweise schlechter ab. Zugleich weiß man aber, dass Frauen in der Regel Geld langfristig erfolgreicher, weil risikoärmer anlegen.

Harte Fakten, wie das Sparverhalten (natürlich auch abhängig von den finanziellen Möglichkeiten) oder die Aufnahme von Konsumentenkrediten, legen nahe, dass gerade bei einkommensschwächeren Haushalten ein Bedarf an Strategien im Umgang mit Geld besteht. Dieser wird durch die Tatsache verstärkt, dass viele mit keiner anderen Person – auch nicht aus dem eigenen sozialen Umfeld – über finanzielle Probleme reden (Weber u.a. 2013, 21).

> Fast alle Umfragen ergeben ein relativ niedriges Gesamtniveau an ökonomischer bzw. finanzieller Bildung in der Bevölkerung, und zwar über alle Gruppen und Schichten hinweg. Dabei klaffen Selbsteinschätzung und Testergebnisse häufig auseinander. Gerade Menschen mit einem niedrigen sozioökonomischen Status und bildungsferne Schichten haben häufig Wissensdefizite.

3.3 Die Notwendigkeit ökonomischer Grundbildung

Die heutigen gesellschaftlichen Bedingungen sind in besonderer Weise ökonomisch geprägt. Dies rechtfertigt die Forderung ökonomische Grundbildung mit in den Fokus allgemeiner Grundbildungsanstrengungen zu rücken. Im Folgenden werden einige zentrale Entwicklungen genannt, die für diese ökonomische Prägung verantwortlich sind.

- Das Marktgeschehen wird für die Verbraucher immer komplexer. Insbesondere die Informationsflut, die Virtualisierung und die Deregulierung des Marktgeschehens und die steigende Anzahl an Produkten erhöhen den Orientierungsbedarf.
- Die Produkte selbst, insbesondere im Bereich der Finanzprodukte, werden immer komplexer.
- Die zunehmende Überschuldung der Haushalte ist nicht nur Ausdruck einer mangelhaften ökonomischen Rationalität, sondern stellt für bestimmte soziale Gruppen ein prinzipielles Risiko dar.
- Lebensrisiken werden durch die Finanzwirtschaft zunehmend vermarktlicht.
- Die veränderten institutionellen Bedingungen gerade im Bereich der finanziellen Vorsorge fordern entsprechend dem Einzelnen mehr Eigenverantwortung ab.
- Soziale und ökologische Veränderungen im Zuge der zunehmenden Globalisierung lassen ethische Konsumentscheidungen wichtiger werden. Damit werden die Anforderungen – in diesem Fall normativ an den Verbraucher herangetragen – noch komplexer.

- Die Arbeitsbeziehungen und Arbeitsverhältnisse, die zum einen gerade Menschen mit Bildungsdefiziten vor große Probleme stellen, wandeln sich; u. a. steigt die Eigenverantwortung hinsichtlich der Gestaltung der Berufsbiographie, inkl. der Option eine selbständige Tätigkeit auszuüben.
- Politische Fragestellungen und Entscheidungen sind zunehmend von ökonomischen Aspekten durchdrungen.

3.4 Für welche Zielgruppen ist ökonomische Grundbildung besonders notwendig?
Im Rahmen einer durch das BMBF initiierten und unterstützten Forschungswerkstatt zur ökonomischen Grundbildung für Erwachsene (2011) wurde durch Prognos eine Analyse der Zielgruppen vorgenommen. Im Kontext dieses Studienbriefes geht es diesbezüglich – mit präventiver und kurativer Perspektive – um die Frage, welche Bedarfe aus spezifischen Risikofaktoren in bestimmten Lebensphasen und Situationen (Arbeitssuche, Scheidung, Alleinerziehendenstatus, Alter, Konsumschulden etc.) entstehen.

Zur Definition der Zielgruppen ökonomischer Grundbildung finden sich in der Literatur unterschiedliche Bestimmungskriterien. Die am weitesten gehende Definition unterstellt generell einem Großteil der Bevölkerung einen Bedarf an ökonomischer Grundbildung. Hierfür werden makroökonomische Veränderungen verantwortlich gemacht, die eine verstärkte Eigenverantwortung und damit einhergehend auch einen erhöhten Bedarf an ökonomischer Bildung der Einzelnen einfordern. Darüber hinausgehend lassen sich Zielgruppen aber auch aufgrund von soziodemographischen Merkmalen definieren. Als maßgebliche Merkmale gelten hierbei das Geschlecht, das Alter, der Bildungsstatus, das Einkommensniveau sowie das Herkunftsland. Demnach gelten als Risikogruppen insbesondere Frauen – u. a. aufgrund eines im Vergleich zu Männern niedrigeren Einkommensniveaus und eines häufiger durch Unterbrechungen oder Teilzeitarbeit gekennzeichneten Erwerbslebens. Zu den Risikogruppen zählen weiterhin Menschen in Krisensituationen (z.B. Arbeitslose), Migranten sowie junge Menschen, die aufgrund der Veränderungen des Rentensystems und der Selbstüberschätzung der eigenen Informiertheit Gefahr laufen, von Altersarmut betroffen zu werden (siehe hierfür Prognos AG 2012, 17ff).

Eine solche Zielgruppentypologie anhand soziodemographischer Merkmale ist jedoch nicht ausreichend, um den Bedarf an ökonomischer Grundbildung in der Bevölkerung ausreichend zu erfassen: „Mit Oberbegriffen wie „Frauen“, „Geringverdiener“ etc. werden letztlich Lebensumstände zusammengefasst, die nicht allein durch soziodemografische Merkmale definiert werden können, sondern denen komplexere variable Lebenslagen zugrunde liegen. So impliziert die Benennung „Frauen“ das Zusammenspiel von geringerem Einkommen und spezifischen Anforderungen, z.B. an die ökonomische Sicherung im Alter aufgrund von Zeiten ohne Erwerbstätigkeit etc.“ (ebd., 34) Die Prognos-Autoren verweisen vielmehr – nur auf den ersten Blick trivial – darauf, dass „ein Bedarf an ökonomischer Grundbildung immer dann [entsteht], wenn die verfügbaren Ressourcen der Person nicht ausreichen, um ökonomische Herausforderungen, die im Zusammenhang mit unterschiedlichsten Lebensereignissen auftreten, zu bewältigen.“ (ebd., S. 35) Als solche Ressourcen führen sie auf:

- die ökonomische Kompetenz der Betroffenen,
- den Zugang zu externer Unterstützung wie Beratungsstellen und anderen Informationsquellen,
- die persönliche wirtschaftliche Lage (u.a. Sparvermögen, Schulden- und Einkommenssituation).

Ein Mangel an diesen Ressourcen kann dazu beitragen, dass Personen grundsätzlich einen erhöhten Bedarf an ökonomischer Grundbildung aufweisen. Aber auch neue Lebenssituationen, wie z.B. Familiengründung oder Selbständigkeit, stellen sich als Risikofaktoren für die eigene ökonomische Situation heraus: „Zwar werden ökonomische Entscheidungen tagtäglich getroffen, besondere Bedeutung erhalten die verfügbaren Ressourcen jedoch insbesondere dann, wenn es zu einer plötzlichen Verschlechterung der Einkommenssituation kommt, wie z.B. durch den Verlust des Arbeitsplatzes, einer Erkrankung oder Scheidung. Sobald der finanzielle Spielraum geringer wird werden ökonomische Fehlentscheidungen schnell existenzbedrohend. Die Veränderung der Lebenslage und ökonomischen Rahmenbedingungen stellt daher ein ökonomisches Risiko dar, das eine unmittelbare Kompensation erforderlich macht.“ (ebd., S. 36)

Die von Prognos im Rahmen der Forschungswerkstatt für ökonomische Grundbildung für Erwachsene durchgeführte ‚Zielgruppenanalyse‘ unterscheidet vier verschiedene Zielgruppen danach, ob sie einerseits einen hohen subjektiven und andererseits einen hohen objektiven Bedarf an ökonomischer Grundbildung haben. Die Bedarfe sind hierbei sehr nahe an direkten lebenspraktischen Herausforderungen (Familiengründung bzw. Scheidung, Berufsunfähigkeit, Immobilienkauf etc.) orientiert. Damit bleiben wirtschaftsbürgerliche Bildungsbedarfe weitgehend unberücksichtigt. Weiterhin sind die Bedarfe stark finanziell geprägt. Die Schätzung der Anteile der einzelnen Gruppen an der Bevölkerung fußt auf der Auswertung verschiedener Studien, weist aber angesichts seiner Allgemeinheit und wegen der nur unscharfen Zuordnungen lediglich breite Korridore aus, die aber einen klaren Eindruck für deren Verhältnis untereinander vermitteln.

Die (insgesamt größte) Gruppe mit sowohl geringem subjektivem wie objektivem Bedarf fällt als ‚Zielgruppe‘ logischerweise aus, und ein staatlicher bzw. institutioneller Handlungsbedarf ist entsprechend nicht gegeben. Für die Gruppe mit einem geringen objektiven, jedoch mit hohem subjektivem Bedarf könnten sich Bildungsangebote marktseitig entwickeln. Diese Menschen werden situationsbezogen Rat oder Informationen suchen.

Im Hinblick auf gesellschaftliche Handlungsbedarfe konzentriert sich die Zielgruppenanalyse auf die Gruppe(n) mit einem hohen objektiven Grundbildungsbedarf. Was diese Personen betrifft, ist hier die Unterscheidung, ob dieser Bedarf auch subjektiv wahrgenommen wird oder nicht, für die folgenden Handlungsstrategien von zentraler Bedeutung, denn danach richtet sich insbesondere die Strategie, mit welcher die Menschen angesprochen werden können.

Für die (kleinste) Gruppe, die vor dem Hintergrund eines objektiven Bedarfes auch einen subjektiven wahrnimmt, besteht die Aufgabe insbesondere darin, die Passung von Angebot und Nachfrage zu gewährleisten, z.B. in Form von Beratungs- oder Lotsensystemen, oder durch die Unterstützung weiterer Angebotsstrukturen.

Die problematischste Gruppe besteht aus denjenigen, die zwar einen objektiven Bedarf haben, für sich aber keinen erkennen (wollen), weil ihnen z.B. ihre Wissensdefizite nicht bewusst sind, oder weil ihnen die Motivation fehlt (z.T. auf Grund von Selbstüberschätzung), sich mit diesem Problem auseinanderzusetzen.

Der Volkshochschulverband hat für sein Lernportal zur ökonomischen Grundbildung in Anlehnung an die Milieustudien des SINUS-Instituts die Milieus der „Konsum-Materialisten“ und der „Hedonisten“ als jene identifiziert, zu welchen bildungsferne schichten am ehesten zugeordnet werden können. Sie verfügen meist über eine einfache Formalbildung und selten über eine abgeschlossene Berufsausbildung. Sie haben also eingeschränkte berufliche Entwicklungsmöglichkeiten, sind häufiger von Arbeitslosigkeit betroffen und haben eingeschränkte finanzielle Mittel. Zugleich neigen sie zu einem ausgeprägten und unreflektierten Konsumverhalten.[4]

4 Deutscher Volkshochschulverband (Hrsg.), Projekt Ökonomische Grundbildung im DVV-Lernportal. Methodisch/didaktisches Konzept (unveröffentlicht).

Vor diesem Hintergrund formuliert Prognos in der Zielgruppenanalyse eine Reihe von Herausforderungen. Zu nennen sind insbesondere:

- Wie können die einzelnen Zielgruppen für die Notwendigkeit adäquater ökonomischer Grundbildung sensibilisiert werden?
- Wie und wo – ggf. über welche Multiplikatoren – können diese Personen am besten angesprochen werden?
- Welche Rolle können Neue Medien in diesem Rahmen spielen?
- Wie können präventive Ansätze erfolgreich gestaltet werden?
- Wie können Bildungsangebote allgemein so gestaltet werden, dass eine geringe Motivation und Selbstüberschätzung hinreichend kompensiert werden?

Der vorangegangene Text hat Bedarfe für alle Bevölkerungsgruppen offenbart. Während jedoch für Viele, die spezifische Angebote zum Beispiel zur Altersvorsorge benötigen, sich ein marktgeneriertes Angebot bildet, oder sie sich sachgerecht mit Beratungsangeboten auseinandersetzen können, bleibt die Zielgruppe der Bildungsfernen jene Bevölkerungsgruppe, für welche i.d.R. öffentlich bzw. gemeinnützig finanzierte Träger Angebote entwickeln (sollten). Diese Zielgruppe hat einen objektiven Bildungsbedarf.

3.5 Ökonomische Bildung als Grundlage der Selbstverwirklichung

Ökonomie ist allgegenwärtig und damit für die individuelle Lebensgestaltung und die soziale Interaktion bedeutsam. Jedes Individuum muss wirtschaften, um seine Bedürfnisse befriedigen zu können. Bildung soll auch zur *praktischen Lebensbewältigung* beitragen. Sie will den Menschen dazu befähigen, den ihm sich stellenden Anforderungen durch ökonomische Sachzwänge mündig zu begegnen. Die Chancen zur persönlichen Entfaltung hängen deshalb auch davon ab, ob man in der Lage ist, rational mit den ökonomischen Herausforderungen umzugehen.

Eine Wirkung auf die *Persönlichkeitsentwicklung* entfalten in modernen Gesellschaften der *Konsum* und die Integration in die *Arbeitsgesellschaft*. Konsumstile können Ausdruck eines Lebensgefühls sowie Mittel zur Demonstration der sozialen Position oder der Gruppenzugehörigkeit sein. Die Werbung suggeriert zudem, der Besitz von Dingen sei gleichzusetzen mit persönlichen Werten. Das Auto steht dann zum Beispiel für Freiheit, die Versicherung für Sicherheit usw. Darüber hinaus sind die Konditionen für einen Ratenkauf verführerisch und viele können dieser Versuchung nicht widerstehen, obwohl langfristige Verpflichtungen möglicherweise nicht ihren finanziellen Möglichkeiten entsprechen.

Arbeit und Beruf haben eine herausragende Bedeutung für die Persönlichkeitsentwicklung. Ökonomische Bildung soll dazu befähigen, die eigenen *Lebens- und Berufspläne* zu realisieren. Dabei unterliegen Berufe heute einer höheren Veränderungsdynamik als noch vor wenigen Jahrzehnten.

Ökonomische Grundbildung kann die ökonomische Leistungsfähigkeit der Bürger erhöhen, da sie dazu beiträgt, ein Verständnis für die Auswirkungen von *Veränderungen* zu schaffen. Daher werden gesellschaftlich relevante Veränderungsprozesse – in der Arbeitswelt, in der Geldgesellschaft, in der Konsumgesellschaft usw. – als Legitimation für ökonomische Grundbildung herangezogen.

3.6 Ökonomische Bildung als Bürgerbildung

Wirtschaften findet im Ordnungsrahmen der Sozialen Marktwirtschaft statt. Dieses Ordnungssystem ist entsprechend dem allgemeinen Wandel gestaltungsfähig und -bedürftig. Ökonomische Bildung als politische Bildung führt zur Beurteilungsfähigkeit institutioneller Bedingungen und zur Mitgestaltungsfähigkeit.

Die Begründungen für die schulische wie für die Erwachsenenbildung gleichen sich auch in diesem Feld. Aus ihnen lassen sich *Bildungsziele* ableiten. Bisher gibt es solche für Erwachsene nur in rudimentärer Form. Standards wurden lediglich in Kanada entwickelt (CFEE o. J.). In ihnen werden 24 zentrale ökonomische Konzepte aufgelistet, die jedoch keinem stringenten System folgen, was daran liegen mag, dass die Zusammenstellung auf der Basis von Ergebnissen aus Foren mit kanadischen Bürgern erstellt und weniger expertenbasiert entwickelt worden ist. Als Anwendungsfelder werden Ziele genannt, die zu weiten Teilen der Rolle des Wirtschaftsbürgers entsprechen, dann der des Erwerbstätigen und in geringem Maße das private Finanzmanagement betreffen. Hervorzuheben ist, dass diese Standards auch Attribute und Einstellungen definieren, die die ökonomische Handlungsfähigkeit einer Person steigern, wie z. B. Leidenschaft, Selbstvertrauen, Selbstwert, interne Selbstkontrolle, Einfühlungsvermögen. Des Weiteren werden Fähigkeiten/Fertigkeiten allgemeinerer Natur wie z. B. Problemlösungskompetenz, kreatives Denken, technologische Kompetenzen etc. aufgeführt. Im vorliegenden Text wird ebenfalls die Auffassung vertreten, ökonomische Bildung umfasse mehr als nur den Umgang mit Geld.

Aus den individuellen Bedarfen und aus sozialen Wertvorstellungen heraus ergibt sich, dass ökonomische Bildung nicht alleine darauf abzielt, Handlungsfähigkeit in konkreten wirtschaftlichen Problemlagen (z. B. Überschuldung, Arbeitslosigkeit) herzustellen, sondern darüber hinaus Bildungsansprüche (Persönlichkeitsentfaltung, Mitsprache) verfolgt. In vielen Fällen wird ökonomische Bildung auf finanzielle Bildung reduziert.

Die Deutsche Gesellschaft für ökonomische Bildung (DeGöB 2004, 5) hat im umfassenderen Sinne kurz und prägnant formuliert, was ökonomische Bildung bedeutet:

Das lernende Individuum soll befähigt werden, in ökonomisch geprägten Situationen und Strukturen des gesellschaftlichen Zusammenlebens angemessen zu entscheiden und zu handeln sowie an deren Gestaltung mitzuwirken, um eine lebenswerte Gesellschaft zu sichern und weiter zu entwickeln.

In vielen Veröffentlichungen steht die finanzielle Bildung im Zentrum ökonomischer Grundbildung oder wird sogar mit ihr gleichgesetzt. Der hier vorliegende Ansatz geht aber über eine Beschränkung auf finanzielle Bildung hinaus. Neben der finanziellen gibt die allgemeine wirtschaftliche Bildung die Kompetenzziele vor. Im nächsten Abschnitt werden wir diese näher bestimmen. Vorangehend ist aber nochmals zu beachten, dass Personen mit einem erhöhten Bedarf gerade jene sind, die klassischerweise auch Alphabetisierungsbedarf hätten. Mit Blick auf diese Menschen sollte berücksichtigt werden, dass ökonomische Grundbildung erst möglich ist, wenn fundamentale Kompetenzen vorhanden sind (bzw. wenn sie gemeinsam entwickelt werden):

- So ist es sicherlich notwendig, im Alltagsleben Verträge lesen zu können. Man benötigt also ein gewisses Maß an Literalität.
- Die ökonomischen Randbedingungen verändern sich ständig. Um sich darauf einzustellen, benötigt man Schlüsselkompetenzen wie Lernstrategien (selbstgesteuert) oder Kommunikationsfähigkeit.
- Und schließlich bedarf es numerischer Fähigkeiten. Schauen Sie sich einmal folgende Aufgabe an, die in vielen Untersuchungen zur finanziellen Bildung gestellt wurde (Lusardi, Mitchell 2007, S. 215):

„Let's say you have 200 dollars in a saving account. The account earns 10% interest per year. How much would you have in the account at the end of two years?"

78,5% der befragten erwachsenen US-Amerikaner gaben eine falsche Antwort. Auch wenn Deutsche in analogen Aufgaben etwas besser abschneiden, dürfte auch ihnen häufig das ökonomisch zentrale Wissen zum Zinseszinskonzept bzw. die Fähigkeit, Zinseszinsen einzukalkulieren, fehlen.

Für die angesprochene Klientel gilt es also nach Wegen zu suchen, um generelle Basisfähigkeiten anhand ökonomisch geprägter Lebenssituationen aufzubauen.

4. Was ist ökonomische Grundbildung?

Ökonomische Grundbildung ist eine wichtige Grundlage der Verbraucher- und Erwerbstätigenbildung, da sie Kompetenzen vermittelt, die sowohl Konsumenten als auch Erwerbstätige zur nachhaltigen Gestaltung des eigenen Lebens benötigen. Sie vermittelt darüber hinaus in Grenzen auch die Fähigkeit, den ordnungspolitischen Rahmen von Gesellschaft zu verstehen und mitgestalten zu können und ist daher ein wichtiges Fundament der Wirtschaftsbürgerbildung.

Die geschilderten Ansätze mit ihren unterschiedlichen Perspektiven und einigen Überschneidungen demonstrieren, dass Grundbildung begrifflich bzw. inhaltlich nicht eindeutig fixiert wurde. Wir bestimmen sie deshalb nun näher in Anlehnung an den Ansatz *Voraussetzung zur Lebensbewältigung*.

Neben der Differenzierung der drei Kompetenzbereiche erfolgt hierzu eine grundlegende Bestimmung ökonomischer Grundbildung einerseits über die Anforderungen in unterschiedlichen, aber typischen, ökonomisch geprägten *Lebenssituationen* (Anspruch) und anderseits über die Einschränkung auf »ökonomische« Kompetenzen (*Perspektive*).

Über die spezifische ökonomische Perspektive wurde oben schon geschrieben. Nun muss also noch bestimmt werden, welche Lebenssituationen eigentlich gemeint sind. In der Fachliteratur finden sich dazu unterschiedliche Herangehensweisen. So bezieht sich die ökonomische Bildung oft auf Lehrbuchdarstellungen und glaubt die Inhalte und Ziele über die gängigen Beschreibungen des Wirtschaftskreislaufs finden zu können. Dann werden das Wirtschaftshandeln der Privathaushalte, der Unternehmen, des Staates und die Beziehungen zum Ausland als Eckdaten herangezogen. Für eine Grundbildung ist das nicht zielführend – es soll ja kein Lehrbuchwissen weitergegeben werden.

Es findet sich auch die Unterscheidung von Lebensphasen, wie Aufnahme der Ausbildung, Familiengründung, Arbeitslosigkeit oder Hausbau. Diese Differenzierung ist aber in Hinsicht auf die situativen Anforderungen zu spezifisch, um ökonomische Grundbildung hinreichend allgemein zu definieren.

Ein bereits angedeuteter allgemein orientierter Ansatz geht dagegen davon aus, dass wirtschaftliches Handeln sich grundsätzlich auf Situationen der **Einkommensentstehung** (z. B. Ausbildung, selbstständige und unselbstständige Arbeit) und der **Einkommensverwendung** (z. B. Konsum, Steuern zahlen, Sparen) beziehe. Diese gilt es dauerhaft zu bewältigen. Zusätzlich zu diesen lebensweltnahen Situationen müsse die Wirtschaftsordnung noch in ihren Prinzipien verstanden werden. Ein seit einigen Jahren von vielen Autoren verfolgter Ansatz differenziert in ähnlicher Weise die Lebenssituationen über die Rollen, die wir Menschen einnehmen, und in denen wir notwendigerweise ökonomisch handeln. Auf einer recht allgemeinen Ebene werden folgende Rollen unterschieden: Verbraucher, Erwerbstätige, Bürger.

Bevor eine genauere Erläuterung dieser Rollen erfolgt, können an dieser Stelle (nochmals) folgende Rahmendaten zur Bestimmung ökonomischer Grundbildung fixiert werden:

- Ökonomische Grundbildung befähigt zur Lebensbewältigung und Lebensgestaltung in *ökonomisch geprägten Alltagssituationen*. Da eine konkrete Auflistung der Situationen nicht möglich bzw. nicht sinnvoll ist – dafür sind sie zu vielfältig und veränderlich – behelfen wir uns mit Typisierungen: den Rollen des Verbrauchers, des Erwerbstätigen und des Wirtschaftsbürgers.

- Ökonomische Grundbildung berücksichtigt sozioökonomische Veränderungen und deren Auswirkungen auf die Kompetenzanforderungen an die Menschen. Gesellschaftliche Normen und der Ordnungsrahmen für ökonomisches Handeln wandeln sich und damit auch die konkreten Bewältigungsstrategien in Alltagssituationen. Ökonomische Grundbildung beinhaltet aber eine Anpassungsfähigkeit an veränderte Rahmenbedingungen durch Kompetenztransfer. Das heißt gerade nicht, dass Menschen nur praktische und quasi zeitüberdauernde Bewältigungsstrategien benötigten, um dem Wandel zu begegnen. Darüber hinaus wird eine bürgerliche Partizipationsfähigkeit zum selbstständigen und gesellschaftlich verantwortlichen Umgang mit den Veränderungen angestrebt (siehe weiter unten: Wirtschaftsbürgerbildung).

- Ökonomische Grundbildung kann zwar spezielle Bedürfnisse adressieren, die in unterschiedlichen Lebensphasen auftreten. Grundsätzlich beinhaltet ökonomische Grundbildung für Erwachsene aber übergeordnete Problemzugänge. Um also den genannten Komponenten ökonomischer Grundbildung gerecht werden zu können, kombiniert sie Antworten auf konkrete Problemlagen mit einer übergeordneten Kompetenzorientierung. Welche Kompetenzen werden in einer Vielzahl von ihrer Problemstruktur her ähnlichen Lebenssituationen gefordert? Und wie passen sich Kompetenzen potentiellen Strukturveränderungen an?

- Ökonomisch geprägt sind Lebenssituationen, wenn sie einen rationalen und verantwortungsvollen Umgang mit Ressourcenknappheit erfordern. In erster Linie ist hier der Umgang mit den zur Verfügung stehenden Geldmitteln (Einkommensverwendung und -entstehung) zu sehen. Geld ist aber nur ein Mittel zum Zweck der gegenwärtigen oder zukünftigen Bedürfnisbefriedigung und erfüllt seine Funktionen als Zahlungsmittel, Wertmesser, Recheneinheit und Wertaufbewahrungsmittel. Auch wenn aus subjektiver Sicht heutzutage vorrangig Geld knapp ist, sind die eigentlich knappen Ressourcen die Güter und Dienstleistungen, die eingekauft werden, die materiellen Ressourcen der Haushaltsproduktion, Zeitressourcen u.a.m.

- Anders als bei Nutzung der Grundfertigkeiten, wie sie im Zuge von Alphabetisierungskursen angeboten werden, gibt es hinsichtlich ökonomisch geprägter Lebenssituationen immer einen zu berücksichtigenden Ordnungsrahmen. Ökonomische Grundbildung befähigt deshalb auch dazu zu erkennen, wie dieser Rahmen die individuellen Handlungsmöglichkeiten begrenzt. An diesem Punkt ist ökonomische Grundbildung das Fundament einer ökonomischen Allgemeinbildung.

- Nimmt man den Bildungsbegriff im traditionellen Verständnis als Vorgabe, dann zielt ökonomische Grundbildung nicht nur auf die Entwicklung von Wissen, sondern dient ebenfalls der Orientierungsfähigkeit und der Persönlichkeitsentwicklung. Die Befähigung, das eigene Schicksal in die Hand zu nehmen als bildungstheoretische Zielvorstellung, ist angesiedelt im Spannungsfeld von individueller Verwertbarkeit (auf dem Arbeitsmarkt, in der Geldanlage etc.) und generellem Bildungsanspruch.

Vor diesem Hintergrund gibt nun Tab. 3 eine übergreifende Darstellung der nach Rollen differenzierten Kompetenzanforderungen ökonomischer Grundbildung; einer allgemeinen Kompetenzdefinition folgt eine Erläuterung wesentlicher situativer Anforderungen. Diese Erläuterung werden im folgenden Kapitel weitergeführt sowie die einzelnen Teilbereiche legitimiert.

Tabelle 2: Kompetenzanforderungen ökonomischer Grundbildung

Verbraucher

Grundlegende Kompetenz:
Kauf-, Finanzierungs- und Absicherungsentscheidungen unter Berücksichtigung der aktuellen und zukünftigen eigenen Bedarfe planen, treffen und umsetzen sowie ein Bewusstsein für diese Handlungsmöglichkeiten haben.

Inhalte:
Ökonomische Grundbildung für Verbraucher umfasst finanzielle Grundbildung und Konsumentengrundbildung. Die Aufnahme eines Konsumentenkredits oder die Entscheidung für eine Geldanlage im Zuge der Vorsorgeplanung ebenso wie der Abschluss eines Kaufvertrags stehen beispielhaft für zugehörige Lebenssituationen. Es handelt sich also um Aspekte der Einkommensverwendung inklusive der eigenständigen Produktion von Gütern im Privathaushalt als Alternative zur Fremdleistung.

Typischerweise treten Verbraucher als Konsumenten, Geldanleger, Kreditnehmer, Versicherungsnehmer sowie Produzenten im eigenen Haushalt auf. Die klassische Verbraucherbildung gibt die ökonomische Perspektive deutlich wieder. Im Mittelpunkt stehen die Nutzung von Verbraucherinformationen und von Einkaufstechniken sowie die Planung der Haushaltsaufgaben. Aktuell wird diskutiert, inwieweit Fragen der Konsumorientierung, z. B. nachhaltiger Konsum und Konsumverzicht oder sozialorientierte Kriterien der Produktbewertung, als Zielkomponenten mit aufgenommen werden sollen. Grundbildung zielt somit generell auf die Fähigkeit zur rationalen und selbstbestimmten Konsumsteuerung.

Erwerbstätige

Grundlegende Kompetenz:
Möglichkeiten der Gestaltung der eigenen Erwerbsbiographie erkennen und zur selbstständigen Verwirklichung bereit sein.

Inhalte:
Die zu erwerbenden Kompetenzen erlauben die aktive Auseinandersetzung mit der eigenen Erwerbsbiographie. Grundlegend ist auch hier wieder die Befähigung zur selbstständigen Lebensgestaltung in der Arbeitsgesellschaft, so dass Schlüsselkompetenzen und Kenntnisse über arbeitnehmerrelevante Regelungen des Sozialsystems, die Vereinbarkeit von Familie und Beruf sowie Berufswahlentscheidungen hinzuzählen. (Ausdrücklich ausgeschlossen sind Spezialbildungen wie berufs- und betriebsbezogene Weiterbildung oder Existenzgründerkurse.) Hierher gehören Entscheidungen zur Einkommensentstehung, die auch solche zu Investitionen ins Humankapital beinhalten.

(Wirtschafts-)Bürger

Grundlegende Kompetenz:
Die Existenz und Wirkung ordnungspolitischer Setzungen auf die eigene (gegenwärtige und zukünftige) Situation als Verbraucher und Erwerbstätige und deren Veränderbarkeit erkennen sowie ggf. zur politischen Einflussnahme bereit sein.

Inhalte:
Grundsätzlich sind Wirtschaftsbürger als Teil eines gesellschaftlichen Ganzen zu sehen, zu dem sie in wirtschaftlichen Beziehungen stehen. Sie sollten deshalb in der Lage sein, nicht nur individuelle Kosten und Nutzen ökonomischer Handlungen zu sehen, sondern darüber hinaus auch die gesellschaftlichen Kosten und Nutzen. Wirtschaftsbürger erkennen zudem ihre Einflussmöglichkeiten auf unternehmerisches Handeln (z. B. durch Kaufentscheidungen), die Konsequenzen ihres Handelns für die Allgemeinheit (z. B. Umwelteffekte) und Möglichkeiten des Kooperierens zur Durchsetzung von Interessen (z. B. Verbraucherschutzorganisationen).

Als Grundbildung sollen hier solche Kenntnisse zählen, die einen konkreten Bezug zum alltäglichen Handeln im Rahmen der Einkommensentstehung oder der Einkommensverwendung haben. Wirtschaftsbürger sollten grundlegende Kenntnisse über ihre finanziellen Beiträge (z. B. Steuern, Sozialversicherungen) sowie über ihre Inanspruchnahme der Allgemeinheit durch Transferzahlungen (z. B. Kinderfreibeträge, Kostenübernahme bei Krankheit) oder durch die Nutzung öffentlicher Güter (z. B. Verkehrsinfrastruktur) haben. Sie wissen außerdem um konkrete staatliche Regelungen mit Bezug auf die Alltagssituation (z. B. hinsichtlich des Kaufvertrags, der Möglichkeiten zur eigenen Inanspruchnahme von Transferleistungen etc.). Ökonomische Grundbildung in diesem Kontext bietet die Basis für bürgerliches Engagement. Tiefergehende ordnungspolitische und systemische Kenntnisse sind Inhalt einer schulischen Allgemeinbildung bzw. einer Spezialbildung (z. B. IHK-Zertifikate u. ä.).

5. Facetten ökonomischer Kompetenzen als Grundbildung

Der Anspruch ökonomischer Grundbildung eine Grundbildung für alle Erwachsene zu sein, führt letztlich dazu, dass ihr Kern eine **Verbraucherbildung** ist, weil sich den damit verbundenen Kompetenzerwartungen in unserer heutigen Gesellschaft grundsätzlich alle Menschen in ähnlicher Weise gegenüber sehen. Unter den heutigen Bedingungen legt allerdings die Tatsache, dass man als ‚Verbraucher' sowohl mit dem Konsum von Gütern wie dem Umgang mit Geld konfrontiert ist, nahe, zwischen Konsumentenbildung und finanzieller Bildung zu unterscheiden.

Erwerbstätigenbildung fokussiert zwar auf die Erwerbsfähigen und so auf Kompetenzen eines kleineren Personenkreises, allerdings umfasst dieser zumindest potenziell alle Erwachsenen bis zum Rentenalter. Insbesondere aber auch weil Erwerbsarbeit eine „maßgebliche Voraussetzung und Grundlage von sozialer Inklusion und gesellschaftlicher Teilhabe" (Klein, Stanik 2009, 2) ist, muss sie als Teil von ökonomischer Grundbildung geführt werden.

Wirtschaftsbürgerbildung ist ebenso als notwendiger Teil zu betrachten, weil in einer Demokratie auch ein Grundbildungskonzept eine bestimmte Gruppe nicht von mündiger Partizipation ausnehmen bzw. ausschließen kann, sowie umgekehrt weil in einer Demokratie ein ‚Bedarf' an selbstbestimmten Bürgern, d. h. mit grundlegenden Wirtschaftskenntnissen, besteht. In modernen Demokratien sind intelligente politische Programme wahrscheinlicher, wenn die Wähler ökonomisch gebildet sind (Caplan 2004). Umgekehrt bleiben entsprechende öffentliche Debatten ohne ökonomische Grundbildung weitgehend unverständlich.
Diese Aspekte werden nun mit Blick auf die genannten vier Bereiche weiter erläutert.

5.1 Konsumentenbildung

Ein wesentliches Element ökonomischer Grundbildung bildet die Verbraucherbildung, da fast alle Erwachsenen zur Bewältigung des alltäglichen Lebens mit den einschlägigen Kompetenzanforderungen konfrontiert sind. Außerdem ist Konsum in heutigen (westlichen) Gesellschaften zu einem wichtigen Element des Selbstkonzepts geworden, trägt zur sozialen Inklusion bei und eröffnet darüber hinaus auch gesellschaftliche Gestaltungs- und Teilhabechancen. Neben dem individuellen Nutzen, die ein kompetenter Verbraucher hat, ist auch der gesellschaftliche Nutzen von gut informierten und kompetenten Verbrauchern zu berücksichtigen. So können Verbraucher dazu beitragen, Wettbewerb und Innovationsbereitschaft von Unternehmen zu fördern, indem sie qualitäts- und/oder preisbewusste Entscheidungen treffen und ihre Rechte zu vertreten wissen. Die Kompetenzanforderungen, die an Verbraucher gestellt werden, richten sich dabei nicht nur auf einen nachhaltigen Umgang mit Ressourcen im Hinblick auf das eigene Leben, sondern auch auf soziale und ökologische Konsequenzen des eigenen Handelns (z. B. UNESCO 2005).

Ziel der Verbraucherbildung ist es, eine „weitgehend verantwortliche, gleichberechtigte und erfolgreiche Teilhabe an der (Konsum-) Gesellschaft zu ermöglichen." (Schlegel-Matthies 2004,19) Entsprechend finden Inhalte ökonomischer Verbrauchergrundbildung sich in Bereichen, die mit den alltäglich benötigten Kompetenzen im Hinblick auf das Leben in Konsumgesellschaften verbunden sind (z. B. Abwicklung von Verträgen, Verbraucherrechte) sowie finanzielle Kompetenz und Medienkompetenz. Verbraucherbildung soll so zu möglichst eigenständigem und verantwortlichem Handeln befähigen und dabei gleichzeitig Kenntnis über entsprechende Unterstützungsmöglichkeiten vermitteln.

Zur Förderung der Konsumentengrundbildung bestehen zahlreiche nationale, europäische und internationale Projekte und Bildungsinitiativen, die den Verbrauchern notwendige Kompetenzen vermitteln sollen, um eigenverantwortlich und erfolgreich an der Gesellschaft teilhaben zu können.

So hat beispielsweise die EU die „consumer policy strategy 2007–2013“ verabschiedet, in der die Förderung der Verbraucherbildung einen wichtigen Stellenwert einnimmt.[5] Auch auf Bundes- und Länderebene finden sich regelmäßig Projekte zu Verbesserung der Verbraucherbildung. Da sich aber die meisten Initiativen zur Verbraucherbildung auf Schüler beziehen und es nur wenige Projekte gibt, die sich speziell an Erwachsene richten, bleibt die Aufgabe einer Konsumentengrundbildung virulent.

Im Bereich der Verbraucherbildung gibt es entsprechend der Breite des Themas sowie der Vielzahl der Projekte vielfältige Versuche der Inhaltsbestimmungen. So definiert die OECD in ihren Politikempfehlungen (2009) Rechte und Pflichten der Verbraucher, persönliche Finanzen, nachhaltigen Konsum sowie digitale Medien als wichtige Inhalte von Verbraucherbildung (OECD 2009a, S. 3). Im Projekt CEAN (Consumer Education for Adults Network) einem EU-geförderten Projekt, das sich dezidiert mit der Verbraucherbildung von Erwachsenen befasst, werden als grundlegende Themen der Verbraucher als Bürger, Verbrauchergesundheit, persönliche Finanzen und nachhaltiger Konsum (Bailey, Kitson 2006, 8) genannt. Dolceta (Developing On-Line Consumer Education and Training for Adults), ein weiteres Projekt, das sich speziell mit der Verbraucherbildung für Erwachsene auseinandersetzte, definierte als wichtige Themenbereiche Verbraucherrechte, Dienstleistungen, Produktsicherheit, nachhaltiger Konsum, Finanzdienstleistungen und Lebensmittelsicherheit. Das zugehörige Internetportal liefert im Übrigen gute Hinweise für die Planung von Bildungsangeboten.[6]

Die aufgeführten Inhaltsbereiche, die sich zusammenfassend auf die Themen (nachhaltiger) Konsum und Verbraucherschutz, persönliche Finanzen sowie Datenkompetenz reduzieren lassen, finden sich in den meisten Definitionen wieder. Häufig werden auch noch Aspekte der – nicht mehr eindeutig ökonomischen – Gesundheits- und Ernährungsbildung als wichtige Inhalte von Verbraucherbildung hervorgehoben. Mit den genannten Inhaltsfeldern sind spezifische Kompetenzanforderungen verknüpft, insbesondere Marktkompetenz, Finanzkompetenz sowie spezifische Informations- und Datenkompetenz.

Neben dem – auf Grundbildungsniveau schwer zu verortenden – Wissen um grundlegende Funktionsmechanismen von Märkten umfasst Marktkompetenz die Kenntnis von Waren, Dienstleistungen und Marketingstrategien aber auch von Verbraucherrechten und -pflichten. Außerdem umfasst es die Auseinandersetzung mit den eigenen Bedürfnissen, Wünschen und Bedarfen und die bereits angesprochene Berücksichtigung der sozialen, ökonomischen und ökologischen Auswirkungen des eigenen Konsumverhaltens sowie die Einflussmöglichkeiten durch Konsum auf einen verantwortlichen Umgang mit vorhandenen Ressourcen.

Informationskompetenz zeigt sich darin, dass sich die Verbraucher erfolgreich über verschiedene Angebote informieren und bewusste Produktentscheidungen treffen können. Dazu ist es notwendig, Wege der Informationsbeschaffung und -auswertung zu kennen. Auch hinsichtlich des Verbraucherschutzes und der eigenen Verbraucherrechte und -pflichten ist Informationskompetenz wichtig. Als ein weiteres Element dieses Bereiches werden grundlegende Kenntnisse von Kundenbindungssystemen und deren Wirkungsmechanismen genannt (Bayerisches Staatsministerium der Justiz und für Verbraucherschutz 2010, S. 4f).

Ein eigenständiger Bereich ist der Umgang mit Angeboten im Internet, wie z. B. der Abschluss von Online-Verträgen oder Online-Banking. Gerade im Hinblick auf die zunehmende Bedeutung des Internets ist dies ein wichtiges Themenfeld der Verbraucherbildung, das auch auf die grundlegend benötigten Fertigkeiten im Umgang mit neuen Technologien verweist. Piorkowsky (2010, S. 8) weist in Bezug auf den Online-Handel auch auf eine „‚Entgrenzung' der traditionellen Verbraucherrolle“ hin, da durch Internetverkäufe der Übergang in die selbständige Erwerbsarbeit fließend werde, was wiederum neue Anforderungen an Verbraucherbildung bzw. die ökonomische Grundbildung Erwachsener stelle.

5 ec.europa.eu/consumers/strategy, Zugriff 31.10.2014
6 www.eucen.eu/node/3515/, Zugriff 31.10.2014

5.2 Finanzielle Bildung

Abgesehen von der generell nicht zu überschätzenden Bedeutung von Geld sind ökonomisch relevante Lebenssituationen häufig durch finanzielle Entscheidungen geprägt, die darüber hinaus oftmals sehr langfristige Auswirkungen haben. Die finanzielle Grundbildung ist der Teilbereich der ökonomischen Grundbildung, der im letzten Jahrzehnt – nicht erst seit der Finanzkrise – am intensivsten diskutiert, gefördert und erforscht wurde.
In der englischsprachigen Welt wird finanzielle Bildung oft sogar mit ökonomischer Bildung gleichgesetzt, und auch in Deutschland gibt es Stimmen, die hier den Schwerpunkt legen. Für Reifner (2010) ist Geld das Kommunikationsmittel der modernen Wirtschaft und finanzielle Allgemeinbildung deshalb die notwendige Schlussfolgerung. Sie umfasst dann auch eine von ihm so genannte volkswirtschaftliche Grundbildung (ebd., S. 18), die er insbesondere in der Schule verankert sieht. Sein Bildungsbegriff hat als Bezugspunkt jedenfalls immer die Geldströme der Marktwirtschaft (Reifner 2011, S. 12). Es geht ihm um „die Prozesse des Gebrauchs von Geld“ (ebd.). Damit fehlen aber alle sich nicht im Geldkreislauf wiederfindenden ökonomischen Aktivitäten wie Hausarbeit, häusliche Produktion (Kochen, Backen), etc.

Auch eine Vielzahl von Verlautbarungen internationaler Organisationen – von der OECD über die Weltbank bis hin zur UNESCO und zur EU-Kommission – hebt die finanzielle Bildung als wesentliches Bildungsziel hervor. Die Argumentationslinie folgt dabei im Grunde immer einem gleichartigen Muster: Die veränderten und dynamisch sich weiter entwickelnden Rahmenbedingungen in einer Marktwirtschaft fordern den Einzelnen vermehrt finanzielles Wissen und Bewusstsein ab. Deshalb ist es sinnvoll, den Menschen in allen Lebensphasen diesbezügliche Bildungsangebote zur Verfügung zu stellen. Dabei wird angenommen, dass ein Plus an finanziellem Wissen zu einer höheren Selbstwirksamkeitsvermutung und so zu Verhaltensänderungen in Richtung einer rationalen Finanzplanung führt.

So haben sich etwa die OECD-Staaten darauf verständigt, die finanzielle Grundbildung zu verbessern, um den Bürgern die Möglichkeiten der eigenen Zukunftssicherung zu geben, weshalb die OECD die Plattform ‚International Gateway for Financial Education‘ gegründet hat, um den weltweiten Austausch über Programme und Erfahrungen zu fördern sowie Richtlinien für gute Praktiken herauszugeben, die schwerpunktmäßig auf die Verantwortlichkeiten der Regierungen und Behörden sowie anderer Stakeholder zielen.[7] Die OECD (2005) empfiehlt, dass Programme zur finanziellen Bildung – je nach nationalen Gegebenheiten – zentrale Aspekte der Finanzplanung umfassen sollen, wozu Sparen, privates Kreditmanagement oder Versicherungen genauso gehören wie Voraussetzungen finanzmathematischer und ökonomischer Basiskenntnisse. Auch die EU (2007) betont die Wichtigkeit, finanzielle Allgemeinbildung in Europa zu stärken.

Insgesamt betonen die Ansätze zur finanziellen Grundbildung wiederum die Fähigkeit, für sich selbst sorgen und verantwortliche Finanzentscheidungen treffen zu können. Die kanadische Task Force on Financial Literacy formuliert beispielsweise: „Financial literacy means having the knowledge, skills and confidence to make responsible financial decisions“ (Task Force on Financial Literacy 2010, S. 4). Hierfür ist ein Grundverständnis von Finanzprodukten und finanzwirtschaftlichen Zusammenhängen Voraussetzung, aber auch das Wissen darüber, wo benötigte Informationen gesammelt werden können und die Fähigkeit mit Finanzberatern bzw. Anbietern von Finanzdienstleistungen effektiv kommunizieren zu können: „Personal financial literacy is the ability to read, analyze, manage and communicate about the personal financial conditions that affect material wellbeing. It includes the ability to discern financial choices, discuss money and financial issues without (or despite) discomfort, plan for the future and respond competently to life events that affect everyday financial decisions, including events in the general economy“ (Vitt u. a. 2000). Die finanzielle Grundbildung soll damit vor allem auch dazu befähigen, einmal getätigte langfristige finanzielle Entscheidung weiter zu verfolgen, zu beobachten, zu überdenken und gegebenenfalls Anpassungen an neue Situationen vorzunehmen (vgl. auch Reifner 2003,S. 12).

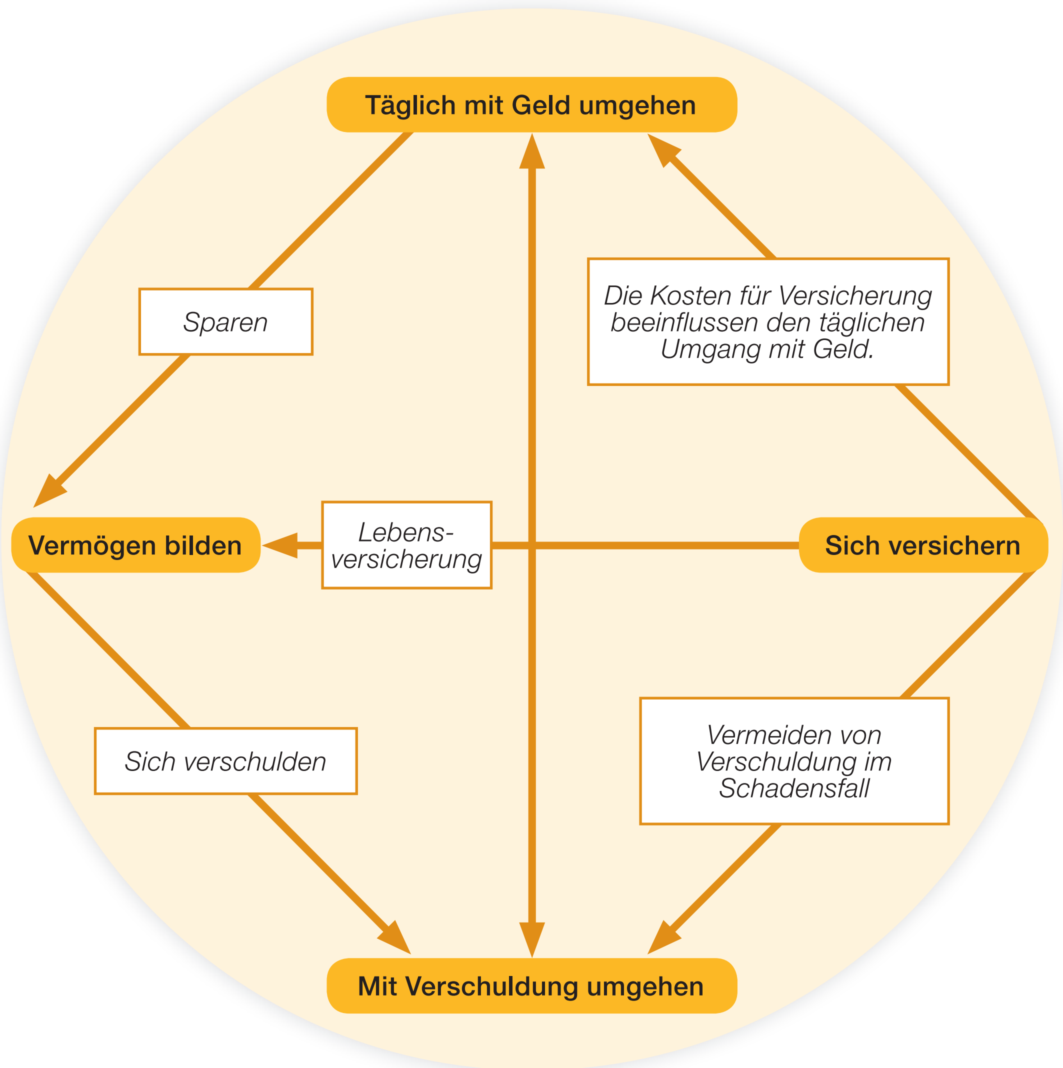
7 www.financial-education.org, Zugriff 31.10.2014

Finanzielle Grundbildung sollte im Themenbereich Kredit gemäß der OECD-Empfehlungen (OECD 2009b) Kenntnisse vermitteln in Bezug auf Rechte und Verantwortlichkeiten von Kreditkartenbesitzern, Möglichkeiten der Kreditaufnahme, Anlaufstellen für wichtige Informationen und neutrale Beratung sowie Individuen befähigen, informierte Entscheidungen treffen und proaktiv verantwortlich mit Krediten umgehen zu können, sie zur Finanzplanung unter Beachtung zukünftiger Einkommenssituationen und Veränderungen im Lebenszyklus befähigen und Kenntnis im Hinblick auf die eigene Kreditwahl vermitteln.

Finanzielle Grundbildung soll gemäß OECD (2008a) im Themenbereich Versicherung das individuelle Bewusstsein und die Verantwortlichkeit in Bezug auf potentielle Risiken und die Rolle von Versicherungen zur bestmöglichen Absicherung vermitteln. Ferner sollen die Bürger in der Lage sein, ihren eigenen Bedarf an Versicherungspolicen identifizieren zu können und Kenntnisse besitzen, wo diesbezüglich Informationen und neutrale Beratungen erhältlich sind, um für sich und die Angehörigen proaktiv und verantwortlich persönliche Risiken durch Versicherungen absichern zu können. Finanzielle Grundbildung soll Kenntnisse über sich ändernde Rahmenbedingungen im Bereich der Rentenversicherungen vermitteln sowie über die Notwendigkeit, langfristig für die eigene Altersvorsorge zu sparen und zu investieren (OECD 2008b).

Einen gut verständlichen Überblick über die Kernbereiche finanzieller Bildung gibt die folgende Abbildung von Schlösser, Neubauer und Tzanova (2012, S. 24):

Abbildung 2: **Die vier Kernbereiche finanzieller Bildung**



5.3 Erwerbstätigenbildung

Arbeitnehmerbildung ist in Hinsicht auf die ökonomische Grundbildung Erwachsener ein sowohl limitiertes wie heterogenes Feld. So gehört berufliche Bildung im engeren Sinne per Definition nicht in diesen Bereich. Ohnehin ist berufliche Bildung abgesehen vom kaufmännischen Bereich auch thematisch meist keine ökonomische Bildung. Ein Großteil der berufsbezogenen Grundbildung (Lesen, Schreiben, Rechnen, PC-Kenntnisse)[8] zählt darüber hinaus zu anderen bzw. allgemeinen Grundbildungsbereichen. Weiterhin stellt sich das wichtige Feld der Berufsorientierung, das für die schulische Bildung zur ökonomischen Bildung gerechnet werden kann, für Erwachsene – mit wenigen Ausnahme etwa von Migranten – nicht in derselben Weise dar.

Die Anforderung, Einkommen zu generieren, ist fraglos hinreichend allgemein und grundlegend, so dass die generelle Bedeutung dieses Grundbildungsbereiches nicht in Frage steht. Insofern umfassende gesellschaftliche Prozesse auf diesen Bereich abgestimmt sind, und daher hier ein hohes Maß an implizitem und informellem Lernen gewährleistet ist (vgl. Klein 2010), richten sich konkrete Ansätze aber häufig auf spezifische Problemfelder oder Zielstellungen.

Heterogen ist Erwerbstätigenbildung hier vor allem in dem Sinne, dass es einerseits um die individuellen Facetten der Erwerbsfähigkeit bzw. -biographie (z. B. Arbeitsmarktorientierung, Weiterbildungsbereitschaft, Selbständigkeit) und andererseits um die eher formalen Facetten des Arbeitsverhältnisses (z. B. Arbeitsverträge, betriebliche Interessenvertretung, soziale Sicherung) geht. Insbesondere im erwerbsbiographischen Bereich spielen ferner nicht nur kognitive Aspekte eine Rolle, sondern auch soziale (z. B. Teamfähigkeit) und motivationale (z. B. Weiterbildungsbereitschaft).

In Hinsicht auf den erwerbsbiographischen Bereich geht es vor dem Hintergrund der sich schnell wandelnden und zunehmend wissensabhängigen Arbeitswelt um den ‚Abeitskraftunternehmer' in seinen verschiedenen Formen; dies schließt gerade auch Formen der Reflexions- und Selbstorganisationskompetenz (Alke u. a. 2010, S. 6) mit ein. In kognitiver Hinsicht geht es dabei mehr um Fragen des Verständnisses von Arbeitsprozessen und der unternehmerischen Funktion in Wirtschaft und Gesellschaft. Dies schließt grundlegende Fragen einer möglichen Selbständigkeit (Entrepreneurship) mit ein.

Das Verbundprojekt ‚GiWA – Grundbildung in Wirtschaft und Arbeit' nennt drei konkrete Zielgruppen bzw. Anforderungssituationen, die es mit Blick auf den Erhalt von Beschäftigung durch Grundbildung sowie die Herstellung von Employability untersucht und unterstützt. Die Gruppen sind:

a) Personen, die „betriebliche Veränderungsprozesse [erleben], die neue Anforderungen mit sich bringen, zu deren Bewältigung neue Kompetenzen erforderlich sind",

b) Individuen, die mit „berufsbiographische[n] Brüche[n konfrontiert sind], die dazu führen, dass Beschäftigte ihre Erwerbsarbeit verlieren und in Transfergesellschaften oder irgendwann auch in Ein-Euro-Jobs wechseln" sowie

c) Menschen, „…denen der Zugang zu Berufsbildung und Erwerbsarbeit bisher verwehrt war, entweder weil sie chronisch erkrankt sind oder aufgrund ihres Flüchtlingsstatus ihnen der Zugang zu Erwerbsarbeit verwehrt bleibt." (Klein 2010, S. 3)

Am Deutschen Institut für Erwachsenenbildung (Tröster 2002; Steindl 2002) wurde dagegen ein ‚Modell für die berufsorientierte Grundbildung' entwickelt, das als ‚Anforderungsmodell' darauf abhebt, „dass die enge Verzahnung von berufsfeldbezogenen Inhalten und den persönlichen Ziel- und Wunschvorstellungen beim Lesen- und beim Schreibenlernen ein wichtiger Motor ist." (Steindl 2002, S. 48) So zielt der Ansatz insbesondere auch auf Reflexions- und Lernkompetenz ab.

8 www.giwa-grundbildung.de Zugriff 31.10.2014

In sehr allgemeiner Form werden hierzu vier Kompetenzbereiche bestimmt:

- Veränderungskompetenz als Voraussetzung dafür, sich auf unterschiedliche und sich verändernde Anforderungen/Tätigkeiten im Arbeitsprozess einzulassen;
- Beziehungskompetenz als Fähigkeit, Arbeitsmittel sachgerecht auszuwählen, das für die Tätigkeit angemessen ist;
- Meinungskompetenz als Bereitschaft Position zu beziehen und eine (selbständige) Haltung zum geleisteten Arbeitsvorgang zu entwickeln
- Lernkompetenz als die entscheidende Fähigkeit, „diese drei unterschiedlichen Anforderungen in einem Arbeitsprozess zu verbinden und dazu die geeigneten Lerntechniken der Selbstorganisation zu beherrschen und anwenden zu können." (Steindl 2002, S. 50 f.)

5.4 Wirtschaftsbürgerbildung
Wirtschaftsbürgerbildung trägt dazu bei, den Einzelnen zu befähigen, wirtschaftspolitische Prozesse zu analysieren, kritisch zu beurteilen und mitgestalten zu können. Trotz seiner Wichtigkeit für demokratische Gesellschaften führt dieser Bildungsbereich weitgehend ein Schattendasein. Immerhin wird von Seiten der EU vermehrt Wert darauf gelegt, Citizenship Education, ein Begriff der typischerweise Wirtschaftsbürgerbildung einschließt, als erforderlichen Teil des lebenslangen Lernprozesses zu verstehen. Denn auch Citizenship Education dient dazu sich an die stetig neuen gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Anforderungen anpassen zu können. Auch mit dem analogen Zielkonzept des Active Citizenship werden Erwachsene als Zielgruppe lebenslanger Lernanstrengungen angesprochen.

Wirtschaftsbürgerbildung bezieht sich auf das Verhältnis und die Rolle des Einzelnen in der Gesellschaft. Da der Einzelne wiederum als Verbraucher und als Arbeitnehmer im Hinblick auf das gesellschaftliche Ganze agiert, finden sich zu diesen zwei Grundbildungsbereichen deutliche Überschneidungen. Die Ereignisse der letzten Jahre verweisen immer wieder auf die Überschneidung von finanzieller Bildung – insbesondere gesellschaftliche Aspekte der Vermögensbildung sowie Staatsverschuldung – und Wirtschaftsbürgerbildung. Der Einzelne soll befähigt werden, sein Leben im Hinblick auf die eigenen Ressourcen aber auch auf das gesellschaftliche Ganze verantwortlich zu gestalten. Dazu ist die Vermittlung von Kenntnissen und Kompetenzen notwendig, die dazu beitragen, das eigene Verhalten (z. B. hinsichtlich von eigenen finanziellen Beiträgen, staatlichen Leistungen, Kaufentscheidungen) kritisch zu reflektieren. Die entsprechenden Kompetenzen sollen den Einzelnen aber auch befähigen, wirtschafts- und sozialpolitische Aktivitäten des Staates zu verstehen, kritisch beurteilen und beeinflussen zu können.

Trotzdem werden in den Ausformulierungen der eigentlichen Inhalte und Kompetenzen die wirtschaftlichen Dimensionen der Citizenship Education häufig nicht systematisch konkretisiert, der Fokus liegt vielmehr auf politisch/rechtlichen Inhaltsbereichen und Kompetenzen (z. B. Projekt „Education for Citizenship"; hierzu Audigier 2000, S. 21 ff. Bîrzéa 2000, S. 83). Auch ein Bericht zu EU-geförderten Projekten zu Active Citizenship bestätigt dies: Bildungsmaßnahmen, die sich mit der Förderung von Active Citizenship beschäftigen, vernachlässigen typischerweise die ökonomischen Aspekte (Osler 1997, S. 59).

Eine Ausnahme ist das Projekt „Education and active citizenship in the European Union", das explizit ökonomische Dimensionen hervorhebt; dies betrifft ökonomische Aspekte (Marktwirtschaft, wirtschaftliche Zusammenarbeit, Europa als ein Markt, Umgang mit den Herausforderungen der Globalisierung), erwerbswirtschaftliche Aspekte (Verbesserung der beruflichen Bildung, Arbeitsbedingungen in Europa, rechtliche Rahmenbedingungen der Arbeit, Aspekte von Arbeit/Arbeitslosigkeit), soziale Aspekte (Integration von Minoritätengruppen, Umgang mit Konsequenzen von Veränderungen in der Weltwirtschaft), ökologische Aspekte und Konsumentenrechte (Veldhuis 1997, S. 13 ff.).

Eine der systematischsten Auseinandersetzungen mit den Anforderungen an den Wirtschaftsbürger findet sich nicht bei Autoren oder Projekten aus dem Bildungsbereich sondern bei dem Sozialphilosophen Peter Ullrich. Zur „Stärkung der Reflektions- und Urteilsfähigkeit" fordert er u. a. die Vermittlung eines Verständnisses der modernen Wirtschaftsdynamik und eines ausgewogenen kritischen Umgangs mit ihr sowie die Thematisierung des Verhältnisses von (systemökonomischer) Erwerbswirtschaft und (sozialökonomischer) Versorgungswirtschaft der Haushalte (Ulrich 2001, S. 4 ff.).

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass Wirtschaftsbürgerbildung eine Voraussetzung für die Beurteilungsfähigkeit der Bürger im Hinblick auf wirtschaftliche und gesellschaftliche Prozesse ist. Und diese Fähigkeit wird bei zunehmend partizipativen Beratungs- und/oder Entscheidungsverfahren – insbesondere auf lokaler Ebene oder aber auch virtueller Natur – neben dem immer wieder rekurrierten Bezugspunkt der verschiedenen Wahlen immer wichtiger.

6. Fazit: Kompetenzen einer ökonomischen Grundbildung für Erwachsene

Vor dem nun aufgefächerten Hintergrund lassen sich wesentliche Kompetenzen ökonomischer Grundbildung für (alle) Erwachsenen – als Voraussetzung für die Bewältigung alltäglicher, ökonomisch geprägter Situationen und zugleich als Bedingung für eine verantwortliche Partizipation in der modernen Gesellschaft – generalisierend bestimmen.

In der aktuellen Diskussion um Bildungsziele herrscht ein Kompetenzbegriff vor, der sich auf kognitive Fähigkeiten beschränkt und lediglich darauf verweist, dass Motivation und Bereitschaft eine Rolle spielen, sollen die Kompetenzen zur Anwendung kommen. Eine Kompetenz ist somit die insbesondere kognitive aber auch motivationale und volitionale Fähigkeit bzw. Bereitschaft (ökonomische) Probleme zu bewältigen. Sie ist eine persönliche Disposition und kann mit Bezug auf ökonomische Probleme von einem Lebensbereich auf den anderen übertragen werden. Es muss deshalb nicht jede Kompetenz für jede Lebenssituation bzw. jede Rolle neu erworben werden.

In dem in Tabelle 1 auf Seite 12 skizzierten Modell, das den konzeptuellen Hintergrund bildet, wurden drei Kompetenzfelder aufgeführt, denen sich letztlich alle ökonomischen Kompetenzen zuordnen lassen.
Wir wollen jeweils ein Beispiel machen:

1. **Kompetenzbereich:** Entscheidung und Rationalität;
   Beispiel: Handlungsalternativen in ökonomisch geprägten Lebenssituationen bewerten
   Konkretisierung in der Grundbildung: Preis- und Qualitätsvergleiche als Entscheidungshilfe durchführen

2. **Kompetenzbereich:** Beziehung und Interaktion
   Beispiel: Kooperationen analysieren und bewerten
   Konkretisierung: Informationen einholen, bewerten und mit Finanzberatern kommunizieren

3. **Kompetenzbereich:** System und Ordnung
   Beispiel: Leitideen der Wirtschaftsordnung bewerten
   Konkretisierung: wesentliche Leitideen, wie Freiheit, Solidarität und Gerechtigkeit, als Märkte begrenzende Normen nachvollziehen

An dem ersten der drei Punkte soll das zugrundeliegende Prinzip erklärt werden: Handlungssituationen ökonomisch zu bewerten, ist eine Kompetenz, die in allen oben genannten Lebenssituationen eingesetzt werden kann. Es können Preisvergleiche sein, wie oben als Konkretisierung genannt (Lebenssituation: Verbraucher), aber auch die Entscheidung für oder gegen einen Arbeitgeberwechsel (Erwerbstätige) oder die Bewertung von Positionen verschiedener Politiker zum Mindestlohn (Bürger).

Nach diesen Vorgaben haben die Autoren des Kompetenzmodells Standards für die ökonomische Bildung in Schulen entwickelt (Seeber u.a. 2012). Schulische Bildungsstandards sind Sollensvorgaben, die für die Erwachsenenbildung wenig Sinn machen. Darüber hinaus verfolgt die Schule einen Allgemeinbildungsauftrag, der auch inhaltlich weit über die Ziele einer Grundbildung hinausgeht, insbesondere was den dritten Kompetenzbereich betrifft – obwohl er vor allem für den Wirtschaftsbürger wichtig ist. Deshalb sind in den folgenden Tabellen der Einfachheit halber die konkretanschaulichen Lebenssituationen als Klassifizierungen herangezogen worden und nicht die abstrakteren Kompetenzbereiche. Aber auch die mithilfe der Lebenssituationen konkretisierten Kompetenzen sind als in andere Situationen übertragbare zu verstehen.

Die detaillierte Ordnung der Kompetenzanforderungen (Abb. 3) unterscheidet zum einen nach den Anforderungsbereichen (Lebenssituationen), wobei der Bereich der Verbraucherbildung aus pragmatischen Gründen in eine finanzielle Grundbildung und eine Konsumentengrundbildung (i.e.S.) untergliedert ist. Zum anderen unterscheidet der Text im Folgenden *deklaratives und prozedurales Wissen*. Beide Wissenskomponenten sind Ausdruck kognitiver Kompetenz. Zusätzlich finden sich die Rubriken *grundlegende Fertigkeiten* und *Einstellungen.*

Deklaratives Wissen umfasst einfache Kenntnisse (Faktenwissen) und strukturiertes Zusammenhangswissen. Die in den Tabellen angeführten *ökonomischen Basiskenntnisse* fallen ebenfalls hierunter. Sie werden extra aufgeführt, da sie in allen relevanten Lebenssituationen bedeutsam sind. Deshalb können sie sich auch in den weiteren Darstellungen wiederholen. Das prozedurale Wissen umfasst dann konkrete Anwendungen des deklarativen Wissens sowie die Generalisierung in einem allgemeinen Verfahrenswissen. Für alle diese Fähigkeiten sind basale Fertigkeiten, wie Lesen und Rechnen, die notwendige Voraussetzung. Sie werden zum Beispiel in Alphabetisierungskursen vermittelt.

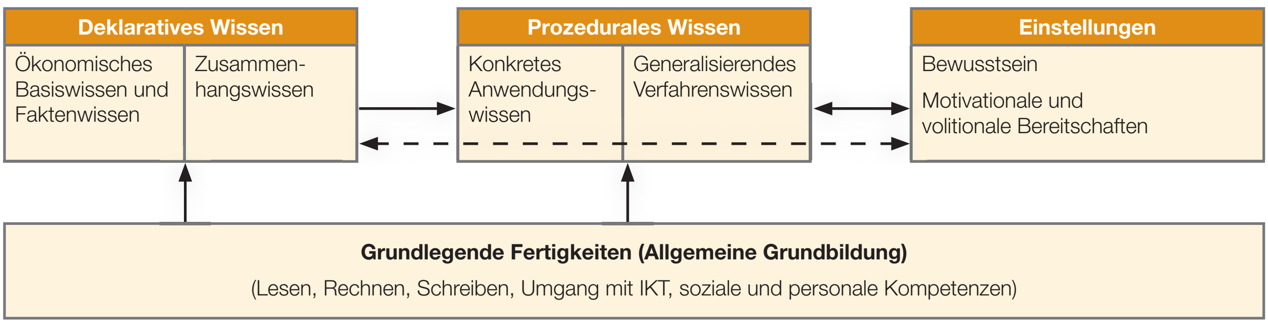
Soweit zur Bewältigung von Lebenssituationen die Umsetzung von Wissen in Handeln gehört – und das ist typischer Weise so – sind motivationale und volitionale Bereitschaften (bzw. »Einstellungen«) zu berücksichtigen.

In der Regel ist das deklarative Sachwissen die Voraussetzung für den Transfer in prozedurales Wissen. Einstellungen und die Wissenskomponenten bedingen einander: Die Wissensaufnahme hängt von entsprechenden Einstellungen ab und diese wiederum werden durch die Intensität des Wissens beeinflusst.

Fertigkeiten der allgemeinen Grundbildung wie Lesen, Schreiben, Rechnen, Medienkompetenz sowie soziale und personale Grundkompetenzen sind in der Regel Bedingungen des Erwerbs ökonomischer Kompetenz und werden hier nicht extra aufgeführt. Sie befinden sich in der Darstellung deshalb als Basis integriert.

Diesen Zusammenhang zeigt Abbildung 3.

Abbildung 3: **Die Wissens- und Einstellungskomponenten ökonomischer Grundbildung**



Die so differenzierten Kompetenzen werden dann noch grob nach dem voranschreitenden Schwierigkeitsgrad geordnet. Sie sind in den folgenden Tabellen 3a–d von unten nach oben zu lesen. Die in den Tabellen aufgeführten Beispiele dienen dem besseren Verständnis der mit ökonomischer Grundbildung angestrebten Lernziele. Sie sind nicht präskriptiv zu verstehen, sondern sind typische Beispiele, wobei die zugrunde liegende Kompetenz auch über andere Konkretisierungen erworben werden kann.

Die Autorinnen und Autoren haben die Tabellen auf der Basis einer eingehenden Literaturanalyse und der Analyse gesellschaftlicher Enzwicklungen erstellt und ausführlich begründet (Prof. Dr. Bernd Remmele u.a. 2013). Sicherlich lassen sich einzelne Punkte diskutieren. Womöglich können Sie begründen, weshalb Sie den einen oder anderen Punkt vermissen oder als mit Ihrer Klientel nicht umsetzbar betrachten. Es ist auch kein Kernlehrplan oder Ähnliches, sondern es geht um die Ausdeutung grundlegender Differenzierungen, die letztlich eine Orientierung für die Erstellung entsprechender Grundbildungsangebote bietet.

Tabelle 3a: **Ökonomische Kompetenzen der Konsumentengrundbildung (Verbraucher)**

<table>
<tr><th rowspan="4">Verbraucher: Konsumentengrundbildung</th><th>Deklaratives Wissen</th><th>Prozedurales Wissen</th><th>Einstellungen</th></tr>
<tr><td>• wichtige Verbraucherrechte und Verbraucherschutzorganisationen kennen
• rechtliche Grundlagen eines Kaufvertrags nachvollziehen
• die finanzielle Bedeutung der eigenen Haushaltsproduktion gegenüber Konsumausgaben kennen und abwägen
• Werbestrategien der Anbieter erkennen und für sich selbst bewerten
• Kaufentscheidungen unter Berücksichtigung der Faktoren
- Einkommenssituation,
- regelmäßige Ausgaben,
- einzugehende finanzielle Verpflichtung und
- Bedarfssituation (Bedürfnisse, Präferenzen)
treffen
• die Bedeutung wichtiger Produktkennzeichnungen kennen
• ökonomischen Wert der Hausarbeit erkennen</td><td rowspan="2">• Beschwerde führen
• mit Angeboten im Online-Handel umgehen
• eigene Qualitäts- und Preisvorstellungen gegenüber Vertragspartnern artikulieren
• Preis,- und Qualitätsvergleiche als Entscheidungshilfe durchführen
• Verbraucherinformationen einholen und bewerten
• Einkommen und Ausgaben gegenüberstellen (z. B. Haushaltsbuch führen)</td><td rowspan="2">• Selbstvertrauen bei Konsumentscheidungen haben
• Bereitschaft sich mit sozialen und ökologischen Folgen des eigenen Konsums auseinanderzusetzen und Verantwortungsbewusstsein haben
• Bewusstsein für die potentiell identitätsstiftende Wirkung von Konsum besitzen
• Kostenbewusstsein haben</td></tr>
<tr><td>übergreifende ökonomische Kompetenzen (jeweils im Kontext der Konsumentscheidungen):
• Knappheit als Bedingung ökonomischen Handelns begreifen
• Bedürfnisse und Bedarf unterscheiden
• Opportunitätskostenprinzip verstehen
• Grundverständnis von Märkten (Wettbewerb, Preisbildung, Konsumentensouveränität)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Allgemeine Grundbildung (Grundfertigkeiten)
Lesen / Schreiben / Rechnen / Medienkompetenz (insbes. IKT)
Soziale Grundkompetenzen / Personale Grundkompetenzen</td></tr>
</table>

Tabelle 3b: **Ökonomische Kompetenzen der finanziellen Grundbildung (Verbraucher)**

	Deklaratives Wissen	Prozedurales Wissen	Einstellungen
Verbraucher: Finanzielle Grundbildung	• über einen längeren Zeitraum die ökonomischen Konsequenzen von finanziellen Entscheidungen planend berücksichtigen (z. B. Risiken der Einkommensentwicklung; Kaufkraftverlust) • finanzmathematische Grundprinzipien verstehen (z. B. Zinseszins) • Funktionsweise des Sozialversicherungssystems verstehen (z. B. Generationenvertrag, Solidarprinzip) • grundlegende Finanzierungsarten und ihre Anbieter (z. B. Banken, Einzelhandel) kennen • individuelle Risiken und Versicherungsmöglichkeiten kennen und abwägen • Risiken moderner Zahlungsmittel kennen (z. B. Überblick bei Kreditkartenzahlungen behalten) • Sparen als Möglichkeit der Vorsorge und Rücklagenbildung verstehen • die eigene Einkommens- und Ausgabensituation überblicken (z. B. Kontoauszug interpretieren)	• Anlage-, Versicherungs- und Finanzierungsentscheidungen unter Berücksichtigung des eigenen Bedarfs und der Einkommenssituation treffen • Anlage-, Finanz- und Versicherungsprodukte vergleichen • Moderne Technologien im Zahlungsverkehr (z. B. Online-Banking) und moderne Zahlungsverkehrsmittel einsetzen (z. B. EC-Karte) • Informationen einholen, bewerten und mit Finanzberatern kommunizieren • Einkommen und Ausgaben gegenüberstellen (z. B. Haushaltsbuch führen)	• Selbstwirksamkeitsvertrauen bei finanziellen Entscheidungen haben • Bereitschaft zu langfristigem Denken mitbringen (z. B. hinsichtlich eingegangener finanzieller Verpflichtungen) • Kostenbewusstsein haben
	übergreifende ökonomische Kompetenzen (jeweils im Kontext der Finanzentscheidungen): • Bedürfnisse und Bedarf unterscheiden • Wechselspiel von Angebot und Nachfrage nachvollziehen • Knappheit als Bedingung ökonomischen Handelns begreifen		
	Allgemeine Grundbildung (Grundfertigkeiten) Lesen / Schreiben / Rechnen / Medienkompetenz (insbes. IKT) Soziale Grundkompetenzen / Personale Grundkompetenzen		

Tabelle 3c: Ökonomische Kompetenzen der Erwerbstätigenbildung

	Deklaratives Wissen	Prozedurales Wissen	Einstellungen
Erwerbstätige	• Humankapital als Teilhabemöglichkeit an der Arbeitsgesellschaft verstehen • die Bedeutung des Arbeitsvertrages für das Arbeitsverhältnis kennen • Erfordernis und Rahmenbedingungen des Einkommenserwerbs kennen und hinsichtlich eigener Lebensvorstellungen beurteilen • Rolle der Erwerbsarbeit für die individuelle Wohlfahrt und die soziale Einbindung erkennen	• Informationen zur Entwicklung des eigenen Humanvermögens beschaffen und Angebote vergleichen • Arbeitsprozesse planen, durchführen und bewerten (auch in der Haushaltsproduktion)	• »unternehmerische« Einstellungen, wie Annahme der Selbstwirksamkeit, Ergebnisorientierung und Frustrationstoleranz haben • Lern- bzw. Weiterbildungsbereitschaft besitzen
	übergreifende ökonomische Kompetenzen (im Kontext erwerbsbiographischer Überlegungen): • Einkommensentstehung in der Arbeitsgesellschaft verstehen • Besonderheiten von Arbeitsmärkten verstehen • unternehmerische Prinzipien nachvollziehen		
	Allgemeine Grundbildung (Grundfertigkeiten) Lesen / Schreiben / Rechnen / Medienkompetenz (insbes. IKT) Soziale Grundkompetenzen / Personale Grundkompetenzen		

Tabelle 3d: Ökonomische Kompetenzen der Wirtschaftsbürgerbildung

	Deklaratives Wissen	Prozedurales Wissen	Einstellungen
Wirtschaftsbürger	• Bedeutung kollektiver Interessenvertretungen und entsprechender Organisationen kennen • die wichtigsten staatlichen Ausgaben und Einnahmequellen kennen und Steuern als Beitrag zur Erstellung öffentlicher Güter verstehen • grundlegende Eckpunkte der Wirtschaftsordnung nachvollziehen (z. B. Märkte als Ordnungsprinzip und wesentliche Leitideen, wie Freiheit, Solidarität und Gerechtigkeit, als die Märkte begrenzende Normen)	• Informationen zur Interessenvertretung in Problemsituationen als Verbraucher oder Erwerbstätige einholen	• Bereitschaft zeigen, eigene Interessen (friedlich) zu vertreten • Bereitschaft haben, zur Erstellung öffentlicher Güter beizutragen • Bereitschaft zur Auseinandersetzung mit den politischen Rahmenbedingungen ökonomisch geprägter Lebenssituationen haben
	übergreifende ökonomische Kompetenzen: alle bisher unter dieser Überschrift genannten Kompetenzen sowie • öffentliche und private Güter unterscheiden und die Bedeutung für das eigene Handeln verstehen • die Anreizwirkung von Institutionen verstehen		
	Allgemeine Grundbildung (Grundfertigkeiten) Lesen / Schreiben / Rechnen / Medienkompetenz (insbes. IKT) Soziale Grundkompetenzen / Personale Grundkompetenzen		

7. Leben und Geld – das Lernportal zur ökonomischen Grundbildung des Volkshochschulverbandes

Seit 2010 ist das Angebot „Leben und Geld" mit seinen Bausteinen zur ökonomischen Grundbildung online.[9] Es wurde Teil der bestehenden Angebote des Deutschen Volkshochschulverbandes im Alphabetisierungsbereich. Seit 2011 gibt es zudem ein umfangreicheres Angebot im Bereich „Schulabschlüsse". Obwohl die Angebote nicht explizit kompetenzorientiert sind und ihre Inhalte auf den Empfehlungen traditioneller Ansätze der ökonomischen Bildung beruhen, sind die Parallelen zum hier beschriebenen Ansatz vielfältig. Um die Kompatibilität und die Differenzen geht es im Folgenden.[10]

Zunächst einmal basiert das Angebot auf der Annahme, Grundbildung müsse Fähigkeiten und Fertigkeiten vermitteln, die zur selbstständigen Bewältigung von Alltagssituationen befähigen. Die Einheiten des Lernportals sind deshalb alltagsorientiert. Der vorliegende Studientext identifiziert diese Alltagssituationen mithilfe der Rollen, die Menschen in ökonomischen Situationen oft gleichzeitig einnehmen, weil den Autoren auf diese Weise zum einen die Entdeckung der vielen relevanten Situationen am systematischsten erscheint, und weil zum anderen die Kompetenzen als Persönlichkeitsmerkmale sich auf diese Weise differenziert entwickeln lassen. Das Lernportal legt dagegen die zwei Lebensbereiche »Einkommensentstehung« und »Einkommensverwendung« zugrunde. Diesen werden die sechs Lernfelder (LF) Konsum, Arbeit/Arbeitslosigkeit/Berufswahl, Haushaltsgründung/-führung, Schulden, Vorsorge/Versicherung und Banken zugeordnet. Für diese Felder werden Lernziele formuliert.

Lernziele haben immer einen konkreten Inhaltsbezug und unterscheiden sich dadurch theoretisch von Kompetenzzielen. In der Praxis gibt es dann aber dennoch viele ähnliche Formulierungen, weil die mit ihnen verbundenen Anforderungserwartungen in beiden Fällen der Ausgangspunkt sind. Nehmen wir das Beispiel »Konsum« aus dem Lernportal.

Die Lernziele sind:

- Aufdecken von Konsumfallen,
- Sensibilisierung und Enttarnung von Werbung,
- Notwendiger vs. überflüssiger Konsum,
- Konsumentenrechte erkennen und wahrnehmen.

Diese Ziele passen sich in die in Tabelle 2 beschriebene übergeordnete Kompetenz der Konsumentenbildung ein: „Kauf-, Finanzierungs- und Absicherungsentscheidungen unter Berücksichtigung der aktuellen und zukünftigen eigenen Bedarfe planen, treffen und umsetzen sowie ein Bewusstsein für diese Handlungsmöglichkeiten haben." Im Bereich Konsum geht es dann nur um Kaufentscheidungen und in den Bereichen Haushaltsführung, Schulden und Vorsorge um Finanzierungs- und Absicherungsentscheidungen. Wenn wir die genannten Ziele jenen aus Tabelle 3a dieses Textes gegenüberstellen, erhalten wir folgendes Bild:

9 www.ich-will-lernen.de/
10 Grundlage: Deutscher Volkshochschulverband (Hrsg.), Projekt Ökonomische Grundbildung im DVV-Lernportal. Methodisch/didaktisches Konzept (unveröffentlicht).

Tabelle 4: **Konsumentenbildung mit Bezug zu Kaufentscheidungen im Vergleich**

DVV-Portal	Kompetenzorientierung
• Aufdecken von Konsumfallen	• Kaufentscheidungen unter Berücksichtigung der Faktoren Einkommenssituation, regelmäßige Ausgaben, einzugehende finanzielle Verpflichtung und Bedarfssituation (Bedürfnisse, Präferenzen) treffen • Verbraucherinformationen einholen und bewerten • Preis,- und Qualitätsvergleiche als Entscheidungshilfe durchführen • Selbstvertrauen bei Konsumentscheidungen haben
• Sensibilisierung und Enttarnung von Werbung	• Werbestrategien der Anbieter erkennen und für sich selbst bewerten
• Notwendiger vs. überflüssiger Konsum	• die finanzielle Bedeutung der eigenen Haushaltsproduktion gegenüber Konsumausgaben kennen und abwägen • Kostenbewusstsein haben • Bewusstsein für die potentiell identitätsstiftende Wirkung von Konsum besitzen • Bereitschaft sich mit sozialen und ökologischen Folgen des eigenen Konsums auseinanderzusetzen und Verantwortungsbewusstsein haben
• Konsumentenrechte erkennen und wahrnehmen	• wichtige Verbraucherrechte und Verbraucherschutzorganisationen kennen • rechtliche Grundlagen eines Kaufvertrags nachvollziehen • eigene Qualitäts- und Preisvorstellungen gegenüber Vertragspartnern artikulieren

Der Einfachheit halber wurden in der rechten Spalte der Tabelle deklarative und prozedurale Fähigkeiten sowie Einstellungen nicht getrennt aufgeführt. Sie können so erkennen, dass die Kompetenzformulierungen allgemeinerer Natur sind. Die Ziele des Lernfeldes Konsum entsprechen dann einer Konkretisierung. Das heißt auch, dass die Autoren des Volkshochschulverbandes mit ihren Einheiten eine Entscheidung darüber getroffen haben, anhand welcher Lebenssituationen „exemplarisch“ gelernt werden soll.

Exemplarität ist eine der didaktischen Grundlagen des Lernportals. Das beispielhaft Gelernte sollte auf andere Bereiche übertragen bzw. verallgemeinert werden können. Hier zeigt sich erneut, wie sich die Lernzielorientierung auf die Inhalte bezieht: In welchen anderen Lebenssituationen haben wir gleiche oder ähnliche Bedingungen? Lässt sich daraus eine Regel (nicht für das Verhalten, sondern für die Bedingungen) ableiten? Der kompetenzorientierte Ansatz fragt dagegen: Welche Fähigkeiten werden bei ähnlichen Bedingungen benötigt? Schließlich sollte aber noch erwähnt werden, dass die Lernziele der Einheiten neben der Inhalts- auch eine Verhaltenskomponente haben, was wiederum Nähe zur Kompetenzformulierung schafft.

Auch das Lernportal geht davon aus, dass für den Transfer von Wissen (Fähigkeiten) „zentrale Kategorien“ ökonomischer Bildung verstanden sein sollten, die in die Lerneinheiten implizit integriert werde. Diese Kategorien entsprechen im Grundsatz dem ökonomischen Basiswissen in den Tabellen 3a–d.

Die Lernziele der ökonomischen Grundbildung des Lernportals sind alle auf den drei oberen Stufen einer sechsstufigen Skala (Lernzieltaxonomie) angesiedelt. Die „ersten drei Lernstufen umfassen die Fertigkeiten der Lernenden im Lesen und Schreiben, Buchstaben- und Lautkenntnisse bis hin zu beginnendem Schreiben auf lautgetreuer Ebene.“ (ebd., S. 11) Wie im vorliegenden Konzept werden also die Grundfertigkeiten als Voraussetzung für den Erwerb ökonomischer Grundbildung in das Konzept integriert.

8. Welchen Herausforderungen sieht sich ökonomische Grundbildung gegenüber?

Die Kompetenztabellen verdünnen gewissermaßen die eingangs entwickelten großen Ansprüche und Hoffnungen, die sich mit einer ökonomischen Grundbildung verbinden, auf ein praktikables Maß. Um dieses Maß zu erreichen, ist auch die Auseinandersetzung mit einigen theoretischen wie praktischen Herausforderungen erforderlich. Diese Aspekte bedürfen je nach gegebenem Umsetzungskontext bewusste didaktische Entscheidungen

8.1 Das Spannungsverhältnis von Anforderungsniveau und Umsetzbarkeit im Grundbildungsbereich
Die wachsende Komplexität in verschiedenen Lebens- und Bildungsbereichen führt zu Anforderungskonstellationen, die das Maß an Kompetenzen überschreiten. Hieraus folgt die Notwendigkeit des Erwerbs von grundbildungsbezogenen Metakompetenzen durch die Lernenden. Die Problematik betrifft vor allem *reflexive* (Einsicht in die Notwendigkeit eines Qualifikationserwerbs) und *motivationale Metakompetenzaspekte* (um von der Einsicht auch zum Handeln zu kommen) sowie spezifische *Umsetzungshemmnisse* (kurzfristige Nutzenorientierung der Lerner versus rationale langfristige Planung).

Am Deutlichsten wird dies auf der reflexiven Ebene: Eine zentrale Funktion von Grundbildung ist die Herstellung weiterer Bildungsfähigkeit. Grundbildung allein rüstet selbstverständlich nicht für alle Lebenslagen. Aber sie soll mit einem gewissen Allgemeinheitsgrad in die Lage versetzen zu erkennen, ob man im jeweiligen Moment über ausreichende Kompetenzen verfügt, und wie man sich ggf. weitere adäquate Kompetenzen aneignen kann.

Als generelle Grundbildungsanforderung, die es didaktisch zu berücksichtigen gilt, ergibt sich somit eine der Komplexität der modernen Welt angemessene individuelle Bildungsreflexivität.

8.2 Ökonomische Grundbildung setzt allgemeine Grundbildung voraus
Grundbildung erweist sich nicht als voraussetzungslos bezüglich eines bestimmten Bildungsniveaus. Hiervon sind besonders Risikogruppen betroffen, denen es an ökonomischer aber auch allgemeiner Grundbildung fehlt, d. h. ökonomische Grundbildung setzt allgemeine Grundbildung voraus. Inwiefern Literalität anhand der Anforderungen in spezifischen Grundbildungsbereichen, z. B. dem ökonomischen, effizient (mit)geschult werden kann, ist eine offene Frage.

Ein Lösungsansatz, der in der Schlussbemerkung nochmals hervorgehoben wird, ist allgemeine grundbildungsrelevante Kompetenzen lebensweltlich und damit auch ökonomisch einzubetten. Durch diese Kontextualisierung besteht dann die Möglichkeit allgemeine und ökonomische Kompetenzen parallel zu entwickeln.

8.3 Kontraproduktive Bildungseffekte
Bildungsanstrengungen können zur (Eigen-)Zuschreibung höherer (oder anderer) Kompetenzen führen, die in Handlungsentscheidungen münden, deren Folgen für den Einzelnen nachteiliger sein können als jene, die ohne Bildungsanstrengungen eingetreten wären.

Als eine Lösungsmöglichkeit erscheint hierfür, das Auftreten typischer und wirtschaftlich relevanter Entscheidungsfehler zu identifizieren und in entsprechende Bildungsangebote zu integrieren.

8.4 Diskriminierungs- und Verpackungsproblem

Mit Blick auf Grundbildung zeichnet sich ein Diskriminierungsproblem ab: die Bezeichnung „Grundbildung" hat – auch für die Selbstselektion möglicher erwachsener Teilnehmer/innen – eine begrenzte ‚sprachliche Anschlussfähigkeit'. Dies betrifft ggf. auch die Einbindung in spezifische Lernorte, deren Image in analoger Weise unterschieden wird.

Daneben gilt es zu bedenken, dass der Begriff ‚ökonomische Grundbildung' unscharf, wenn nicht sogar unbekannt ist. Aus einer solchermaßen vorhandenen Unschärfe ergibt sich ein ‚Verpackungsproblem'. Bei der Entwicklung von Bildungsangeboten ist daher darauf zu achten, dass deren ‚Vermarktung' über eine motivierende, zielorientierte und positiv wirkende Außendarstellung erfolgt.

9. Angebote ökonomischer Grundbildung

Trotz des oben erwähnten Angebots „Leben und Geld“ des Deutschen Volkshochschulverbandes bleibt ein weiteres zentrales und deshalb hier zu erwähnendes Problem die Zugänglichkeit zu insbesondere unabhängigen Angeboten ökonomischer Grundbildung. Es herrscht ja nicht nur die oben erwähnte geringe Einsicht in die eigenen Lernbedarfe; auch die konkreten Angebote ökonomischer Grundbildung genügen den Anforderungen nur sehr bedingt.

Im Rahmen der Forschungswerkstatt zur ökonomischen Grundbildung für Erwachsene wurde durch das Deutsche Institut für Erwachsenenbildung (DIE 2012) eine Analyse der Anbieter vorgenommen. Diese hat gezeigt, dass im Feld der ökonomischen Grundbildung zwar auf den ersten Blick sowohl hinsichtlich der Anbieter als auch der Themen ein breites Spektrum besteht und es dadurch gute institutionelle Voraussetzungen für multiple Zugänge zur ökonomischen Grundbildung für Erwachsene gibt, dass aber die Zugänglichkeit im Einzelnen limitiert bleibt.

Die Analyse hat folgende wichtige Anbieter mit je verschiedenen thematischen Schwerpunkten bzw. Adressatenkreisen identifiziert:

- „die Volkshochschulen (in kommunaler Trägerschaft);
- gemeinnützige Weiterbildungseinrichtungen in anderer Trägerschaft (wie Familienbildungsstätten, konfessionell und gewerkschaftlich gebundene Einrichtungen);
- Verbraucherzentralen;
- Einrichtungen der freien gemeinnützigen Wohlfahrtspflege (wie Budget- und Schuldnerberatungsstellen sowie soziale Hilfeeinrichtungen und Vereine);
- Dienste „Von Frauen für Frauen“ (und für Familien/Haushalte);
- Organisationen von Sparkassen und Banken;
- Versicherungsträger.“ (Ambos, Greubel 2013, S. 67).

Hinzu kommen verschiedene mediale Angebote, die ebenfalls Inhalte der ökonomischen Grundbildung vermitteln. Die Angebote decken ein breites Themenspektrum ab – von der Verbraucher-, über die Erwerbstätigen- bis zur Wirtschaftsbürgerbildung. Die Analyse des DIE ergab, dass sich die Angebote sowohl hinsichtlich des Formats als auch der Intention unterscheiden. So gibt es zum einen *präventive Angebote* mit dem Ziel, ökonomischen Krisensituationen vorzubeugen. Diese werden sowohl in mono- als auch mehrthematischem Format angeboten, aber auch in Angebote anderer Themenbereiche integriert. Solche integrierten Angebote finden sich der Analyse des DIE zufolge vor allem in Bereichen des Zweiten Bildungswegs, in Alphabetisierungs- bzw. Grundbildungskursen sowie in Orientierungs- und Integrationskursen, die speziell für Migranten angeboten werden. Außerdem sind Themen der ökonomischen Grundbildung auch in Angebote der Familienbildung integriert. *Kurative Angebote* finden sich vor allem im Bereich der Schuldnerberatung. In Bezug auf die *Verbraucherbildung* ergab die Untersuchung des DIE, dass der Schwerpunkt der Angebote auf der Konsumentenrolle liegt und dem damit verbundenen überlegten Umgang mit den eigenen Finanzen; hier finden sich vor allem Angebote zur Altersvorsorge und Geldanlage. Im Bereich der *Erwerbstätigen- und Wirtschaftsbürgerbildung* liegt der Fokus auf der Auseinandersetzung mit den eigenen Arbeitnehmerrechten und der Kenntnis von grundlegenden Mechanismen des Wirtschaftssystems.

Die Angebote richten sich überwiegend an einen nicht weiter differenzierten Personenkreis, wobei sich präventive Angebote vor allem an junge Familien, Haushalte mit geringfügigem Einkommen, Arbeitslose, bildungsferne Personen bzw. Personen mit geringer Grundbildung sowie ältere Menschen wenden.

Hinsichtlich der Teilnehmergewinnung zeigt sich, dass vor allem solche Strategien Wirksamkeit erzielen, die auch prinzipiell in der Arbeit mit bildungsfernen bzw. bildungsbenachteiligten Personen erfolgreich sind: „Dies sind aufsuchende persönliche Anspracheformen und die Kooperation mit Organisationen, die über niedrigschwellige und lebensweltnahe Zugänge zu verschiedenen Adressaten- bzw. „Risikogruppen“ verfügen, und die Nutzung bereits bestehender Gruppenzusammenhänge.“ (ebd., S. 70) Eine große Rolle spielen auch die Empfehlungen ehemaliger Teilnehmer/innen.

Die Analyse des DIE zeigt auf Anbieterseite jedoch auch verschiedene Probleme und Grenzen auf, die sich zusammengefasst so darstellen:

- die oben bereits angesprochene *Divergenz zwischen einem objektiv großen Bedarf an ökonomischer Grundbildung und der mangelnden subjektiven Wahrnehmung dieses Bedarfs*, was sich vor allem in Hinsicht auf präventive Angebote z. B. zum Umgang mit Geld zeigt: „Dies bedeutet, dass es offenbar bisher nicht ausreichend gelingt, mit den vorhandenen präventiven Angebote subjektive Bildungsbedarfe zu wecken und in eine manifeste Nachfrage zu transferieren.“ (ebd., S. 70) Schwierigkeiten ergeben sich hieraus v. a. in Bezug auf Personengruppen, die über schlechte Bildungsvoraussetzungen und einen geringen finanziellen Handlungsspielraum und häufig auch über eine mangelnde Problemakzeptanz verfügen. Im Bereich der kurativen Angebote, v. a. in der Schuldnerberatung, übersteigt die Nachfrage demgegenüber das Angebot;
- einen *Mangel an konkreten und konsensfähigen Bewertungsmaßstäben von ökonomischer Grundbildung im Sinne von Qualitätskriterien bzw. Kriterien guter Praxis*, bei denen der Aspekt der Neutralität gegenüber externen wirtschaftlichen Interessen (z. B. Finanzunternehmen) eine wichtige Rolle spielt;
- *unzureichende personelle und finanzielle Rahmenbedingungen* beeinträchtigen sowohl eine ressourcenintensive Zielgruppenansprache als auch die Kontinuität und Verlässlichkeit von Weiterbildungsangeboten. Zur Kostendeckung erhobene Teilnahmeentgelte erweisen sich als Zugangshemmnis v. a. bei Risikogruppen;
- ein *Stadt-Land-Gefälle hinsichtlich der Angebotszahlen und des Themenspektrums*; dies wird deutlich durch das Angebot der kommunalen Volkshochschulen, die unter den Anbietern ökonomischer Grundbildung eine herausragende Stellung einnehmen, deren Angebot in ländlichen Gebieten jedoch deutlich weniger umfangreich ist als in Städten;
- einen *eingeschränkten Zugang zu Angeboten der Arbeitnehmer- und Wirtschaftsbürgerbildung*, da diese Angebote zu einem großen Teil von Gewerkschaften angeboten und daher auch v. a. von Gewerkschaftsmitgliedern wahrgenommen werden.

10. Schlussbemerkung

Es sollte deutlich geworden sein, dass ökonomische Grundbildung nicht unabhängig von Grundbildung im Allgemeinen betrachtet und umgesetzt werden kann. So sind im Bereich der ökonomischen Grundbildung Rechen- und Lesefähigkeit in unterschiedlichem Ausmaß je nach Teilbereich eine Voraussetzung.

Die Lesefähigkeit beinhaltet etwa das Lesen und Verstehen von Werbetexten, Produktinformationen und Vertragsgestaltungen. Zu den Rechenfähigkeiten gehören die Grundrechenarten und ihre Anwendungen, z. B. Prozentrechnung oder Rechenoperationen mit Wechselkursen. Ein gewisses Maß an Rechenfähigkeit, welche teilweise durch andere Hilfsmittel wie Taschenrechner oder Programme ausgeglichen werden kann, ist dennoch Voraussetzung für einige Bereiche der ökonomischen Grundbildung. Studien zeigen, dass geringe Rechenfähigkeit und geringe finanzielle Bildung korrelieren (z. B. Bernheim 1995, 1998; Lusardi, Mitchell 2007). Burks u. a. (2008) zeigen einen Zusammenhang zwischen kognitiven Fähigkeiten und individuellen Präferenzen in Bezug auf Risiko- oder Sparverhalten, wodurch die Entscheidungen von Verbrauchern und Erwerbstätigen maßgeblich beeinflusst werden. Personen mit höheren kognitiven Kompetenzen weisen auch eine höhere Risikopräferenz sowie mehr Durchhaltevermögen auf. Somit bewirken unterschiedliche kognitive Kompetenzniveaus auch unterschiedliche Präferenzen ökonomischen Verhaltens. Zusätzlich zu der Lese- und der Rechenkompetenz wird als weitere Grundkompetenz die Fähigkeit emotionale und psychologische Faktoren, die ökonomische Entscheidungen beeinflussen, im Griff zu haben, betont (OECD 2010, 13).

Wie sich insbesondere in oben genannten Ansätzen zur Erwerbstätigenbildung gezeigt hat, kann ökonomische Grundbildung aber auch dazu dienen andere Grundfertigkeiten weiter zu entwickeln. Ökonomische Zusammenhänge liefern durch ihre hohe lebenspraktische Relevanz motivierende Anwendungsfelder für übergreifende Lernprozesse. Schon Paolo Freire (1973) hat darauf hingewiesen, dass es für Alphabetisierungsprogramme bei Erwachsenen wesentlich ist, den Lernprozess und seine konkreten Inhalte aus den Lebenszusammenhängen und praktischen Problemstellungen der Lerner zu nehmen. Ökonomische Grundbildung bietet sich somit in unserer Gesellschaft an – wo nötig – ähnliche multifunktionale Lernprozesse zu tragen.

11. Literaturverzeichnis

Alke, Matthias; Wenzig-Lascheck, Anja; Zisenis, Dieter (2010):
Merkmale beratungsorientierter Grundbildung Wesentliche Ergebnisse aus der formativen Evaluation.
In: Klein, Rosemarie (Hrsg.): „Die Rendite muss stimmen“. Motive und Motivationen in der arbeitsbezogenen Grundbildung, Göttingen.

Ambos, Ingrid; Greubel, Stefanie (2013):
Akteurs- und Angebotsanalyse.
In: Weber, B., van Eik, I. und Maier, P. (Hrsg.): Ökonomische Grundbildung für Erwachsene. Ansprüche und Grenzen, Zielgruppen, Akteure und Angebote – Ergebnisse einer Forschungswerkstatt, Bielefeld, S. 65–74.

Audigier, François (2000):
Basic Concepts and Core Competencies for Education for Democratic Citizenship.
In: Council of Europe publishing. Strasbourg. Verfügbar unter http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Curriculum/SEEPDFs/audigier.pdf [10.11.11].

Bailey, Sue; Kitson, Mike (Hrsg.) (2006):
Thematic Guidelines. Consumer Education for Adults.
CEAN – Consumer Education for Adults Network, a Socrates Grundtvig 4 Project 2003–2006. London.

Bankenverband (2012):
Die Finanzkompetenz der Deutschen lässt zu wünschen übrig – nachlassendes Wirtschaftsinteresse, Daten – Fakten – Hintergründe. 1, S. 1–3.

Bayerisches Staatsministerium der Justiz und für Verbraucherschutz (2010):
Ökonomische Verbraucherbildung. Kompetenzen und Inhalte. München.
Verfügbar unter http://www.vis.bayern.de/verbraucherbildung/doc/oekonomische_verbraucherbildung_kompetenzen_u_inhalte.pdf [10.11.2011].

Bernheim, Douglas (1995):
Do Household appreciate their Financial Vulnerabilities?
Tax Policy and Economic Growth. Washington DC, S. 1–30.

Bernheim, Douglas (1998):
Financial Illiteracy, Education and Retirement Saving.
In: Mitchell, Olivia S.; Schieber, Sylvester (Hrsg.): Living with Defined Contribution Pensions. Philadelphia, S. 38–68.

Bîrzéa, César (2000):
Education for Democratic Citizenship: A Lifelong Learning Perspective. Strasbourg.
Verfügbar unter http://www.bpb.de/files/F0R5Q8.pdf [10.11.11].

Burks, Stephen V.; Carpenter Jeffrey P.; Götte Lorenz; Rustichini, Aldo (2008):
Cognitive Skills Explain Economic Preferences, Strategic Behavior, and Job Attachment. IZA Working Paper No. 3609, Bonn.

Canadian Foundation for Economic Education (CFEE) (o.J.):
Economic Capabilities Guideline.
Verfügbar unter http://www.cfee.org/economicscanada/economics.html [23.11.2011].

Caplan, Bryan (2004):
Straight Talk about Economic Literacy.
Verfügbar unter http://www.economistpakistan.com/Link-Detail.php?id=354 [25.11.2011].

Claar, Annette (1990):
Die Entwicklung ökonomischer Begriffe im Jugendalter, Berlin, Heidelberg.

Deutsche Bundesbank (Hrsg.) (2014):
Geld und Geldpolitik, Frankfurt/Main.

Deutsche Gesellschaft für ökonomische Bildung (DEGÖB) (2004):
Kompetenzen der ökonomischen Bildung für allgemein bildende Schulen und Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss.
Verfügbar unter http//degoeb.de/uploads/degoeb/04_DEGOEB_Sekundarstufe-I.pdf [15.10.14].

EU-Kommission – Pressemitteilung (2012):
EU-Überprüfung von Verbraucherkredit-Websites: Marktsegment bleibt hinter Erwartungen der Verbraucher zurück, Brüssel 10.1.2012.
Verfügbar unter http://europa.eu/rapid/pressReleasesAction.do?reference=IP/12/6&format=HTML&aged=0&language=DE&guiLanguage=en [14.03.12]

Freire, Paulo (1973):
Pädagogik der Unterdrückten, Berlin.

Haupt, Marlene (2014):
Konsumentensouveränität im Bereich privater Altersvorsorge, Baden Baden.

Klein, Rosemarie; Stanik, Tim (2009):
Was ist Grundbildung? Ansichten aus Wirtschaft und Arbeit und pädagogische Reflexion.
In: Grundbildung in Wirtschaft und Arbeit – mehrperspektivisch. GiWA-Online Nummer 2, April 2009, S. 1–4. Verfügbar unter http://bbb-dortmund.de/jobbb2/Klein_Stanik.pdf [23.11.11].

Klein, Rosemarie (2010):
GiWA – Eckpfeiler einer arbeits(platz)bezogenen Grundbildung.
In: Klein, Rosemarie (Hrsg.): „Die Rendite muss stimmen“. Motive und Motivationen in der arbeitsbezogenen Grundbildung, Göttingen.

Knobloch, Michael; Reifner, Udo unter Mitarbeit von Laatz, Wilfried (2011):
Überschuldung in Deutschland. iff-Überschuldungsreport 2011.
http://www.iff-ueberschuldungsreport.de/media.php?id=4364 [4.11.2014].

Kyriasoglou, Christina (2013):
Keine Verbindung.
In: Die ZEIT vom 7.3.2013, S. 34.

Lusardi, Annamaria; Mitchell, Olivia S. (2007):
Baby Boomer Retirement Security. The Roles of Planning, Financial Literacy, and Housing Wealth.
In: Journal of Monetary Economics, Vol. 54, S. 205–224.

OECD (2005):
Improving Financial Literacy: Analysis of Issues and Policies. September 2005.

OECD (2008a):
OECD Recommendation: Good Practices for Enhanced Risk Awareness and Education on Insurance Issues, Paris.

OECD (2008b):
OECD Recommendation: Good Practices for Financial Education Relating to Private Pension, Paris.

OECD (2009a):
CONSUMER EDUCATION. Policy Recommendations of the OECD'S Committee on Consumer Policy. Paris.
Verfügbar unter http://www.oecd.org/dataoecd/32/61/44110333.pdf [10.11.11].

OECD (2009b):
OECD Recommendation: Good Practices on Financial Education and Awareness Relating to Credit, Paris.

OECD (2010):
PISA 2012 Financial Literacy Framework, Draft Version, Paris 21 December 2010.

OECD (2014):
PISA 2012 Results: Students and Money: Financial Literacy Skills for the 21st Century (Volume VI), PISA, OECD Publishing.

Osler, Audrey (1997):
The contribution of community action programmes in the fields of education, training and youth to the development of citizenship with a European dimension. Birmingham.
Verfügbar unter http://ec.europa.eu/education/archive/citizen/birmingham.pdf [24.11.2011]

Pfeiffer, Iris; Heimer, Andreas; Münch, Claudia; Henkel, Melanie; Schulze, Katrin (2013):
Zielgruppenanalyse ökonomische Grundbildung.
In: Weber, B., van Eik, I. und Maier, P. (Hrsg.): Ökonomische Grundbildung für Erwachsene. Ansprüche und Grenzen, Zielgruppen, Akteure und Angebote – Ergebnisse einer Forschungswerkstatt, Bielefeld, S. 53 – 65.

Piorkowsky, Michael-Burkhard (2010):
Expertenpapier ökonomische Grundbildung. Expertise zur Feststellung des Forschungsbedarfs im Themenfeld Ökonomische Grundbildung für Erwachsene. Im Auftrag des Bundesministeriums für Bildung und Forschung, Bonn.
Verfügbar unter http://www.haushaltsoekonomik.uni-bonn.de/aktuelles/oekonomische-grundbildung-fuer-erwachsene [24.11.11].

Prognos AG (2012):
Abschlussbericht. Forschungswerkstatt Ökonomische Grundbildung.
Los 1: Zielgruppenanalyse, Berlin.
Verfügbar unter http://www.prognos.com/fileadmin/pdf/publikationsdatenbank/120131_Prognos_Bericht_Oekonomische_Grundbildung_fuer_Erwachsene_Los_1_lang.pdf [04.11.2014].

Reifner, Udo (2003):
Kanon der finanziellen Allgemeinbildung: Spielgelkanon, Wiederholung oder Meisterwerk?
Verfügbar unter http://www.iff-hamburg.de/media.php?t=media&f=file&id=792 [25.11.2011]

Reifner, Udo (2010):
Forschungsbedarf zur Ökonomischen Allgemeinbildung. Gutachten im Auftrag des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. Unveröffentlichtes Manuskript.

Reifner, Udo (2011):
Finanzielle Allgemeinbildung und ökonomische Bildung.
In: Retzmann, Thomas (Hrsg.): Finanzielle Bildung in der Schule.
Mündige Verbraucher durch Konsumentenbildung, Schwalbach/Ts., S. 9–30.

Remmele, Prof. Dr. Bernd; Seeber, Günther, Speer, Sandra; Stoller, Friederike (2013):
Ökonomische Grundbildung für Erwachsene. Ansprüche – Kompetenzen – Grenzen, Schwalbach/Ts.

Röhrig, Anne (2010):
Grundbildung für eine eigenständige Gestaltung des Lebens und aktives Handeln.
In: Grundbildung in Wirtschaft und Arbeit–mehrperspektivisch. GiWA-Online, Nr. 5, April 2010, S. 1.
Verfügbar unter http://www.giwa-grundbildung.de/RoehrigGO5.pdf [23.11.11].

Schlegel-Matthies, Kirsten (2004):
Verbraucherbildung im Forschungsprojekt REVIS – Grundlagen. Paderborner Schriften zur Ernährungs- und Verbraucherbildung, Band 2, Universität Paderborn.

Schlösser, Hans Jürgen; Neubauer, Maria; Tzanova, Polia (2011):
Finanzielle Bildung.
In: Aus Politik und Zeitgeschichte. Nr. 12, S. 21–27.

Seeber, Günther; Retzmann, Thomas; Remmele, Prof. Dr. Bernd; Jongebloed, Hans-Carl (2012):
Bildungsstandards der ökonomischen Allgemeinbildung. Kompetenzmodell – Aufgaben – Handlungsempfehlungen, Schwalbach/Ts.

Steindl, Adelgard (2002):
Ein Modell für die berufsorientierte Grundbildung. Berufsbezogene Anforderungen definieren und Lernkompetenz entwickeln.
In: Tröster, Monika (Hrsg.): Berufsorientierte Grundbildung. Konzepte und Praxishilfen, Bielefeld, S. 48–57.

Task Force on Financial Literacy (2010):
Canadians and Their Money: Building a Brighter Financial Future, Ottawa ON.

Tröster, Monika (2000):
Grundbildung – Begriffe, Fakten, Orientierungen.
In: Tröster, Monika (Hrsg.): Spannungsfeld Grundbildung, Bielefeld, S. 12–27.

Tröster, Monika (Hrsg.) (2002):
Berufsorientierte Grundbildung. Konzepte und Praxishilfen, Bielefeld.

Ulrich, Peter (2001):
Wirtschaftsbürgerkunde als Orientierung im politisch-ökonomischen Denken.
Journal of Social Science Education,
2. Verfügbar unter http://www.jsse.org/2001/2001–2/pdf/wirtschaftsbuergerkunde-ulrich.pdf [10.11.11].

UNESCO (2005):
Report by the Director-General on the United Nations Decade of Education for Sustainable development: International Implementation Scheme and UNESCO's Contribution to the Implementation of the Decade Paris.
Verfügbar unter http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001403/140372e.pdf [23.11.11].

UNESCO Institut für Pädagogik (1997):
CONFINTEA, Hamburger Deklaration zum Lernen im Erwachsenenalter. Agenda für die Zukunft.
Verfügbar unter http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001161/116114gero.pdf [23.11.11].

Veldhuis, Ruud (1997):
Education for Democratic Citizenship: dimensions of citizenship, core competences, variables and international activities. Strasbourg, Council of Europe.
Verfügbar unter http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED430867.pdf [10.11.11].

Vitt, Lois A.; Anderson, Carol; Kent, Jamie; Lyter, Deanna M.; Siegenthaler, Jurg K.; Ward, Jeremy (2000):
Personal Finance and the Rush to Competence: Financial Literacy Education in the U.S. Institute for Socio-Financial Studies, Middleburg VA.

Weber, Birgit; van Eik, Iris; Maier, P. (2013):
Ökonomische Grundbildung für Erwachsene – Bedeutung, Forschungsstand, Desiderate.
In: Dies. (Hrsg.): Ökonomische Grundbildung für Erwachsene. Ansprüche und Grenzen, Zielgruppen, Akteure und Angebote – Ergebnisse einer Forschungswerkstatt, Bielefeld, S. 9–40.

Zeuner, Christine; Pabst, Antje (2011):
Literalität und ihre Bedeutung für Partizipation und gesellschaftliche Teilhabe.
In: Journal für politische Bildung, 1. Jg., Heft 4, S. 42–52.

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

Deutscher
Volkshochschul-Verband

Herausgeber:

Projekt „Anpassung der Basisqualifizierung ProGrundbildung“

Deutscher Volkshochschul-Verband e. V.
Obere Wilhelmstraße 32
53225 Bonn
Tel.: 0228. 97569-0
Fax: 0228. 97569-30

1. Auflage: 2015

Redaktion: Gundula Frieling, Ralf Häder
Gestaltung: gastdesign.de