

Rechnen

DVV-Rahmencurriculum



VORWORT	1
EINFÜHRUNG	3

1. DVV-RAHMENCURRICULUM RECHNEN STUFE 1

1.1 Voraussetzungen und Grunddispositionen des Rechnenlernens ..	11
1.1.1 Eins-zu-Eins-Zuordnung und Invarianzverständnis	12
1.1.2 Zählen und Abzählen	13
1.1.3 Klassifikation und Seriation	15
1.2 Lernziele und Lernwege	16
1.2.1 Zählende Rechenstrategien	17
1.2.2 Gründe, das zählende Rechnen zu überwinden	19
1.2.3 Rechenwege: Verschiedene nichtzählende Strategien	20
1.2.4 Bedeutung der Symbolisierung	24
1.2.5 Was ist Addieren? Was ist Subtrahieren? Wie hängen sie zusammen? ..	26
1.2.6 Wie viel? Der kardinale Zahlaspekt	28
1.3 Grundsätze der Ablösung vom zählenden Rechnen:	
Der relationale Zahlaspekt	30
1.3.1 Mehr/weniger, um eins mehr/weniger, um zwei mehr/weniger	32
1.3.2 Bezüge zur 5 und zur 10	35
1.4 Zahlzerlegungen und Rechenstrategien: Wege und Routinisierungen	
zum kleinen Einspluseins und zum kleinen Einsminuseins	37
1.4.1 Zehner und Einer	38
1.4.2 Zahlraumorientierung im Zahlraum bis 30	39

LITERATURVERZEICHNIS STUFE 1	43
---	----

2. DVV-RAHMENCURRICULUM RECHNEN STUFE 2

2.1 Zweistellige Zahlen verstehen	49
2.1.1 Lernziele	49
2.1.2 Grundlagen für das Verständnis zweistelliger Zahlen	49
2.1.3 Operationen mit Mengen und ihre Entsprechung	
auf der Symbolebene	55
2.1.4 Orientierung im Zahlraum bis 100	59
2.2 Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 100	63
2.2.1 Lernziele	63
2.2.2 Vorgehensweisen zur Lösung von Additions- und	
Subtraktionsaufgaben	63
2.2.3 Kopfrechenstrategien für die Addition und Subtraktion	64
2.2.4 Umgang mit verschiedenen Rechenstrategien	68
2.3 Mehrstellige Zahlen verstehen	70
2.3.1 Lernziele	70
2.3.2 Grundlagen für das Verständnis mehrstelliger Zahlen	71
2.3.3 Orientierung im Zahlraum bis 1000	75
2.3.4 Mengenoperationen im Zahlraum bis 1000	77
2.3.5 Abschätzen der Größenordnung von Summen und Differenzen	79
2.3.6 Verständnis beliebig großer Zahlen	80

INHALTSVERZEICHNIS

2.4 **Schriftliche Addition und Subtraktion** 82

2.4.1 Lernziele 82

2.4.2 Die schriftliche Addition und Subtraktion als Rettungsanker? 83

2.4.3 Die Normalverfahren der schriftlichen Addition und Subtraktion 84

2.4.4 Inhaltliche Begründungen der schriftlichen Rechenverfahren 88

2.5 **Multiplikation** 91

2.5.1 Lernziele 91

2.5.2 Operationslogiken der Multiplikation 92

2.5.3 Operationsverständnis der Multiplikation 93

2.5.4 Die wiederholte Addition als grundlegendes Operationsverständnis 94

2.5.5 Strategien für die Multiplikation 95

2.5.6 Wege zur Beherrschung des kleinen Einmaleins 99

2.5.7 Multiplikation mehrstelliger Zahlen 103

2.6 **Division** 106

2.6.1 Lernziele 106

2.6.2 Operationslogiken der Division 107

2.6.3 Strategien für die Divisionen 109

2.6.4 Wege zur Beherrschung des kleinen Einsdurcheins 111

2.6.5 Kenntnis ausgewählter Teilungen der 100 und 1000 als Stütze
für die Zahlraumorientierung 114

LITERATURVERZEICHNIS STUFE 2 117

3. DVV-RAHMENCURRICULUM RECHNEN STUFE 3

3.1 **Ziele und Prinzipien** 123

3.1.1 Mathematische Bildung – Funktionalität in und für Lebenssituationen
und Teilhabe an der menschlichen Kultur 123

3.1.2 Entscheiden und Urteilen 123

3.1.3 Abgrenzung von der Schulmathematik 123

3.1.4 Lebensbereicherung statt Lebensvorbereitung 125

3.1.5 Ich-Stärke 125

3.1.6 Didaktische Prämissen und Prinzipien 126

3.1.7 Gliederung der Stufe 3 128

3.2 **Mathematik im Leben** 129

3.3 **Mathematik fürs Leben** 132

LITERATURVERZEICHNIS STUFE 3 137

4. DVV-RAHMENCURRICULUM RECHNEN – GEOMETRIE

4.1 Rahmen 143

4.2 Von „Geometrie“ zu „Raum und Form“ 143

4.3 Programmatischer Leitbegriff „Raumvorstellung“ 145

4.4 Curriculare Planungskonzepte 150

4.5 Artikulationsebenen 151

4.6 Sprachräume und Kontexträume 154

4.7 Curriculare Bündelung in den Aufgaben 155

4.8 Curriculum Geometrie: Raum und Form 155

4.8.1 Sich in der Ebene und im Raum orientieren 156

4.8.2 Elementare geometrische Figuren kennen und herstellen 157

4.8.3 Elementare geometrische Abbildungen erkennen,
kennzeichnen und nutzen 160

4.8.4 Verfahren zum Messen und Schätzen von Längen,
Flächeninhalten und Rauminhalten anwenden 163

4.8.5 Elementare Brüche in Figuren darstellen 165

4.9 Raum und Form ist Voraussetzung für Größen und Messen 166

4.10 Zielgruppenorientierte „adaptive“ Planung von Lehreinheiten 169

4.11 Aufgabenbeispiele 171

4.11.1 Sich in der Ebene und im Raum orientieren 172

4.11.2 Elementare geometrische Figuren kennen und herstellen 173

4.11.3 Elementare geometrische Abbildungen erkennen,
kennzeichnen und nutzen 174

4.11.4 Verfahren zum Messen und Schätzen von Längen,
Flächeninhalten und Rauminhalten anwenden 175

4.11.5 Elementare Brüche in Figuren darstellen 177

LITERATURVERZEICHNIS GEOMETRIE 179

AUTOREN 181

IMPRESSUM 183

VORWORT

Rechnenlernen gehört zweifelsohne zum Kanon der Grundbildung. Dennoch sind Angebote für Erwachsene relativ rar und pädagogisch wie didaktisch bislang wenig fundiert. Das *Rahmencurriculum Rechnen* des Deutschen Volkshochschul-Verbands liefert eine systematische Grundlage für Rechenkurse in Weiterbildungseinrichtungen. Es formuliert nicht nur Lernziele, sondern erklärt auch, warum manche Erwachsene scheinbar einfache Rechenoperationen nicht ausführen können und wie diese Operationen transparent und verstehbar gemacht werden. So führt es Lehrkräfte in den Anfangsunterricht mit Erwachsenen ein.

Darüber hinaus soll das *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* Impulse für den Ausbau des elementaren Rechenunterrichts in Weiterbildungseinrichtungen geben. Ein flächendeckendes Angebot für den nachholenden Erwerb grundlegender Rechenkenntnisse ist dringend erforderlich. Für Deutschland liegen zwar noch keine Daten zum Verbreitungsgrad gravierendster Defizite im Rechnen vor,¹ doch klagen Arbeitgeber/-innen seit Jahren über mangelhafte Rechenkenntnisse von Ausbildungsplatzbewerbern, selbst bei niedrigen Anforderungen.²

Rechenkenntnisse sind in der Ausbildung bzw. am Arbeitsplatz unverzichtbar. Sie sind aber auch Voraussetzung für alltägliche ökonomische Herausforderungen: Nur wer rechnen kann, kann Kontoentwicklungen kontrollieren, Preise vergleichen oder mit Zahlen unterlegte Informationen kritisch hinterfragen. Wer die eigenen Interessen als Bürger/-in und Konsument/-in kennen und vertreten will, braucht Rechenkenntnisse genauso wie Lese- und Schreibkenntnisse.

Internationale Untersuchungen weisen darauf hin, dass sich gerade die Förderung der Personen mit den schwächsten Rechenkenntnissen gesamtgesellschaftlich besonders auszahlen würde.³ Dafür müssen viele jedoch erst einmal ihre Scheu vor dem Umgang mit Zahlen verlieren und vom Zählen zum Rechnen übergehen. Wie das gelingen kann, wird in Stufe 1 des *DVV-Rahmencurriculums Rechnen* erläutert. Stufe 2 erklärt, wie jeder das Stellenwertsystem verstehen lernen kann. Stufe 3 leitet zu praxisbezogenen Informationen und Aufgaben über, die mit Grundkenntnissen in der Prozentrechnung verstanden bzw. gelöst werden können.

Forschung und Entwicklung für den elementaren Rechenunterricht mit Erwachsenen sind in Deutschland noch neu. Sie müssen fortgesetzt werden. Das *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* macht den Anfang.

Gundula Frieling und Angela Rustemeyer

1) PIACC gibt über die Beherrschung der elementarsten Rechenkompetenzen keine Auskunft.

2) http://hansberndulrich.files.wordpress.com/2012/06/langzeitstudie_2010.pdf, abgerufen am 30. 6. 2014.

3) So z. B. Numeracy Counts. NIACE Committee of Inquiry on Adult Numeracy Learning. Final Report • February 2011, S. 8.

EINFÜHRUNG

Die Kurse zum Thema „Rechnen“ wenden sich an Erwachsene, die nicht bzw. nicht in einer für sie befriedigenden Weise rechnen können. Im *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* werden drei Stufen unterschieden.

Stufe 1 wendet sich an Erwachsene, die besondere Schwierigkeiten im Rechnen haben. Das zentrale Kennzeichen ihres mathematischen Standortes ist, dass sie auch basale Rechnungen im Zahlraum bis 20 nur zählend ausführen können. Dabei kennen sie durchaus die Zahlzeichen und können zumeist auch zählen und abzählen.

Für die Teilnehmer/-innen⁴ auf Stufe 1 geht es darum, einen Zahlbegriff aufzubauen – also zu verstehen, was Zahlen sind und wozu sie da sind –, ein Operationsverständnis der Addition und Subtraktion aufzubauen, die Aufgaben des Einspluseins und des Einsminuseins bis 20 nichtzählend lösen und möglichst automatisch abrufen zu können sowie eine Zahlraumorientierung im Zahlraum bis 30 zu schaffen.

Stufe 2 erweitert die Zahlraumorientierung in größere Zahlräume hinein. Ein Operationsverständnis für die Multiplikation und die Division wird aufgebaut. Das Rechnen in allen vier Grundrechenarten wird hier nur so weit routinisiert, dass Größenordnungsvorstellungen entwickelt werden und dass der Taschenrechner verständlich genutzt werden kann. Dazu wird ein Verständnis des Stellenwertsystems aufgebaut, und es wird erarbeitet, wie man mithilfe des stellenwertigen Aufbaus der Zahlen effektiv rechnen kann.

Die Stufen 1 und 2 sind recht nah entlang unmittelbarer Fähigkeiten in der Mengen- und Zahlabschätzung, in Zahl- und Größengefühlen, in der Zahlraumorientierung und entlang rechnerischer Fertigkeiten konzipiert. Stufe 3 hat einen deutlich anderen Charakter und arbeitet sehr stark entlang jener konkreten praktischen Probleme, welche die Teilnehmer/-innen in den Kurs einbringen. Auf den Stufen 1 und 2 können die unmittelbar praktischen Bedürfnisse der Teilnehmer/-innen zwar den Ausgangspunkt der Arbeit bilden, aber die Kursarbeit muss sich doch recht eng an jenen mathematischen Ideen orientieren, die man verstehen muss, damit man überhaupt erst so rechnen kann, dass praktische Probleme bearbeitbar werden.

In Stufe 3 wird den Teilnehmer/-innen das sogenannte „bürgerliche Rechnen“ vermittelt. Hier geht es nicht mehr um ein basales Rechnenlernen, sondern um gesellschaftliche und ökonomische Teilhabe in einem schon recht erweiterten Sinn. Sie sollen in mathematikhaltigen Situationen mit Rechnungen, mathematischen und außermathematischen Abwägungen und Argumenten zu sinnvollen, vernünftigen und für sie zufriedenstellenden Entscheidungen kommen können. Ausgangspunkt des Kurses auf dieser Stufe sind mathematische Probleme bzw. Fragen der Teilnehmer/-innen rund um Themen wie Kochrezepte, Reisen, Bankgeschäfte, Mieten oder

4) Dieses Curriculum wurde im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbands erarbeitet. Deshalb wird auf die Formulierung „Kursteilnehmer/-innen an Volkshochschulen“ zurückgegriffen, gelegentlich ist auch von „Teilnehmer/-innen an Volkshochschulen“ die Rede. Gedacht ist dabei aber auch an Schüler/-innen von Schulen, Teilnehmer/-innen von Maßnahmen, Kunden und Kundinnen von Bildungsfirmen, Lerner/-innen in Kursen usw.

rund um Zahlen, Daten und Grafiken aus Zeitungen. Aus diesen Problemen schälen sich die mathematischen Themen wie Prozentrechnung, einfache Begriffe und Maße der Statistik, Proportionalität und Antiproportionalität, Dreisatz sowie Tabellen und Grafiken heraus.

Die Kursteilnehmer/-innen sind in ihren schulischen mathematischen Lernprozessen gescheitert. Ein Hauptgrund hierfür ist die technische Orientierung des Mathematikunterrichts, also die Orientierung am Abarbeiten von Rechenverfahren statt an deren Verstehen. Die Kursteilnehmer/-innen waren Schüler/-innen, die bereits früh in ihrer Lernbiographie die Rechenverfahren nicht mehr erfolgreich ausführen konnten, weil sie nicht verstanden haben, warum die Verfahren in der geforderten Weise ausgeführt werden und warum sie zum richtigen Resultat führen. Deshalb fokussieren alle Kurse auf die Frage „Warum funktioniert das Verfahren?“ bzw. „Wie könnte es anders funktionieren?“ Dazu gehört, die von den Teilnehmer/-innen verwendeten – nicht immer sachadäquaten – Verfahren in Beziehung zu den zu lernenden Verfahren zu setzen. Die Stufen 1 und 2 sind sehr explizit mit dem Gedanken angereichert, dass die Teilnehmer/-innen zudem verstehen, woran ihre früheren Lernprozesse gescheitert sind. Dies ist notwendig, weil nur so vorhandene Fehlvorstellungen aufgebrochen und Traumata bearbeitet werden können.

Wolfgang Schlöglmann berichtet über mathematische Weiterbildungskurse: „Viele Erwachsene, die an Mathematikkursen teilnehmen, befinden sich in emotional schwierigen Situationen, die einerseits mit ihrer derzeitigen Lebenssituation, aber auch mit ihrer Lerngeschichte in Zusammenhang stehen. So haben viele von ihnen negative Erinnerungen an ihren schulischen Mathematikunterricht.

Die Kurssituation holt diese Erinnerungen wieder in das Bewusstsein, und sie lehnen sich gegen ein neuerliches Mathematiklernen auf. Für andere Erwachsene ist die Notwendigkeit, an Umschulungsmaßnahmen teilnehmen zu müssen, eine große emotionale Belastung, die zu einer generellen negativen Grundhaltung führt.“ (Schlöglmann 2002, S. 24)

Schlöglmanns Bericht läuft zusammen mit dem Ansatz vieler mathematischer „Lerntherapien“, die großen Wert darauf legen, eine Lernsituation zu schaffen, die sich deutlich von der Schulsituation unterscheidet.

Auf der Ebene der Unterrichtsgestaltung bzw. der Methodik und Didaktik scheint es unabdingbar zu sein, dass

- die Kursleiter/-innen nicht mit einem fixen Curriculum in den Kurs gehen: Die Teilnehmer/-innen haben sich für den Kurs angemeldet, weil sie ein sehr persönliches und spezifisches Lernbedürfnis haben, welches meist von einer Defizitwahrnehmung gespeist ist. Sowohl die Spezifik des Lernbedürfnisses als auch die der Defizitwahrnehmung werden sich zwar erst nach und nach ausschärfen, sie sind aber die Leitschnur des Kurses. Das hier vorgestellte Curriculum stellt lediglich eine Folie dar, vor der die Bedürfnisse der Teilnehmer/-innen besser einzuordnen und zu verstehen sind, und die sowohl notwendige Lernschritte als auch Grenzen des Erreichbaren absteckt.

- zu Beginn des Kurses eine „Auftragsklärung“ stattfindet: Um ein Arbeitsbündnis zu schaffen, müssen die Teilnehmer/-innen die Möglichkeit haben, ihr Lernziel für den Kurs zur Diskussion zu stellen, sodass ein gemeinsam geteilter Auftrag als Ziel des Kurses benannt wird.
- das unterrichtliche Vorgehen sich strikt an den eigenen Lösungswegen der Teilnehmer/-innen entlang bewegt. Die Kursteilnehmer/-innen sind bislang mehr oder weniger gut durchs Leben gekommen, ohne rechnen oder elaboriert rechnen zu können. Sie haben eigene Problemlösungsmechanismen entwickelt, die man – auch in ihrer Umständlichkeit, gelegentlich in ihrer Komik – nicht nur würdigen muss, sondern die die Teilnehmer/-innen auch als Bereicherung erleben können. Als methodisches Prinzip ist es deshalb unabdingbar, die je eigenen Lösungswege der Teilnehmer/-innen zu diskutieren und sie in Beziehung zu setzen, sowohl miteinander als auch mit den konventionellen Lösungswegen. Dadurch werden mathematische Zusammenhänge durchschaubar, ebenso wird die Verallgemeinerungsfähigkeit der subjektiven Lösungswege diskutierbar. Formale Verfahren sind dann eventuell lediglich Mittel der effektiven Zusammenführung der subjektiven Verfahren.
- „Für Menschen, die Schwierigkeiten mit mathematischen Basisverfahren haben, ist es wichtig, die Begriffsbildungsprozesse (z. B. bei Zahlen) neu durchzuführen und darauf aufbauend die Grundrechnungsoperation zu entwickeln. Ein ‚reines‘ Trainieren der Operationen ohne vorherige Begriffsentwicklung ist meist nutzlos, da so eine Speicherung im episodischen Gedächtnis und nicht, wie notwendig, im semantischen Gedächtnis erfolgt.“ (Schlöglmann 2002, S. 24) Das *DVV-Rahmen-curriculum Rechnen* folgt diesem Prinzip durch eine konsequente Verbindung von Verstehen und Routinisierung.

Bei den Teilnehmern und Teilnehmerinnen von mathematischen Basiskursen muss man davon ausgehen, dass die mathematische Lernbiografie in einer Sackgasse gelandet bzw. eine Scheiternsbiografie ist. Dabei ist es tendenziell nicht so, dass die Teilnehmer/-innen nicht mathematisch denken. Es ist eher so, dass sie eine andere Mathematik als die konventionell übliche konstruiert haben. Diese Mathematik ist meist von fragmentarisch angehäuften Rechenregeln, Tricks und Kniffen geprägt. Es ist – im Vergleich mit der Förderung von Schülern und Schülerinnen – eventuell leichter, die Teilnehmer/-innen von diesen Regeln und Kniffen zu lösen, da sie nicht mehr in der Schule sind, wo sie tagtäglich gezwungen waren, darauf zurückzugreifen, um Rechenresultate zu produzieren. Nichtsdestotrotz ist es eine Grundschwierigkeit in mathematischen Basiskursen, den Teilnehmern und Teilnehmerinnen ihre Regeln und Kniffe bewusst zu machen, sie zu reflektieren und deren Grenzen aufzuzeigen sowie bei ihnen Vertrauen zu neuen Wegen zu schaffen. Grundsätzlich geht dies nur, wenn sie verstehen, warum die neu zu erlernenden Rechenverfahren funktionieren. In ihrer Scheiternsbiografie haben sie sehr häufig gehört, wie die Verfahren funktionieren, sie haben die Verfahren auch häufig geübt. Dieser fehlgeschlagene Weg darf nicht reproduziert werden, sondern es geht für die Teilnehmer/-innen darum, das „Warum“ zu verstehen und mit diesem neuen Verständnis endlich das Verfahren auch routinisieren zu können. Gleiches gilt für Begriffsbildungen. Man kann hier die Dauerfrage formulieren: „Was ist eigentlich gemeint mit ...?“

Wolfram Meyerhöfer

Rahmencurriculum Rechnen

Stufe 1

Wolfram Meyerhöfer

1. DVV-RAHMENCURRICULUM RECHNEN STUFE 1

1.1 Voraussetzungen und Grunddispositionen des Rechnenlernens

Die Teilnehmer/-innen des Kurses auf Stufe 1 stammen im Allgemeinen nicht aus Kulturen, in denen sie keinen Rechenunterricht hatten, sondern sie haben langjährig Mathematikunterricht durchlaufen – und sind dabei gescheitert. Die Ursachen des Scheiterns sind je spezifisch, aber es ist davon auszugehen, dass es der Mathematikunterricht versäumt hat, bezogen auf das damalige Vorwissen der damaligen Schüler/-innen einen Weg von den zählenden Rechenstrategien, mit denen fast alle Kinder in die Schule kommen, hin zu nichtzählenden Strategien zu schaffen (vgl. Meyerhöfer 2011, S. 401–426).

Ein Element dieses „didaktischen Versagens“ kann gewesen sein, dass die Schule nicht erkannt hat, dass das Vorwissen der Schüler/-innen in den Bereichen

- Eins-zu-Eins-Zuordnung und Invarianz,
- Teil-Teil-Ganzes-Verständnis,
- Zählen und Abzählen sowie
- Klassifikation und Seriation

nicht weit genug entwickelt war, um dem Mathematikunterricht folgen zu können. Es gibt keine Untersuchungen darüber, ob Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) eventuell diese Grunddispositionen des Rechnenlernens nie erlangt haben oder ob sie sie erst so spät erlangt haben, dass es ihnen während des Mathematikunterrichts in der Grundschule nicht zur Verfügung stand, sodass sie keine Möglichkeit hatten, sich den mathematischen Lernstoff zu erschließen. Diese Grunddispositionen werden hier kommentiert einerseits, damit Sie als Kursleiter/-in die Frage im Hinterkopf behalten, ob Ihre Teilnehmer/-innen eventuell nicht über sie verfügen. Wenn das der Fall ist, müssen Sie dies im Lehrprozess berücksichtigen. (Bei den ersten beiden Punkten und beim vierten Punkt müssen Sie dann versuchen, mit Lernsituationen zu arbeiten, die die dabei angesprochenen Denkweisen nicht erfordern. Beim Punkt „Zählen und Abzählen“ müssen Sie einen diesbezüglichen Lernprozess vorschalten.)

Die Grunddispositionen werden aber andererseits kommentiert, damit Sie dieses Hintergrundwissen im Gespräch mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen verwenden können: Mathematische Basiskurse sind auch immer der Frage nach den Ursachen des eigenen Scheiterns am Rechnen ausgesetzt. Oftmals hilft es im Lernprozess, wenn Teilnehmer/-innen die Ursachen früheren Scheiterns zu erkennen vermögen.

1.1.1 Eins-zu-Eins-Zuordnung und Invarianzverständnis

Die Eins-zu-Eins-Zuordnung, oder häufig auch „Stück-für-Stück-Korrespondenz“ genannt, ist eine wichtige Zugangsform für die Mengengleichsetzung und den Mengenvergleich. Sie schafft die Voraussetzung dafür, zu verstehen, dass Mengen bei reinen Veränderungen ihrer äußeren Gestalt ihre Anzahl nicht verändern („Invarianz“). Ein klassisches Experiment dazu ist folgendes:

Der Proband soll eine für ihn überschaubare Menge legen, z. B. 7 rote Plättchen. Fordern Sie den Probanden auf, gleich viele blaue Plättchen zu den roten Plättchen zu legen. Dies geschieht über direkte Eins-zu-Eins-Zuordnung, d. h., jedem roten Plättchen wird einzeln ein blaues Plättchen zugeordnet, oder über Abzählen (also über eine Eins-zu-Eins-Zuordnung, bei der jedem Objekt genau ein Zahlwort zugeordnet wird). Diese Herstellung einer Eins-zu-Eins-Zuordnung beherrschen Kinder meist bereits im Vorschuljahr.

Nun fragen Sie, ob gleich viele rote und blaue Plättchen vorhanden sind und warum.

Danach schieben Sie eine der beiden Reihen zusammen bzw. auseinander und fragen den Probanden, ob immer noch gleich viele rote und blaue Plättchen da sind. Wenn der Proband erkennt, dass die Anzahl der Mengenelemente trotz der Veränderung der Anordnung der Mengenelemente invariant bleibt, sich also nicht ändert, spricht man von Invarianzverständnis.

Wer das noch nicht versteht, dass trotz dieser Änderung der äußeren Gestalt der Menge immer noch gleich viele Plättchen vorhanden sind, wird Schwierigkeiten haben, wenn mit Mengen dynamisch agiert wird, weil es nicht sicher sein kann, dass die Anzahl der Mengenelemente bei diesem Agieren gleich bleibt. Vielleicht erinnern sich die Teilnehmer/-innen an dieses Problem bezüglich des eigenen Rechnenlernens.

Die Entwicklung von Kindern ist gekennzeichnet durch die Befreiung von der Figur oder der Wahrnehmungsanschauung. Für die Kinder kurz vor Beginn der Schule besteht die Entwicklungsaufgabe, sich von der Anschauung zu lösen. Dazu müssen sie Schritt für Schritt ihrem Eins-zu-Eins-Tun mehr vertrauen lernen als der unmittelbaren Anschauung. Die Argumentationen laufen dann darauf hinaus, dass die Handlungen umkehrbar sind („Jetzt sieht es mehr aus, aber ich kann die Plättchen ja auch wieder zurückschieben, dann sehe ich ja, dass es immer noch gleich viele sind.“) oder dass mehrere Eigenschaften gedanklich verknüpft werden („Diese Plättchenreihe ist zwar breiter ausgedehnt, aber dafür liegen die Plättchen ja auch weniger dicht.“).

Es erscheint kaum vorstellbar, dass Erwachsene nicht in der Lage sind, eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz herzustellen – das Experiment dient mehr der Reflexion von Problemen der Kindheit. Wenn doch, dann sind Sie als Kursleiter/-in gefragt, wie weit die Teilnehmer/-innen mit Ihnen gemeinsam den Weg des Rechnens zu gehen in der Lage sind. Falls Teilnehmer/-innen trotz Diskussion von Invarianzsituationen kein Invarianzverständnis erlangen, dann müssen Sie Mengendarstellungen, bei denen sich die äußere Gestalt der Menge ändert, ohne dass sich die Menge ändert, immer sehr ausführlich kommentieren oder aber vermeiden. Leitschnur dabei ist: Wer sich auf die Invarianz einer Menge bei Formveränderung nicht verlassen kann, der ist immer unsicher, wie viele da liegen. Zahlen sind aber dazu da, Anzahlen zu beschreiben. Wer also bei der Frage „Wie viele?“ unsicher ist, der wird auch Zahlen immer als unsichere Handlungspartner erleben.

1.1.2 Zählen und Abzählen

Abzählen

Es ist zentral für den Erwerb eines Zahlbegriffs, dass die Teilnehmer/-innen Zahlen als Bezeichnungen von Anzahlen verstehen und nicht lediglich als Glieder der Zahlwortreihe. Zahlen antworten zunächst auf die Frage „Wie viele?“. Deshalb wird hier das Abzählen getrennt betrachtet vom Zählen (Aufsagen der Zahlwortreihe). Im Mittelpunkt stehen die Mengenerfahrung und die Zuordnung von Mengen zu Zahlen als Anzahlkategorien.

Im Entwicklungsprozess des Abzählens lassen sich folgende Phasen beobachten:

- In den Anfängen werden die Elemente abgezählt, indem jedes gezählte Element verschoben wird.
- Im Folgenden genügt das Antippen der gezählten Elemente.
- Es folgt das Abzählen ohne taktile Hilfen, also nur mit den Augen.

Bei Menschen, die nicht richtig abzählen können, lässt sich beobachten, dass sie sozusagen diese Entwicklungsstufen nicht sauber durchlaufen haben: Sie zählen nur mit den Augen oder mit Antippen der Mengenelemente, aber sie kommen dabei durcheinander. Man kann sich das vielleicht als eine Art nicht eingestandener Selbstüberschätzung oder Selbstüberforderung vorstellen: Auch wer gut abzählen kann, wird bei großen ungeordneten Mengen das Antippen oder das Verschieben der Mengenelemente nutzen. Wenn Menschen also auf diese Hilfen verzichten und dadurch durcheinanderkommen, dann gilt es, sie davon zu überzeugen, auf diese Hilfen zurückzugreifen, was sie vielleicht aus Scham, aus Ehrgeiz, Zerstreuung usw. normalerweise vermeiden. Vielleicht ist eine Nachfrage genau an dieser Stelle ein Zugang zum mathematischen Denken der Betroffenen: „Ich selbst würde hier ja die bereits gezählten Gegenstände zur Seite schieben, ich komme sonst immer durcheinander. Warum machen Sie das eigentlich anders?“

Ziel der Entwicklung sollte darüber hinausgehend die Loslösung vom stückweisen („eins-weisen“ oder „eins-schrittigen“) Zählen zum strukturierten („mehrschrittigen“) Zählen sein. Hier sollte beobachtet werden, ob die Teilnehmer/-innen im Laufe der Entwicklung und durch die Gewinnung von Sicherheit im Umgang mit dem Abzählen selber zu Vereinfachungen im Sinne des strukturierten Zählens übergegangen sind oder ob dieser Prozess noch zu initiieren ist.

Eine Erleichterung für das spätere Loslösen vom zählenden Rechnen ist das Erfassen von kleinen Mengen auf einen Blick („simultane Mengenerfassung“). Dies wird durch Muster wie z. B. Würfelmuster erleichtert.

Was beim Zählen zu beachten ist, ist in den **Abzählprinzipien**⁵ formuliert, die helfen, die Ursache von eventuell auftretenden Abzählfehlern zu verstehen:

5) In der Mathematikdidaktik wird hier meist von „Zählprinzipien“ gesprochen. Für die Bearbeitung von besonderen Schwierigkeiten im Rechnen ist die Unterscheidung von Zählen und Abzählen aber zentral, da die Betroffenen z. T. zählen, aber nicht abzählen können, oder eventuell umgekehrt die Abzählprinzipien verstanden haben, aber die Zahlwortreihe nicht stabil beherrschen.

- Das Eindeutigkeitsprinzip: Jedem der zu zählenden Objekte wird genau ein Zahlwort zugeordnet.
- Das Prinzip der stabilen Ordnung: Die Reihe der Zahlworte hat eine feste Ordnung.
- Das Kardinalzahlprinzip: Das zuletzt genannte Zahlwort gibt die Anzahl der Objekte einer Menge an.
- Das Abstraktionsprinzip: Es kann jede beliebige Menge ausgezählt werden, d. h., es kommt nicht darauf an, welcher Art die Objekte sind, die gezählt werden.
- Das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung: Die jeweilige Anordnung der zu zählenden Objekte ist für das Zählergebnis nicht von Bedeutung.
- Prinzip der beliebigen Reihenfolge: Die Reihenfolge, in der die Elemente gezählt werden, ist für das Zählergebnis egal.

Zählen und Zahlwortreihe

Nicht zufällig ist in diesem Curriculum das Abzählen vor dem Zählen positioniert: Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) waren Kinder mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (vgl. Meyerhöfer 2011, S. 401–426).

Manche von ihnen konnten bei Schulbeginn gut zählen, hatten aber nicht verstanden, dass Zahlen in der Hauptsache gar nicht zum Zählen da sind, sondern zum Abzählen, dass sie also Symbolisierungen für Anzahlen sind. Rechnen war dann für sie das Vorwärtslaufen auf der Zahlwortreihe (addieren) oder das Rückwärtslaufen auf der Zahlwortreihe (subtrahieren). Auf Stufe 1 muss dieses Missverständnis aufgeklärt werden.

Nichtsdestotrotz ist auch das Zählenkönnen unabdingbar für das Erlernen des Rechnens. Alle Kinder erlernen das Rechnen zunächst über Zählprozesse; und wer nicht richtig zählen kann, der hat keine sichere Basis, um vom Zählen zu nichtzählenden Strategien zu gelangen. Man braucht Sicherheit, dass man beim zählenden Rechnen wirklich zum richtigen Ergebnis gelangt ist, sonst muss man immer und immer wieder zählen.

Man kann die o. g. Abzählprinzipien auf das Zählen übertragen. Hier gilt:

- Das Prinzip der stabilen Ordnung: Die Reihe der Zahlworte hat eine feste Ordnung.
- Das Eindeutigkeitsprinzip: Jede Zahl darf nur genau einmal auftauchen. Keine Zahl darf ausgelassen werden, und keine Zahl darf doppelt genannt werden.

Die Kursleiterin/der Kursleiter muss herausfinden, inwieweit die Teilnehmer/-innen richtig zählen können. Man kann hier zur Orientierung wieder verschiedene Könnensstufen unterscheiden:

- Das Aufsagen der Zahlwortreihe ist zunächst wie das Aufsagen eines Gedichtes. Der Kursleiter/die Kursleiterin muss überprüfen, ob die Teilnehmer/-innen dieses Gedicht korrekt aufsagen können – zunächst im Zahlraum bis 30. Potenzielle Knackpunkte dabei sind die Grenzflächen, an denen die Zahlwortbenennung ihr Prinzip ändert: Bis Zwölf erhält jede Zahl ein unsystematisch konstruiertes Zahlwort, dann folgt ein ungünstiges Konstruktionsprinzip, das Sie auch als ungünstig diskutieren können: Obwohl die Zahl 13 sich ja aus 10 und 3 zusammensetzt und somit die 10 innerhalb des Symbols „13“ quasi vorn steht, steht sie im Zahlwort „drei-zehn“ hinten. Das mag manche der Teilnehmer/-innen als Kind verwirrt haben.

Deutlicher sichtbar wird diese Inkonsistenz in den Zahlwörtern ab 21: Im Wort „einundzwanzig“ ist eine klare Strukturaussage enthalten: eins und zwanzig. Geschrieben wird aber 21, was gesprochen „zwanzigundeins“ heißen müsste. Diese Inkonsistenz hat bei vielen Teilnehmer/-innen früher den Lernprozess torpediert, und sie haben mit Zahlendrehern gekämpft, also z. B. 35 als 53 geschrieben.

- Es genügt nicht, die Zahlwortreihe als Gedicht aufsagen zu können. Es ist auch notwendig, sie ab einer bestimmten Stelle aufsagen zu können – so als ob man ein Gedicht ab irgendeiner beliebigen Zeile aufsagen kann, ohne dass man von vorn beginnen muss. Man muss also auch von 5 oder von 7 ausgehend zählen können. Nur dann kann man z. B. $7 + 6$ lösen, indem man von 7 ausgehend weiterzählt. Wenn man die Zahlwortreihe nur von eins ausgehend aufsagen kann, dann muss man vorher noch bis sieben zählen und dann noch sechs weiter zählen, was deutlich aufwendiger ist. Es muss also überprüft werden, ob die Teilnehmer/-innen auch von einer beliebigen Zahl an zählen können.
- Eine erhebliche Effektivierung von Zählprozessen erreicht man, wenn man in der Lage ist, in Zweierschritten, Dreierschritten usw. zu zählen. Außerdem stärkt dies die Zahlraumorientierung.
- Das Rückwärtszählen ermöglicht erste Zugänge zum Subtrahieren, es dient aber ebenso der Herausbildung einer elaborierteren Zahlraumorientierung. Teilnehmer/-innen, die von früheren Problemen im Subtrahieren berichten, sind oft auch deshalb gescheitert, weil mit ihnen das Rückwärtszählen nicht in einem so genügenden Maße routinisiert wurde, dass sie sich geschmeidig gedanklich im Zahlraum rückwärts bewegen konnten.

Für alle diese Zählroutinen gibt es keine didaktischen Tricks. In der gemeinsamen Diskussion von Zählfehlern hilft die Explizierung der Zählprinzipien den Teilnehmern und Teilnehmerinnen, die eigenen Probleme besser zu verstehen. Notwendig ist aber auch eine Routinisierung, also vielfältige Zähl- und Abzähl Anforderungen. Beachten Sie, dass das Abzählen zwar das Zählen – auch in Zweierschritten, Dreierschritten usw. – routinisiert, dass aber das Zählen ab einer bestimmten Zahl und das Rückwärtszählen kaum mit Abzählprozessen geübt werden kann. Hier muss man explizite Zählaufgaben stellen.

1.1.3 Klassifikation und Seriation

Über Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) liegt kaum systematisches Wissen vor, das in die wissenschaftliche Debatte um das Rechnenlernen – die sich mit dem Rechnenlernen von Kindern befasst – eingeordnet wäre. Bezüglich der Fähigkeit zu Klassifikation und Seriation ist in besonderem Maße unklar, ob bei erwachsenen Teilnehmern und Teilnehmerinnen in unserem Kulturkreis diesbezüglich überhaupt Probleme auftauchen – oder ob lediglich lernbiografisch über die Fähigkeit zur Klassifikation und Seriation reflektiert werden muss. In jedem Fall ist die Fähigkeit zu Klassifikation und Seriation eine notwendige Voraussetzung des Rechnenlernens, denn

- Zahlen sind Symbole für Klassen von Mengen gleicher Mächtigkeit. Alle möglichen Mengen, die die Eigenschaft haben, eine Fünfheit zu enthalten, werden mit dem Symbol „5“ oder „fünf“ gelabelt. Man muss das Prinzip der Bildung von Klassen

oder von Kategorien beherrschen, damit man erkennen kann, welche Kollektionen von Dingen überhaupt zu den Fünfhelten dazugehören können.

- Zahlen sind geordnet. Die Idee der Anzahl kann nur entstehen, wenn man Kollektionen von Dingen bezüglich ihrer Anzahl *unterscheidet*. So wie der Begriff „rot“ nur Sinn ergibt, wenn es auch andere Farben gibt, so ist der Begriff „fünf“ nur dann sinnvoll, wenn es auch andere (An-)Zahlen gibt. Man muss also Unterschiede erkennen können, um sinnvoll mit Zahlen arbeiten zu können. In der Psychologie und der Mathematikdidaktik folgt man dabei dem Gedanken, dass die Fähigkeit, Dinge zu sortieren (nach größer/kleiner, dicker/dünnere, länger/kürzer), notwendig ist, um eine Sortierung nach mehr/weniger vornehmen zu können. Dabei scheint die implizite Annahme zu sein, dass es eine Art allgemeine Fähigkeit zur Seriation gibt, dass also, wer Gegenstände systematisch und paarweise strikt ihrer Größe/Dicke/Länge nach sortieren kann, dies auch mit Mengen und mit einem Fokus auf der Anzahl (mehr/weniger) kann.

Klassifikation und Seriation geschieht bei Tätigkeiten wie Sortieren, Kategorisieren, Differenzieren und Zuordnen. Das Sortieren von Mengen nach Eigenschaften schafft die Zuordnung zu Kategorien. Im Laufe des Entwicklungsprozesses können Kinder nach mehreren Kriterien sortieren (nicht nur rot versus grün oder rund versus eckig, sondern auch: rot und eckig versus grün und eckig, versus rot und rund versus grün und rund). Sie erkennen auch, dass ein Gegenstand zu mehreren Kategorien gehören kann. Umgekehrt sollten die Gemeinsamkeiten einer Kategorie erkannt werden (Erkennen der Klassifizierungskriterien).

Im Klassifizieren müssen bei einem Objekt einzelne Aspekte wahrgenommen werden. Beim Erkennen von Anzahleigenschaften müssen ebenso irrelevante Aspekte ausgeblendet werden.

Auch die Zahlen können als Kategorien gesehen werden: Wir schauen auf die Welt mit dem Fokus auf eine bestimmte Eigenschaft, nämlich die Anzahlhaftigkeit oder Mengenhaftigkeit. Wir kategorisieren Mengen hinsichtlich dieser Eigenschaft. Falls sich diesbezügliche Aktivitäten als notwendig erweisen, achten Sie auf Begründungen, warum Dinge zusammengehören. Wir können Gegenstände nach unterschiedlichen Kriterien sortieren – dadurch entstehen unterschiedliche Ergebnisse, dies kann am besten in einem kommunikativen Prozess erkannt, thematisiert und nachvollzogen werden. Die Anzahl ist nur eines von vielen möglichen Kriterien – und man muss sich zunächst einlassen auf die Spezifik des mathematischen Blicks auf die Welt, der genau dieses Kriterium fokussiert.

1.2 Lernziele und Lernwege

In diesem Kapitel wird dargestellt, wie der Erwerb von Zahlbegriff, Zahlraumorientierung und Rechnen stattfindet.

Es gibt kaum empirische Erkenntnisse über die „mathematischen Weltbilder“ und das mathematische Lernen von Erwachsenen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR). Die Mathematikdidaktik weiß kaum etwas darüber, wie EbSR Zahlen oder Rechenoperationen konzipieren, welche Zahlraumvorstellungen sie haben und wie sich das alles vom „mathematischen Weltbild“ von Menschen, die rechnen können, unterscheidet. Kursleiter/-innen sind also permanent aufgefordert, diesen – ihnen wahrscheinlich eher fremden – Weltansichten mit Neugier und analytischer Schärfe

fe zu begegnen. Ebenso wenig wissen wir über die Spezifik der mathematischen Lernprozesse von Erwachsenen im Vergleich zu denen bei Kindern. Dem Autor des *DVV-Rahmencurriculums Rechnen* liegen lediglich einige mündliche Erfahrungsberichte aus „Rechenschwäche“-Förderungen mit Erwachsenen vor. Der Tenor ist dabei der, dass mit Erwachsenen der grundsätzlich gleiche Prozess des Aufbaus von Zahlverständnis, Operationsverständnis und Zahlraumorientierung durchlaufen wurde wie auch bei der „Rechenschwäche“-Förderung von Kindern – und dass dieses Vorgehen sich nach Darstellung der Berichtenden als erfolgreich erwies.

Das *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* bearbeitet diese Wissensunschärfen auf folgende Weise: Die Richtschnur des Curriculums ist der Erwerb von Zahlbegriff, Operationsverständnis und Zahlraumorientierung bei Kindern. Dieser Prozess ist bei EbSR gescheitert. Dieses Scheitern hat individuell je spezifische Ursachen, und im Curriculum sind jene Verstehensknackpunkte benannt, an denen nach den Erfahrungen aus kindlichen Lernprozessen das mathematische Lernen hakt oder scheitert. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Lernprozesse deshalb gescheitert sind, weil die Schule diese Verstehensknackpunkte nicht in notwendiger Weise bearbeitet hat (vergleiche das Konzept der „nicht bearbeiteten stofflichen Hürden“, Meyerhöfer 2011, S. 401–426).

Im *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* werden also Optionen benannt, an denen der frühere mathematische Lernprozess der Teilnehmer/-innen gescheitert ist. Umgekehrt werden damit jene Knackpunkte benannt, an denen auf Stufe 1 besonders sorgfältig Verständnis erarbeiten muss. Erschwert wird dies dadurch, dass die Teilnehmer/-innen über je unterschiedliche Verstehens- und Wissensfragmente, Strategien, Fehlstrategien und Vorstellungsmuster verfügen. Das Curriculum hat einen Vollständigkeitsanspruch bezüglich des zu Leistenden. Es kann aber die Breite des bei den Teilnehmern und Teilnehmerinnen vorfindlichen Spektrums an mathematischen kognitiven Landschaften nur grob abstecken, um Kursleiter/-innen in die Normalität einer von ihnen vielleicht nicht erwarteten Spannweite hineinzuleiten. Für konkrete Erarbeitungs-, Reflexions- und Routinisierungsformate liegt Praxismaterial auf www.grundbildung.de vor.

1.2.1 Zählende Rechenstrategien

Die Hauptaufgabe des Kurses auf Stufe 1 ist es, die Teilnehmer/-innen von ihren zählenden Rechenstrategien hin zu nichtzählenden Strategien zu begleiten, ein adäquates Operationsverständnis von Addition und Subtraktion und eine Zahlraumorientierung bis 30 auszubilden. Zum Ende des Kurses sollten die Teilnehmer/-innen zudem die Plus- und Minusaufgaben bis 20 möglichst auswendig abrufen können. Sie sollen sie dabei nicht auswendig lernen, sondern über nichtzählende Strategien so häufig lösen, dass sie auswendig verfügbar werden.

Alle Menschen rechnen als Kinder zunächst zählend. EbSR sind auf dieser Ebene des Rechnens verblieben. Um ihnen zu nichtzählenden Strategien verhelfen zu können, sollten zunächst sie selbst und auch die Kursleiter/-innen die von den Teilnehmern und Teilnehmerinnen verwendeten Zähl- und Abzählstrategien verstehen. Man kann zählende Strategien nach ihrer Elaboriertheit sortieren (die personenspezifischen Zähltechniken unterscheiden sich dann nochmals stark untereinander). Die am wenigsten elaborierte Strategie ist das „Alleszählen“.

Alleszählen

Zum Auszählen der Aufgabe $3 + 5$ mit dieser Strategie legt man 3 Mengenelemente hin, dann legt man 5 Mengenelemente hin. Nun zählt man aus, wie viele Mengenelemente insgesamt daliegen. Das ist ziemlich aufwendig, denn man zählt dabei jeden Summanden einzeln und auch noch die Summe.

Dieses Verfahren kann man genauso ohne konkret vorhandene Mengen ausführen: Man zählt im Kopf drei Gegenstände ab, dann zählt man ebenfalls im Kopf fünf Gegenstände ab, und schließlich stellt man sich alle Gegenstände gemeinsam vor und zählt die Summe ab. Manche Kinder erbringen diese anspruchsvolle Merkleistung für erstaunlich große Mengen.

Das Alleszählen funktioniert auch für die Subtraktion: Bei $7 - 4$ legt man zunächst sieben Gegenstände hin, dann schiebt man vier Gegenstände beiseite und zählt aus, wie viele Gegenstände noch daliegen.

Weiterzählen

Beim „Weiterzählen“ ($3 + 5$) legt man wieder drei Mengenelemente hin, danach fünf weitere Mengenelemente, wobei man bereits während des Hinlegens der fünf Elemente mitzählt, also „4, 5, 6, 7, 8“. Man muss also zweimal gleichzeitig zählen: Man zählt die fünf hinzugelegten Elemente, und gleichzeitig zählt man, wie viele Elemente insgesamt schon daliegen. Diese Strategie ist zwar schwieriger, aber man spart Zeit, weil man während des Hinzuzählens der fünf Elemente bereits das Ergebnis mitzählt. Noch schneller geht es z. B. mit den Fingern, wenn man die drei am Anfang nicht zählt, sondern gleich als Ganzes zeigen kann.

Bei der Subtraktion ($7 - 4$) legt man sieben Elemente hin, und während man vier Elemente davon wegnimmt, zählt man mit, wie viele noch daliegen: „6, 5, 4, 3“. Auch hier zählt man gleichzeitig die Elemente, die man wegnimmt, und das Resultat. Das ist etwas schwieriger als bei der Addition, weil man einmal vorwärts (den Subtrahenden) und gleichzeitig einmal rückwärts (den Abbau des Minuenden) zählen muss.

Das Weiterzählen kann man ohne konkret vorhandenes Mengenmaterial im Kopf durchführen. Ein großer technischer Fortschritt gegenüber dem Alleszählen ist, dass man sich bei dieser Methode die Mengen nicht mehr vorstellen (und dann abzählen) muss, sondern einfach gedanklich die Zahlwortreihe hochlaufen (Addition) oder runterlaufen (Subtraktion) kann. Genau dieser technische Fortschritt ist aber Menschen, die bei ihren zählenden Rechnentechniken steckengeblieben sind, zum Verhängnis geworden: Der geringere Aufwand trägt oftmals dazu bei, beim Zählen zu verbleiben, statt sich auf effektivere, aber zunächst aufwendigere Strategien einzulassen.

Weiterzählen vom größeren Summanden aus

Eine weitere Verkürzung des Zählprozesses erreicht man, indem man $3 + 5$ nicht mehr von 3 aus zählt, sondern von 5: Bei $3 + 5$ hat man fünf Zählschritte, bei $5 + 3$ nur drei Zählschritte. Wer bereits weiß, welche Zahl die größere ist, der sollte vom größeren Summanden aus zählen.

Unklar bleibt, ob Menschen, die bereits vom größeren Summanden aus weiterzählen, die zugrundeliegende Kommutativität der Addition verstanden haben. Dies ist möglich, ebenso kann es aber sein, dass sie lediglich einen „Rechentrick“ verinnerlicht haben. Mit ihnen muss also diskutiert werden, warum es überhaupt möglich ist, vom größeren Summanden aus weiterzuzählen.

1.2.2 Gründe, das zählende Rechnen zu überwinden

Als Schwierigkeiten und Gefahren des zählenden Rechnens vermerkt bereits Gerster:

- „Die Techniken des Vollständig-Auszählens sind umständlich, die Weiterzähltechniken erfordern doppeltes Zählen (das verbal gestützt werden kann, zum Beispiel bei $4 + 3$ durch die Sprechweise 4 plus 1 sind 5, plus 2 sind 6, plus 3 sind 7; bei $7 - 3$ entsprechend 7 minus 1 sind 6, minus 2 sind 5, minus 3 sind 4; oder man benutzt die Finger).
- Beim zählenden Rechnen ist das Ergebnis oft um 1 zu groß oder zu klein, weil die Rolle des Anfangs- oder Endgliedes der Zählsequenz unklar ist.
- Zählkinder verwenden nicht die Zahlensätze, die sie bereits auswendig wissen, sondern tendieren zur stereotypen Anwendung ihrer Zähltechnik.
- Zähltechniken können trainiert und perfektioniert werden, mit zunehmender Perfektion schwindet aber das Bedürfnis, sich Zahlensätze zu merken. Zähltechniken fördern nicht das Bedürfnis, sich etwas zu merken. Das Repertoire auswendig gewußter Zahlensätze steigt nur sehr langsam oder gar nicht.
- Wenn Kinder in mittleren Schuljahren Fakten immer noch nicht auswendig wissen, verzichten sie auf Merkversuche ganz und verlassen sich voll auf instrumentelle Nutzung von Gegenständen, vor allem der Finger.
- Zählende Rechner haben es schwer, zwischen der Aufgabe und dem nach einem länger dauernden Zählverfahren gefundenen Ergebnis eine Verbindung herzustellen. Das Lernen einer assoziativen Verknüpfung zwischen Aufgabe (= Reiz) und Ergebnis (= Reaktion) gelingt aber nur, wenn Reiz und Reaktion zeitlich dicht aufeinander folgen (etwa innerhalb einer Halbsekunde). Außerdem richtet sich die Aufmerksamkeit von Zählkindern mehr auf die Zählprozedur als auf den Zusammenhang zwischen Aufgabe und Ergebnis.
- Zählkinder entwickeln nicht Beziehungen zwischen Zahlensätzen. Nachdem sie zählend $3 + 3$ berechnet haben, tun sie dasselbe anschließend mit $3 + 4$, ohne sich den Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben bewusst zu machen und ihn zu verwenden. Die beiden nacheinander gestellten Aufgaben $3 + 4$ und $13 + 4$ berechnen sie jeweils zählend, ohne die dekadische Analogie zu verwenden.
- Zählendes Rechnen liefert jeweils nur Einzelfakten. Diese werden aber nicht in ein Beziehungsgeflecht eingebettet, gehen also leicht aus dem Gedächtnis verloren.
- Bei schriftlichen Rechenverfahren, beim Lösen von Sachaufgaben, bei geometrischen Berechnungen usw. beansprucht zählendes Rechnen viel Aufmerksamkeit, die dann für die Planung von Lösungsschritten und das Einhalten von Verfahrensregeln nicht mehr zur Verfügung steht.

Schließlich ist zum Problem des zählenden Rechnens folgendes zu bedenken: Aus der Beobachtung von Lernprozessen ist bekannt, daß das Gehirn dem Prinzip folgt, möglichst wenig Verarbeitungsaufwand zu investieren. Es gibt einen mentalen Widerstand gegen Veränderung eines erlernten Verhaltens. Selbst wenn Lernen (also Verhaltensänderung) stattfindet, scheinen die alten Verhaltensstrukturen noch weiter gespeichert zu bleiben. Unter ungünstigen Umständen, z. B. Streß, können sie erneut das Verhalten bestimmen (Weidenmann, 1991). Gerade bei der Ablösung vom zählenden Rechnen treten in Streßsituationen (z. B. Wettrechnen, Klassenarbeiten) Rückfälle ins zählende Rechnen häufig auf. Wenn ein Kind sich zum ‚Zähler‘ entwickelt hat, sind Hilfsmaßnahmen ab Ende des zweiten Schuljahres sehr aufwendig und oft wenig erfolgreich (Lorenz und Radatz, 1993, S. 117).“ (Gerster 1996, S. 140–142)

1.2.3 Rechenwege: Verschiedene nichtzählende Strategien

Für die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 20 sollen möglichst viele Rechenstrategien („heuristische Strategien“, „Rechenerleichterungen“) kennengelernt werden:

- Verdoppeln/Halbieren
- Fastverdoppeln/Fasthalbieren
- Aufgaben mit Addition bzw. Subtraktion von 1
- Nachbaraufgabe
- Bezug zu 5/10
- Umkehraufgabe
- Analogiebildung
- Nutzen der Seriationslogik
- Ergänzen statt Abziehen
- gegensinniges/gleichsinniges Verändern
- schrittweises Rechnen (Teilschrittverfahren, Stopp bei Zehn)

Verdoppeln/Halbieren

Das Verdoppeln fällt Kindern besonders leicht, die Verdopplungsaufgaben können sie oftmals als erste auswendig. Gerade mithilfe von zweireihigem Material (z. B. 20er-Rechenrahmen oder 20er-Feld) gelingt dies vielleicht auch bei Erwachsenen. Man sollte nun einerseits immer wieder darauf aufmerksam machen, dass die Teilnehmer/-innen mit den Verdopplungen auch bereits die Halbierungen auswendig wissen, sie müssen die Verdopplungen „nur“ umgekehrt nutzen (Wer sich $6 + 6 = 12$ gemerkt hat, der weiß im Grunde, dass $12 - 6 = 6$ ist.) Der Zusammenhang von Addition und Subtraktion sollte sinnvollerweise permanent thematisiert werden.

Fastverdoppeln/Fasthalbieren

Wer einige Verdopplungen und Halbierungen auswendig kennt, der hat bereits eine starke Basis, um sehr viele Aufgaben leicht ohne Zählen zu rechnen: Wenn ich $4 + 4$ weiß, dann kann ich $4 + 5$ und $5 + 4$ leicht ableiten („Nachbaraufgabe“). Von jeder gewussten Verdopplung oder Halbierung kann man somit zwei weitere Aufgaben leicht ohne Zählen ableiten. Kommen nun noch die $+1/-1$ -Aufgaben hinzu, dann hat man sehr schnell die Erfahrung, viele Aufgaben bereits leicht ohne Zählen rechnen zu können. Wenn man – ehrlich gegenüber sich selbst – in einer $1 + 1$ -Tafel mit Buntstift jene Aufgaben kennzeichnet, die man bereits ohne Zählen lösen kann, dann sieht man seinen auswendig gewussten Aufgabenschatz sehr schön wachsen.

Aufgaben mit Addition bzw. Subtraktion von 1

Aufgaben wie $5 + 1$ oder $1 + 8$ oder $9 - 1$ erscheinen uns trivial, für EbSR sind sie das keineswegs, wenn sie die Beziehungen zwischen dem mengenbezogenen „um eins mehr/eins weniger“, der Reihenfolge der Zahlen auf der Zahlwortreihe und den Aufgaben mit $+1$ und -1 nicht verstanden haben. Wenn dieses Verständnis erarbeitet wurde und die Aufgaben mit $+1$ und -1 für die Teilnehmer/-innen leicht ohne Zählen verfügbar sind, dann haben sie einen Vorrat an abrufbaren Aufgaben, der ihnen als Ankerpunkt für weitere Ableitungsstrategien dient. Wenn ich z. B. weiß, dass $8 - 1 = 7$ ist, dann kann ich $8 - 2$ als Nachbaraufgabe von $8 - 1$ leicht lösen.

Nachbaraufgabe

Beispiel $9 - 7$: Ich weiß bereits, was $10 - 7$ ist, nämlich 3. Ich soll die 7 aber von 9 abziehen, also von einem weniger als 10. Also ist $9 - 7 = 2$

Als Nachbaraufgabe bezeichnet man alle Aufgaben, die sozusagen als Nachbarn neben einer Aufgabe liegen, d. h., ein Aufgabenelement ist um eins erhöht oder vermindert.

$3 + 4$ hat die Nachbaraufgaben $2 + 4$, $4 + 4$, $3 + 3$ und $3 + 5$.

$8 - 5$ hat die Nachbaraufgaben $9 - 5$, $7 - 5$, $8 - 4$ und $8 - 6$.

Den Teilnehmern und Teilnehmerinnen muss dabei explizit bewusst gemacht werden, dass diese Aufgaben sehr leicht abgeleitet werden können, wenn man das Resultat von $3 + 4$ bzw. von $8 - 5$ bereits kennt. Auf der Verständnisebene gehört dazu ein umfassendes Verständnis der Beziehung eins mehr und eins weniger.⁶

Die Fastverdopplungen sind spezielle Nachbaraufgaben, ebenso die Aufgaben mit Addition bzw. Subtraktion von 1.

Bezug zu 5/10

Die Aufgaben mit Bezug zu 5 oder 10 sind einfach erlernbar, weil die Fingerstrukturen uns hier eine unmittelbare Hilfe zum Verinnerlichen der Zahlzusammenhänge geben. Allerdings müssen auch diese Beziehungen den Teilnehmern und Teilnehmerinnen bewusst gemacht werden, damit sie sie im Weiteren nutzen können.

Umkehraufgabe

Es ist zentral, dass auf Stufe 1 der Zusammenhang von Addition und Subtraktion sowohl auf der Ebene der Mengenhandlung als auch auf der Zahlebene immer wieder thematisiert wird. Auf der Mengenebene muss also das Vereinen von Mengen in seinem Zusammenhang mit dem Abtrennen von Teilmengen diskutiert werden; auf der Zahlebene spiegelt sich das in der Erkenntnis wider, dass Minusrechnen und Plusrechnen sich gegenseitig rückgängig machen.

Die Umkehraufgaben helfen den Teilnehmern und Teilnehmerinnen einerseits im Sinne einer Rechenstrategie: Ich kann mir schnell überlegen, dass $9 - 6 = 3$ ist, weil ich weiß, dass $3 + 6 = 9$ ist. Fast noch wichtiger sind die Umkehraufgaben für eine Erleichterung des Auswendigwissens von Aufgaben: Ich kann mit der Zahlerlegung 7, zerlegt in 5 und 2, eine Aufgabenfamilie bilden, die als Wissensnetz leichter ab-speicherbar ist als vier einzelne Aufgaben: Zu 7/5/2 gehören die Aufgaben $5 + 2 = 7$, $2 + 5 = 7$, $7 - 5 = 2$ und $7 - 2 = 5$.

Analogiebildung

Ich weiß, dass $7 - 4 = 3$ ist, also weiß ich auch, dass $17 - 4 = 13$ und $27 - 4 = 23$ ist. Diese Zusammenhänge sind EbSR oft nur als technische Anweisung gelehrt worden, z. B.: „Du rechnest nur $9 - 6$ und schreibst die 1 davor.“ Dieser „Rechentrick“ scheitert allerdings bereits bei $17 - 8$. Man kann sich das mathematische Weltbild mancher Betroffenen als fragmentarische Ansammlung solcher nur lokal sinnvollen Rechentricks vorstellen. Diese gilt es daher zu vermeiden.

6) Vgl. ausführlich Kapitel 1.3: „Grundsätze der Ablösung vom zählenden Rechnen: Der relationale Zahlaspekt“.

Analogiebildungen sind unabdingbar, um später in höheren Zahlräumen rechnen zu können (*Stufe 2*). Die Teilnehmer/-innen müssen aber verstehen, warum diese Analogien gelten. Dazu müssen sie verstehen, dass sich zweistellige Zahlen aus Zehnern und Einern zusammensetzen und auf welche Weise Analogien diese Zusammensetzung nutzen.

Nutzen der Seriationslogik

Zahlen sind nach dem Prinzip „Man beginnt bei 1 und dann wird es immer einer mehr“ seriiert. Diese Seriationslogik wird im Kurs expliziert und kann Rechenvereinfachungen bieten. Die Aufgabe $8 - 7$ sollte nicht gerechnet werden, indem man 7 von 8 abzieht bzw. herunterzählt. Bei der Aufgabe $8 - 7$ ist nichts zu rechnen, weil 7 vor 8 steht und somit der Vorgänger von 8 ist, 8 ist der Nachfolger von 7. Beide unterscheiden sich um eins, 8 ist einer mehr als 7, 7 ist einer weniger als 8. Also ist $8 - 7 = 1$. Ähnlich verhält es sich bei $21 - 19$. Diese Betrachtungen mögen trivial erscheinen, sie sind aber für EbSR nicht trivial, vielmehr fehlen ihnen genau solche Einordnungen. Sie sind oftmals darauf trainiert worden, dass im Mathematikunterricht alles „ausgerechnet“ werden soll, sodass sie ihren – eventuell durchaus erkannten – Rechenerleichterungen nicht mehr vertrauen.

Ergänzen statt Abziehen

Beim Subtrahieren stellt es manchmal eine Rechenerleichterung dar, wenn man ergänzt statt abzuziehen: Bei $23 - 19$ ist es recht aufwendig, die 19 von den 23 abzuziehen. Wenn man erkennt, dass die Zahlen relativ dicht beieinander liegen, dann kann man von der 19 zur 23 auffüllen bzw. ergänzen.

Gegensinniges/gleichsinniges Verändern

Dies sind sicherlich die am schwierigsten zu fühlenden Rechenstrategien. Sie werden hier benannt für den Fall, dass Teilnehmer/-innen sie im Rahmen von Rechenkonferenzen (jeder erzählt, auf welche Weise er selbst eine bestimmte Aufgabe löst, die Rechenwege werden dann miteinander in Beziehung gesetzt) vorbringen.

$5 + 7$: Ich erkenne, dass ich 5 um eins erhöhen und gleichzeitig 7 um eins verringern kann, ohne dass sich die Summe ändert. Dann habe ich $6 + 6$, und das weiß ich schon. Also ist $5 + 7 = 12$. Man nennt dies „gegensinniges Verändern“, weil der eine Summand erhöht, der zweite vermindert wird.

$9 - 7$: Ich kenne die Minusaufgaben mit 10. Wenn ich in meiner Ausgangsmenge einen mehr habe und die Differenz gleich bleiben soll, dann muss ich auch einen mehr abziehen. Also muss ich $10 - 8$ rechnen, das ist 2. Man nennt dies „gleichsinniges Verändern“, weil sowohl Minuend als auch Subtrahend erhöht werden.

Zahlzerlegungen und schrittweises Rechnen (Teilschrittverfahren, Stopp bei Zehn)

Die Strategie des schrittweisen Rechnens (andere Benennungen: Teilschrittverfahren, Rechnen über die Zehn, Rechnen mit Zehnerübergang, Stopp bei 10) wird im Zahlenraum über 20 unabdingbar sein, weil viele Aufgaben dort nur noch mit dieser Strategie lösbar sind. Diese Strategie ist die einzige Kopfrechenstrategie, mit der ich alle Plus- und Minusaufgaben lösen kann. Deshalb ist das Beherrschen des schrittweisen Rechnens für alle Kursteilnehmer/-innen ein zentrales Ziel des Kurses.

Unabdingbare Voraussetzung für das Beherrschen dieser Strategie ist das auswendige Beherrschen der Zahlzerlegungen bis 10. Dabei ist es erfahrungsgemäß so, dass die Zerlegungen von 1 bis 6 und die Zerlegung der 10 deutlich leichter auswendig gelernt werden als die Zerlegungen der 7, der 8 und der 9. Es erscheint sinnvoll, sich zunächst auf die einfachen Zahlzerlegungen zu beschränken und erfahrbar zu machen, welche große Zahl an Aufgaben man mit ihnen nichtzählend rechnen kann.

Es ist motivierend, wenn Sie den Teilnehmern und Teilnehmerinnen klar machen, wie viele Aufgaben sie schon ableiten können, wenn sie die Zahlzerlegungen beherrschen: Mit den drei Zahlzerlegungen der 4 ($0 + 4$, $1 + 3$, $2 + 2$) kennt man schon 10 Aufgaben:

$0 + 4 = 4$, $4 + 0 = 4$, $4 - 4 = 0$, $4 - 0 = 4$, $1 + 3 = 4$, $3 + 1 = 4$, $4 - 1 = 3$,
 $4 - 3 = 1$, $2 + 2 = 4$, $4 - 2 = 2$.

Diese Zusammenhänge muss man allerdings auch auf der Mengenebene immer wieder herausarbeiten, denn sie erschließen sich nicht von allein.

Das Auswendigkennen der Zahlzerlegungen ist zwar eine notwendige Bedingung für das schrittweise Rechnen, aber es gibt Teilnehmer/-innen, die die Zahlzerlegungen im Verlauf des Lernprozesses irgendwann beherrschen, sie aber nicht zum schrittweisen Rechnen verwenden. Es gibt also keinen Automatismus von den Zahlzerlegungen zum schrittweisen Rechnen. Vielmehr müssen die Teilnehmer/-innen erleben, dass sie mit dem neuen Verfahren Aufgaben lösen können, die sie mit ihren alten Strategien nicht oder nur sehr mühsam lösen können. Das schrittweise Rechnen ist zwar die universelle Kopfrechenstrategie, aber sie dürfte für Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) auch die widerständigste sein.

Flexible Rechner, Mathekonferenzen

Die Versammlung der Rechenstrategien folgt dem Bild der „flexiblen Rechnerin“: Sie erfasst die gegebenen Zahlen ungefähr in ihren Größenordnungen oder in ihren Positionen auf der Zahlwortreihe und entscheidet sich in Abhängigkeit vom gegebenen Zahlenmaterial für die jeweils effektivste Rechenstrategie:

Wenn $6 + 7$ zu rechnen ist, so ist eine Fastverdopplung einfacher als etwa das schrittweise Rechnen: Ich weiß, dass $6 + 6 = 12$ ist, also muss $6 + 7 = 13$ sein.

$13 - 12$ muss nicht gerechnet werden, wenn man die Seriationslogik nutzt: Die Zahlen stehen nebeneinander in der Zahlwortreihe bzw. die 13 ist Nachfolgerin der 12, also beträgt der Unterschied 1.

Natürlich werden sich nicht alle Teilnehmer/-innen am Ende des Kurses vertraut in allen Strategien bewegen, aber möglichst alle Strategien, zumindest aber alle von den Teilnehmern und Teilnehmerinnen verwendeten Strategien müssen permanent im Kurs präsent sein. Es kommt darauf an, dass jeder einzelne Teilnehmer erlebt, dass seine eigenen nichtzählenden Rechenstrategien bedeutsam und anerkannt sind, dass er aber gleichzeitig sein Repertoire an nichtzählenden Strategien erweitert. Der Erfahrungshintergrund der Teilnehmer/-innen ist dabei, dass in ihrem Grundschulunterricht oft nur das Teilschrittverfahren, eventuell noch das Verdoppeln/Halbieren, präsent waren. An dieser Fokussierung auf das Teilschrittverfahren sind die Kursteilnehmer/-innen gescheitert, sonst wären sie nicht im Kurs auf Stufe 1. Man kann es (für die Grundschule) vereinfacht so sagen: Wer so weit ist, dass er das Teilschrittver-

fahren verstehen kann, der entdeckt es selbst. Wer nicht so weit ist, es zu verstehen, der versteht es auch mit Instruktion und Übung nicht. Als Kursleiter/-in müssen Sie darauf achten, dass dieses Misserfolgserlebnis sich nicht lediglich reproduziert.

Die verschiedenen nichtzählenden Rechenstrategien werden im Kurs präsent, wenn verschiedene Personen (Teilnehmer/-innen und Kursleiter/-innen) berichten, auf welche Weise sie selbst die Aufgabe lösen. In der Mathematikdidaktik nutzt man dafür den Begriff „*Mathekonferenzen*“: Jeder erzählt, auf welche Weise er selbst eine bestimmte Aufgabe löst. Auch kleine Unterschiede können dabei bedeutsam sein. Die Rechenwege müssen miteinander in Beziehung gesetzt werden, sodass die Teilnehmer/-innen verstehen, was ein Verfahren für eine bestimmte Aufgabe effektiv oder weniger effektiv macht.

1.2.4 Bedeutung der Symbolisierung

Die Symbolisierung der Zahlen (Zahlzeichen 1, 2, 3 usw., Würfelaugenmuster, später auch Ideen zum Umgehen mit Zahlen, z. B. $+$, $-$, $>$, ∞ usw.) ist eine hohe Abstraktionsleistung. Aber erst sie ermöglicht ein allgemeines mathematisches Verständnis. Die Symbolisierung ist ein wichtiges Element der Kommunikation, durch Symbole können Informationen übermittelt werden – und dies auf wunderbar effektive Weise: Stellen Sie sich vor, welchen Aufwand man treiben müsste, um seinem Gegenüber klar zu machen, dass man von einer Fünffheit von Gegenständen spricht. Dieses Komplizierte gerinnt einfach im Zeichen 5 oder im Zeigen der fünf Finger. Im Symbol ∞ gerinnt geradezu ein Kosmos von kindlichen und erwachsenen Gedanken zum Unendlichen. Ebenso wunderbar wie die Symbolisierung des Anzahlhaften durch Zahlen ist natürlich die Idee, einfach Buchstaben, etwa ein „A“ oder ein „N“, hinzumalen: Plötzlich kann man etwas in den Sand oder auf Papier malen, was doch eigentlich nur gesprochen existiert.

Für Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) ist es meist zu spät, sie selbst das Bedürfnis nach mathematischen Symbolen erleben zu lassen. Wenn man zum Beispiel Kinder in der ersten Klasse ein paar Wochen lang additive und subtraktive Situationen diskutieren und rechnen lässt, ohne dass dabei die Symbole $+$ und $-$ präsent sind, dann haben die Kinder von sich aus irgendwann ein Bedürfnis einer verkürzten Notation. Die Symbole $+$ und $-$ kommen dann als Erleichterungen ins Spiel, so wie es ja historisch auch der Fall war.

EbSR leiden unter einer Art Symbol-Überfütterung: Sie wurden über ihren gesamten Mathematikunterricht mit Symbolen überschüttet, deren Bedeutung sie nicht oder nicht genau kannten. Die Grundhaltung des Kurses zum Thema „Rechnen“ gegenüber Symbolen ist deshalb eine Fragehaltung: Was erzählt dieses Symbol? Warum wurde es erdacht, welchen Gedanken oder welche Frage sollte es transportieren? Diese Fragen müssen auch dann in den Raum gestellt werden, wenn der Kursleiter/-in die Kursleiterin sie nicht beantworten kann oder nur eigene Hypothesen hat, denn die Teilnehmer/-innen müssen in den Grundsatz eingearbeitet werden, dass man Symbole auf ihre Bedeutung hin befragen muss und dass es nicht außergewöhnlich ist, dass auch Fachmenschen manchmal Schwierigkeiten in der Beantwortung solcher einfacher Fragen haben.

Darstellungsformen für Zahlen

Die Abbildung zeigt verschiedene Darstellungsformen für Zahlen: Ziffern, Würfelbilder, andere Punktbilder, Striche etc.

Die Teilnehmer/-innen sollen sich nicht nur vor Augen führen, welche verschiedenen Darstellungsformen für Zahlen ihnen in der Welt begegnen. Sie sollen die inhärenten Logiken der jeweiligen Zahldarstellungen analysieren und weiterführen. So ist beim Punktmuster in der dritten Zeile die Fortführung recht deutlich vorgegeben. Bei den Würfelmustern gibt es hingegen viele verschiedene Möglichkeiten, die Folge der Muster weiterzuführen, weil die Würfelmuster mehreren Symmetrien folgen, die keine Hierarchie zu haben scheinen.

Herausuarbeiten ist eine Besonderheit unserer Zahlzeichen: Im Gegensatz zu den anderen in der Abbildung versammelten Zahldarstellungen ist in unseren Zahlzeichen die Kardinalität der bezeichneten Menge völlig verschwunden. Das Symbol für die eins besteht nicht etwa aus einem Strich, sondern aus zwei Strichen. Das Symbol für die vier besteht nicht aus vier Strichen, sondern aus drei Strichen. Das Symbol für die sechs wird in einem einzigen Zug geschrieben, es besteht nicht etwa aus sechs Teilen. Diese besondere Eigenschaft unserer Zahlsymbole sorgt dafür, dass wir Anzahlen sehr effektiv hinschreiben können: Das Symbol für neun nimmt ebenso wenig Platz ein wie das Symbol für zwei, wohingegen neun Punkte mehr Platz benötigen als zwei Punkte. Diese besondere Eigenschaft unserer Zahlsymbole könnte aber auch etwas gewesen sein, das den Kursteilnehmern und Kursteilnehmerinnen den Zugang zu Zahlen versperrt hat, weil es sie irritiert hat, dass das Bezeichnete – die Anzahlen – so gar nichts mehr mit dem Zeichen – den Zahlsymbolen – zu tun hat und dass dieser Umstand von den Erwachsenen niemals thematisiert wurde.

Ziffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Würfelbild										
mögliche Punktbilder										
mögliche Punktbilder										
Striche					/	/	/	/	/	/

Eine spezielle Art der Symbolisierung von Zusammenhangsdenken sind Gleichungen. Im Jenaer Rechentest (JRT) 1 muss zu den folgenden Gleichungen formuliert werden, welche Fragen zu den Gleichungen passen, und die Lücken müssen gefüllt werden:

$\square + 3 = 8$

$2 + \square = 7$

$\square - 5 = 4$

$9 - \square = 2$

Hier muss zunächst ein Missverständnis überwunden werden: Das Gleichheitszeichen wird oftmals als Anweisung, dahinter das Ergebnis zu schreiben, missverstanden. Es ist aber ein Symbol dafür, dass auf der linken und auf der rechten Seite des Zeichens die gleiche Anzahl versammelt ist. In diesem Sinne fordert dieser Typus Aufgaben das Verständnis einer Teil-Teil-Ganzes-Beziehung heraus. Man muss verstehen, welche Mengen- und Zahlzusammenhänge hier beschrieben sind.

1.2.5 Was ist Addieren? Was ist Subtrahieren? Wie hängen sie zusammen?

Wer nicht rechnen kann, hat oftmals auch nicht verstanden, was „Plusrechnen“ oder „Minusrechnen“ eigentlich bedeutet. Im JRT wird das Operationsverständnis der Addition mit folgender Frage überprüft: „Stell dir vor, du bist der Lehrer und erklärst, was mit $2 + 4 = 6$ gemeint ist. Erkläre das mithilfe der Würfel.“ Vor dem Probanden liegen dabei Würfel, mit denen er arbeiten soll. Falls keine Mengenhandlung mit den Würfeln erfolgt, wird weitergefragt: „Kannst du eine Rechengeschichte erzählen, die zur Aufgabe $2 + 4 = 6$ passt?“

Die gleichlautende Subtraktionsfrage arbeitet mit der Aufgabe $6 - 4 = 2$.

Man kann den Begriff des Operationsverständnisses vielleicht so fassen: Es gilt zu verstehen, welche Fragen die Rechenoperation an Zahlen stellt und auf welche Weise sie sie beantwortet.⁷

Eine etwas andere Dimension von Operationsverständnis erschließt der folgende Begriff:

„Unter welchen Umständen wollen wir sagen: Das Kind hat die Operationen des Addierens/Subtrahierens ‚verstanden‘?“

Operationsverständnis beim Addieren/Subtrahieren besteht nach unserer Auffassung in der Fähigkeit, Verbindungen herstellen zu können zwischen

- (meist verbal beschriebenen) konkreten Sachsituationen,
- modell- oder bildhaften Vorstellungen von Quantitäten,
- symbolischen Schreibweisen (meist in Form von Gleichungen) für die zugrunde liegenden Qualitäten und Rechenoperationen.“ (Gerster und Schultz 2000, S. 351)

In der mathematikdidaktischen Debatte wird die hier beschriebene Fähigkeit als „Intermodalität“ bezeichnet. Dieser Begriff kann einfacher in konkrete Anforderungen übersetzt werden: Man kann konkret untersuchen, ob ein Mensch in der Lage ist, zwischen diesen verschiedenen „Modalitäten“ oder Arten, eine Operation zu deuten, hin und her übersetzen kann. Man sieht aber ebenso, dass dieses Übersetzen zwischen Modalitäten nur indirekt zeigt, ob jemand wirklich verstanden hat, welche Fragen eine Operation stellt und auf welche Weise sie sie beantwortet.

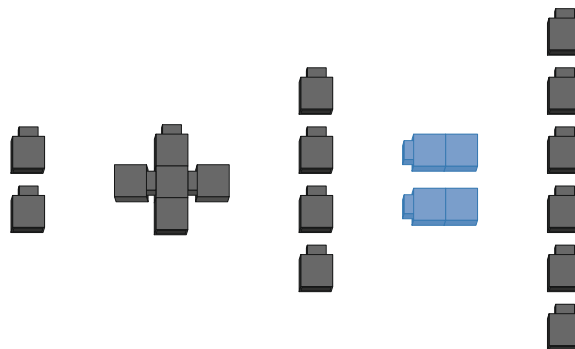
Aus Defiziten im Operationsverständnis resultieren nicht nur die bekannten Probleme von Schülern und Schülerinnen mit Sachaufgaben, sondern mit solch defizitären Operationsvorstellungen versteht man die halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren nicht, man lernt nicht richtig, was Multiplizieren und Dividieren ist, und man bekommt Schwierigkeiten, die Addition und Subtraktion von Brüchen sowie von Variablen und Termen zu beherrschen.

7) Präziser formuliert: Welche Fragen in welchen Situationen stellt die Operation an Mengen und Zahlen und welche Weisen der Beantwortung gelten in der Mathematikergemeinschaft als gültig?

Für zählende Rechner heißt Addieren, die Zahlwortreihe hochzulaufen. Subtrahieren heißt, die Zahlwortreihe runterzulaufen. Dieses Hoch- und Runterlaufen begegnet uns in vielerlei Varianten (vergleiche Abschnitt 1.2.1 Zählende Rechenstrategien), zum Teil mithilfe von vorgestellten Mengenelementen, zum Teil mit einer vorgestellten Zahlwortreihe, zum Teil durch „freies Laufen auf der Zahlwortreihe“ ohne eine damit verbundene konkrete Vorstellung.

Beim Zählen sind das Addieren und Subtrahieren also auf die Position der Zahlen auf der Zahlwortreihe bezogen. Beim Rechnen hingegen werden Fragen über Anzahlen gestellt und beantwortet. $3 + 5$ heißt: Zwei Mengen, eine Menge mit drei Elementen und eine Menge mit fünf Elementen, sollen zusammengefügt werden. Man kann dazu beide Mengen konkret physisch zusammenfügen. Es kann aber auch die eine Menge zur anderen dazugelegt oder dazugedacht werden. Die Frage ist nun: Wie viele Elemente hat die so entstandene Gesamtmenge?

Wer das nicht weiß, der findet in der oben beschriebenen JRT-Aufgabe mit $2 + 4 = 6$ keine Rechengeschichte, in der irgendwelche zwei Dinge mit irgendwelchen vier Dingen zu sechs Dingen zusammenkommen. Die „Erklärung“ der Aufgabe mit Würfeln erfolgt dann gelegentlich so, dass die Aufgabe in ihrer Symbolform einfach mit Würfeln nachgelegt wird:



$8 - 5$ heißt: Von einer Menge mit 8 Elementen soll eine Teilmenge mit fünf Elementen weggenommen werden. Die Frage lautet: Wie viele der acht Elemente sind liegengeblieben? Aus einer Menge wird also eine Teilmenge herausgelöst oder extrahiert.

$8 - 5$ kann aber auch heißen: Bei einer Menge mit acht Elementen und einer Menge mit fünf Elementen lautet die Frage: Wie viel mehr Elemente als in der 5-elementigen Menge sind in der 8-elementigen Menge enthalten? Auf der Zahlenebene: Wie viel mehr als 5 ist 8?

In der symbolischen Darstellung der Subtraktion $8 - 5$ als Abziehen oder als Herauslösen einer Teilmenge taucht das Problem auf, dass die Ausgangsmenge (8) und die abziehende oder herauszulösende Menge (5) beide notiert werden. Wenn man das aber mengenmäßig macht, dann ist nach dem Herauslösen der Fünfermenge die Ausgangsmenge nicht mehr da. Es liegen nach Vollziehen der Operation eine Fünfermenge und eine Dreiermenge da. Man sieht von der Aufgabe $8 - 5 = 3$ die letzten beiden Elemente. Bei der Addition $3 + 5 = 8$ hingegen sieht man am Ende des Prozesses direkt die Achtermenge, also das Resultat. Diese Unterschiedlichkeit hat vielen Erwachsenen mit bSR den Zusammenhang zwischen Mengenhandlung und symbolischer Darstellung vernebelt und muss deshalb explizit diskutiert werden.

Addition und Subtraktion sind direkt miteinander verbunden. Das Zusammenfügen zweier Mengen kann durch das Herauslösen einer Teilmenge aus der so entstandenen Teilmenge rückgängig gemacht werden. Ebenso kann das Herauslösen einer Teilmenge aus einer Menge rückgängig gemacht werden durch das Wiederausführen der herausgelösten Teilmenge mit der Restmenge. Die Subtraktion kann also die Addition rückgängig machen oder umkehren, und die Addition kann die Subtraktion rückgängig machen oder umkehren.

Auf der Zahlenebene heißt das:

Die Addition $a + b = c$ hat die Umkehrungen $c - b = a$ und $c - a = b$.

Die Subtraktion $d - e = f$ hat die Umkehrung $f + e = d$.

Das bringt nun ein erhebliches Potenzial für Rechenerleichterungen mit sich: Wer weiß, dass $3 + 6 = 9$ ist, der muss $9 - 3$ und $9 - 6$ nicht rechnen, wenn er den Zusammenhang von Addition und Subtraktion kennt. Auch für das Auswendigwissen des kleinen „Eins-plus-Eins“ und des kleinen „Eins-Minus-Eins“ bringt diese Erkenntnis erhebliche Vereinfachungen: Wenn ich die Zahlzerlegung von 6 in 2 und 4 kenne, dann kenne ich bereits vier Aufgaben, die man auch als Aufgabenfamilie bezeichnen kann, nämlich $2 + 4 = 6$, $4 + 2 = 6$, $6 - 4 = 2$ und $6 - 2 = 4$.

1.2.6 Wie viel? Der kardinale Zahlaspekt

Wir schauen beim Abzählen mit einem bestimmten Fokus auf die Welt. Dabei ist nicht nach einer Eigenschaft wie Temperatur, Länge, Tonhöhe, Geschmack, Schmerzhaftigkeit gefragt, sondern eine andere spezifische Eigenschaft wird in den Blick genommen: die „Anzahlhaftigkeit“, auch „Kardinalität“ (oder „Mächtigkeit einer Menge“) genannt. Diese Eigenschaft erschließt sich nur, wenn man sehr oft erlebt hat, wie man sie bestimmt. Man muss also viele Dinge abgezählt haben.

Man kann sich z. B. einen Haufen Haselnüsse vorstellen. Ein Kind will wissen, wie viele Nüsse es sind, es will sie abzählen.

- Eine Möglichkeit, den Überblick zu behalten, besteht darin, dass man jede gezählte Nuss zur Seite schiebt. Der Haufen der gezählten Nüsse wird immer größer, der Haufen der nicht gezählten Nüsse wird immer kleiner. Irgendwann sind alle Nüsse gezählt.
- Wenn man etwas besser zählen kann, dann tippt man die Nüsse nur noch an, schiebt sie aber nicht mehr einzeln zur Seite.
- Noch schwieriger ist es, die Nüsse nur noch mit den Augen abzuzählen, sie also dabei gar nicht mehr anzufassen oder auf sie zu zeigen.

Dabei scheint es wichtig zu sein, Kinder diese Schwierigkeitsstufen eigenständig durchlaufen zu lassen. Wenn Sie Teilnehmer/-innen haben, die auch kleinere Mengen nicht mit den Augen abzählen können, dann kann es sein, dass sie – aus welchen Gründen auch immer – zu früh auf die Abzählhilfen des Beiseiteschiebens oder des Antippens verzichtet haben. Man muss dann noch mal einen Schritt zurückgehen, also diese Abzählhilfen so lange nutzen, bis man sie nicht mehr benötigt. Beim

Abzählen größerer Mengen greifen auch Erwachsene sinnvollerweise auf diese Hilfen zurück. Wer das nicht tut, der wird Schwierigkeiten haben, zu richtigen Abzählresultaten zu kommen.

Ein Kind, das die Zahlwortreihe als Gedicht aufsagt, ohne dieses Gedicht mit vielen Abzählerfahrungen verbinden zu können, muss sogar eine noch schwierigere Aufgabe als „nur mit den Augen zählen“ erledigen: Es hat ja nicht mal mehr Nüsse als Merkhilfen, es muss die Reihenfolge der Zahlwörter gewissermaßen in den leeren Raum hinein erlernen. Es kann also sein, dass einige Teilnehmer/-innen das Zählen (also das Aufsagen der Zahlwortreihe) deshalb schwer erlernt haben, weil sie zu wenig Abzählchancen hatten. Deshalb ist es auch problematisch, wenn Eltern oder Großeltern die Kinder auf das Zählen fokussieren, statt sie vielfältig abzählen zu lassen.

Das reine Aufsagenlassen der Zahlwortreihe wie ein Gedicht ist aber nicht vorrangig deshalb problematisch, weil den Kindern das Erlernen der Zahlwortreihe damit unnötig erschwert wird. Schwerer wiegt es, wenn Kinder mit wenigen Abzählerfahrungen nicht verstehen, wozu Zahlen da sind. Sie denken möglicherweise, dass Zahlen nur zum Zählen oder zum Rechnen gebraucht werden. Diese absurde Vorstellung wird vom Mathematikunterricht immerfort bestätigt, wenn dort nur Wert auf das Produzieren korrekter Resultate gelegt wird.

Zahlen sind aber zunächst gar nicht zum Rechnen da. Zahlen sind zunächst dazu da, Anzahlen zu beschreiben. Sie haben also den Zweck, uns Auskunft über eine bestimmte Eigenschaft von Teilen der Welt zu geben. So wie die Wörter rot, gelb, grün usw. uns Auskunft über eine andere Eigenschaft von bestimmten Teilen der Welt geben („Diese Hose ist blau.“), so geben die Zahlwörter ebenfalls Auskunft über Teile der Welt, allerdings bezüglich der Eigenschaft „Anzahlhaftigkeit“. Um diese Perspektive zu betonen, kann man es etwas verfremdend formulieren: „Der hier versammelte Teil von Welt (die Nüsse, die da liegen) verfügt bezüglich der Anzahlhaftigkeit über die Eigenschaft 8.“ Diese Eigenschaft, Anzahlhaftigkeit, scheint unabhängig davon zu sein, ob die Kollektionen aus Dingen gleicher Art oder verschiedener Art bestehen. Den Anzahlen kann man Zahlen zuordnen und diesen Zahlen kann man verschiedene Symbole zuordnen: drei, 3, ||| usw. Im Grunde passiert hier nichts weiter, als dass wir Mengen oder Kollektionen von Gegenständen betrachten, dabei auf eine bestimmte Eigenschaft fokussieren, nämlich die Anzahlhaftigkeit oder Kardinalität, und dass wir den Mengen dann eine Zahl als eine Art Label anhängen. Dieses Label kennzeichnet dann, welche konkrete Eigenschaft die Menge bezüglich der Anzahlhaftigkeit hat, ob die Menge also bezüglich der Eigenschaft „Anzahl“ konkret die Eigenschaft 2 oder 3 oder 5 oder 9 hat.

Wer beim zählenden Rechnen hängenbleibt, weiß oftmals einfach nicht, wozu Zahlen da sind, weil er es nicht erfahren hat. Er denkt, Zahlen seien zum Rechnen da. Wenn Zahlen nur „die Zahlwortreihe“ sind, dann wird Rechnen zum Entlanglaufen auf der Zahlwortreihe. Addieren heißt dann Vorwärtslaufen, Subtrahieren heißt Rückwärtslaufen.

Zur Ablösung vom zählenden Rechnen gehört also die Anbindung der Zahlwortreihe an die Erkenntnis, dass Zahlen Anzahlen beschreiben. Kontrastierend dazu muss man mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen diskutieren, in welchen nichtkardinalen Zusammenhängen ihnen Zahlen begegnen:

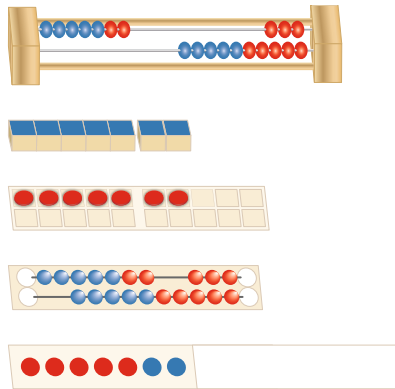
Zahlen begegnen ihnen als **Ordnungszahlen**: Der erste, der zweite, der dritte usw. Hier muss zum einen der Unterschied zwischen „drei“ und „dem dritten“ klar werden. Manch einer der Teilnehmer/-innen wusste oder weiß nicht, dass der dritte Finger (oft der Mittelfinger) gar nicht „die Drei“ ist. Wer den Zeigefinger für „die Zwei“ hält und den Ringfinger für „die Vier“, für den ergibt „Zwei plus Vier“ entweder keinen Sinn oder er denkt, dass „Zwei plus Vier“ gleich zwei ist, weil er schließlich zwei Finger hochhält. Wichtig ist auch zu wissen, dass die Ordnungszahl selbst nur eine Kardinalität von eins hat. Der Jenaer Rechentest (JRT) 1 formuliert dazu folgende Frage: „An einer Straße stehen zehn Bäume. Der zweite und der siebente Baum werden abgesägt. Wie viele Bäume bleiben noch stehen?“ Es geht hier darum zu verstehen, dass der zweite Baum nur ein Baum und dass der siebente Baum nur ein Baum ist.

Zahlen begegnen den Teilnehmern und Teilnehmerinnen als **Kodierungszahlen**: Der Bus mit der Nummer 68 hat weder 68 Plätze noch 68 Stationen, noch wurde die Linie im Jahr 1968 eingerichtet. Die Nummer 68 hat keinerlei Bedeutung – es gibt hier natürlich Ausnahmen. Man kann aber die Busnummer 68 nicht sinnhaft mit der Busnummer 72 verrechnen. Das Gleiche gilt für Telefonnummern: Keineswegs kann ich meine Telefonnummer mit der meiner Frau addieren und erhalte die Nummer unseres Kindes. In unserer Umwelt werden Zahlen häufig in solchen Kodierungsfunktionen verwendet, innerhalb derer keine sinnvolle rechnerische Verarbeitung möglich ist. Es ist für EbSR keine triviale Frage, welche der sie umgebenden Zahlen sinnvoll mit Kardinalitäten, mit Ordnungen oder mit Maßeinheiten behaftet sind und welche im Sinne des Kodierungsaspektes keine solche sinnvolle Füllung haben.

1.3 Grundsätze der Ablösung vom zählenden Rechnen: Der relationale Zahlaspekt

In der Mathematikdidaktik gibt es eine langandauernde Diskussion darüber, was schlussendlich die Hauptschwierigkeit bei der Ablösung vom Zählen hin zu Rechenstrategien ist, was also das Scheitern „mathematischer Analphabeten“ einst verursacht hat und was dieses Scheitern überwinden kann.

Es gibt Ansätze, die darauf zielen, dass Kinder die sogenannte simultane und quasisimultane Mengenerfassung beherrschen. Simultane Mengenerfassung meint dabei, dass man Mengen mit bis zu vier Elementen auf einen Blick erfassen und ihre Mächtigkeit benennen können muss. Der Schwerpunkt liegt bei „auf einen Blick“! Die Elemente der Menge sollen also nicht ausgezählt werden, sondern simultan, d. h. zeitgleich, erfasst werden. Das geht bei Mengen mit bis zu vier Elementen. Ab fünf Elementen ist eine zeitgleiche Erfassung nur möglich, wenn man eine Strukturierungshilfe hat, z. B. die Fünfeinteilung bei den nachfolgend abgebildeten Grundschulmaterialien. Von oben nach unten handelt es sich um den Rechenrahmen, die rotblauen Würfel und Fünferstangen und das Zwanzigerfeld. Die beiden unteren Materialien haben keinen speziellen Namen (das untere könnte man „Zehnerstreifen“ nennen), folgen aber der Fünfeinteilung ebenfalls. Auch die Hände sind in diesem Sinne als Material mit Fünferstruktur nutzbar. Man spricht von „quasisimultaner Mengenerfassung“, weil die Mengenerfassung jenseits der vier nicht mehr „echt simultan“, sondern nur noch „quasisimultan“ ist.



Kinder sollen Mengen simultan und quasisimultan erfassen können, damit sie Mengen schnell überblicken können. Das ermöglicht ihnen, beim Lösen von Aufgaben mit dem Material schnell einen Zusammenhang zwischen der Aufgabe und dem Ergebnis herzustellen. Nur dann besteht die Möglichkeit, Aufgabe und Ergebnis gemeinsam im Langzeitgedächtnis abzuspeichern.

Die Frage ist nun, ob es ausreicht, Mengen (quasi)simultan erfassen zu können. Offenbar ist das nicht der Fall, denn es gibt Kinder, die dies zwar beherrschen, die aber trotzdem beim zählenden Rechnen verbleiben.

Deshalb entwickelte sich die Auffassung, dass die Schüler/-innen diese quasisimultanen Mengenwahrnehmungen zusätzlich mental repräsentieren können sollen, d. h., sie sollen sich die Mengen und die Mengenhandlungen auch noch *vorstellen* können. Die Annahme dabei ist, dass solche Vorstellungshandlungen dazu führen, dass die Kinder diese geistigen Handlungen Schritt für Schritt automatisieren und irgendwann dann ohne konkrete Mengenvorstellung vollziehen können. Hergestellt werden solche Ablösungsprozesse z. B. dadurch, dass die Handlungen an dem strukturierten Material zwar noch haptisch vollzogen werden, aber nicht mehr sichtbar sind, etwa indem man einen Sichtschirm davorstellt oder die Augen verbindet oder ein Tuch über das Material legt. Arbeitet man mit den Händen, so kann man sie auch einfach außerhalb des Blickfeldes halten. Wie der angenommene Übergang zu einem abstrakten Zahlhandeln konkret aussieht, wird in diesem Ansatz allerdings nicht beschrieben.

Es zeigt sich, dass auch dieser Ansatz nicht ausreicht. Es gibt Kinder, die sich Mengen vorstellen, sie (quasi)simultan repräsentieren, dann aber trotzdem Summanden oder Subtrahenden sowie das Ergebnis auszählen. Ein dritter Ansatz:

In diesem Ansatz wird angenommen, dass die Schüler/-innen vorrangig verstanden haben müssen, dass Zahlen miteinander in Beziehung stehen. Dazu gehört das Verständnis von „mehr als“ und „weniger als“ sowohl auf der Zahlen- als auch auf der Mengenebene. Fundament dafür ist das Verständnis, dass Zahlen sich aus anderen Zahlen zusammensetzen, die 5 z. B. aus 2 und 3 oder 4 und 1, aber auch aus 1 und 2 und 2. Zugespielt kann man sagen: Die 5 setzt sich aus 5 Einsen zusammen, die 7 setzt sich aus 7 Einsen zusammen, und 5 ist 2 weniger als 7, weil 5 Einsen eben 2 Einsen weniger sind als 7 Einsen. Gleichzeitig ist damit 7 zwei mehr als 5. Man spricht dabei vom „relationalen Zahlbegriff“ oder „Beziehungszahlbegriff“. Diesem Ansatz folgt z. B. Michael Gaidoschik (2007) in seinem Buch *Rechenschwäche verstehen*, in dem er viele wertvolle Unterrichtsvorschläge für die Ablösung vom zählenden Rechnen versammelt.

Es sei angemerkt, dass der Gedanke des relationalen Zahlbegriffs oder Beziehungszahlbegriffs die obigen beiden Ansätze in einem neuen Licht erscheinen lässt: Sowohl die quasisimultane Mengenerfassung als auch das gedankliche Vorstellen von Mengen erscheinen nun als *Hilfsmittel*, um den Lernenden auf die Relationen zwischen Zahlen zu fokussieren. Wer Mengen quasisimultan wahrnimmt, der nimmt sie eben wahr als aus Teilmengen zusammengesetzt. Wer sich Mengenrepräsentationen anhand von strukturiertem Material vorstellt, der stellt sich zum Beispiel die 8 als aus 5 und 3 zusammengesetzt vor. Damit ist aber auch eine Erklärung dafür nahegelegt, wann die beiden ersten Ansätze scheitern, nämlich dann, wenn man Mengen zwar quasisimultan wahrnimmt oder sich gar vorstellt, dabei aber die Zahlrelationen nicht in den Blick nimmt und nicht zum Rechnen nutzt; wenn man also trotz quasisimultaner Mengenwahrnehmung oder Mengenvorstellung weiter zählend rechnet. Umgekehrt ist damit nahegelegt, dass es Teilnehmer/-innen gibt, die keine quasisimultane Mengenerfassung beherrschen und Mengen auch nicht gedanklich vorstellen und trotzdem zum nichtzählenden Rechnen gelangen: Diese Teilnehmer/-innen nutzen eben ihre Kenntnisse über Zahlrelationen zum Rechnen, um sich von ihren zählenden Strategien zu lösen.

Damit ist der weitere Weg zur Ablösung vom zählenden Rechnen vorgezeichnet. Es geht darum, Zahlrelationen zu verstehen. Wir zeichnen den Weg hier kleinschrittig auf, er führt über den Vergleich von Mengen in den Kategorien von gleich, mehr und weniger über die Idee des „eins mehr/eins weniger“ und „zwei mehr/zwei weniger“ zu „x mehr/x weniger“. Letzteres wird über die Bezüge zu Fünf und Zehn sowie über Zahlerlegungen erschlossen. Die Einbeziehung von Übungen der Quasisimultanerfassung und der mentalen Repräsentation von Mengen wird dabei nicht im *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* selbst vermerkt, sondern bleibt der Ausschärfung in Lehrmaterialien vorbehalten.

1.3.1 Mehr/weniger, um eins mehr/weniger, um zwei mehr/weniger

Konzipiert man die Ablösung vom zählenden Rechnen entlang des relationalen Zahlbegriffs, dann führt der Weg zunächst von der Beziehung „mehr/weniger/gleich viel“ zur Beziehung „um x mehr/um x weniger/gleich viel“, und zwar sowohl auf der Mengenebene als auch auf der Zahlenebene, die permanent miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen.

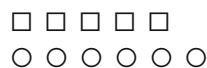
Zum Vergleich von zwei Mengen stehen uns zwei prinzipielle Wege offen:

- a) Beim Vergleich durch *Eins-zu-Eins-Zuordnung*⁸ wird jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet. Wenn das klappt, dann „sind beide Mengen gleich mächtig“ oder „repräsentieren die gleiche Anzahl“ oder „es sind gleich viele“. Bleiben Elemente übrig, denen kein Vergleichselement zugeordnet werden kann, dann „sind die beiden Mengen nicht gleich mächtig“, sie „repräsentieren nicht die gleiche Anzahl“ oder „es sind bei der einen Menge mehr“ und „es sind bei der anderen Menge weniger“.
- b) Beim Vergleich durch *Abzählen und Anzahlvergleich* zählt man die Elemente der beiden Mengen aus und vergleicht die festgestellten Anzahlen.

8) Auch Stück-für-Stück-Zuordnung, 1-zu-1-Abbildung, 1-zu-1-Korrespondenz.

Die Teilnehmer/-innen werden den zweiten Weg beherrschen, es geht deshalb darum, sie mit dem ersten Weg bekannt zu machen. Zählende Rechner/-innen müssen im Sinne des kardinalen Zahlbegriffs daran gewöhnt werden, die Zahlen – die sie kennen, die sie aber im Rechnen nicht mit einer kardinalen Bedeutung verbinden – mit den zugehörigen Mengen zusammenzudenken. Zählende Rechner/-innen denken den Mengenvergleich ungefähr so: Die eine Menge hat sieben Elemente, die andere Menge hat neun Elemente. 9 kommt (in der Zahlwortreihe) hinter 7, deshalb ist die Neunermenge größer als die Siebenermenge. Dieses Denken soll ergänzt werden durch ein direktes Mengendenken, das nicht den Weg über die Zahlwortreihe geht – denn diese Fokussierung auf das Rechnen als Entlangwandern auf der Zahlwortreihe soll aufgelöst werden. *Deshalb* müssen die Teilnehmer/-innen in einem ersten Schritt den direkten Mengenvergleich über Eins-zu-Eins-Zuordnung kennen.

Im zweiten Schritt kommt nun eine neue Formulierung hinzu. Sie ermöglicht, das „mehr“ oder „weniger“ präzise zu erfassen. Es ist die Formulierung „eins mehr“ und „eins weniger“ bzw. „um eins mehr“ und „um eins weniger“. Diese Formulierung erscheint zunächst trivial, sie ist es aber nicht: Sie kommt im Alltagsleben kaum vor, deshalb fällt es vielen Kindern schwer, sie überhaupt sprachlich zu verstehen. *Sie haben also keine Begrifflichkeit* für eine Situation wie die folgende:



Man müsste ja etwas sagen wie „Hier ist ein Kreis mehr, als es Quadrate sind.“ oder „Hier ist ein Quadrat weniger, als es Kreise sind.“ – jeweils eine ausgesprochen komplexe Formulierung. Sobald man die Situation dynamisiert, reduziert sich die sprachliche Komplexität: „Wenn man einen Kreis wegnimmt, dann sind es gleich viele.“ oder „Wenn man ein Quadrat hinzufügt, dann sind es gleich viele.“

Im Mathematikunterricht ist man aber immerfort mit solcherart statischen Situationen konfrontiert, für die die Kursteilnehmer/-innen keine Sprache hatten bzw. haben, wenn die sprachliche Beschreibung der Situation auf der Mengenebene im Unterricht nicht häufig genug explizit gefordert wurde und wird. Das führt(e) zu einem mangelhaften Verständnis dessen, wie die Mengen sich zueinander verhalten und wie diese Mengenverhältnisse sich auf der Zahlenebene spiegeln.

Für die obige Situation müssten folgende Zusammenhänge geklärt werden:

- „Hier ist ein Kreis mehr, als es Quadrate sind.“ Das ist gleichbedeutend mit: „Hier ist ein Quadrat weniger, als es Kreise sind.“
- „Wenn man einen Kreis wegnimmt, dann sind es gleich viele.“ Das ist gleichbedeutend mit: „Wenn man ein Quadrat hinzufügt, dann sind es gleich viele.“
- Es sind fünf Quadrate und sechs Kreise. Fünf ist einer weniger als sechs. Das ist gleichbedeutend mit: Sechs ist einer weniger als fünf.
- Das ist gleichbedeutend mit: Fünf und sechs unterscheiden sich um eins. Das ist gleichbedeutend⁹ mit: Die Zahl 5 und die Zahl 6 unterscheiden sich um eins.

9) Es ist deshalb gleichbedeutend, weil die Zahl 5 nur ein Label ist für die Anzahl bei (abstrakt gedachten) Fünfermengen und die Zahl 6 nur ein Label für die Anzahl bei (abstrakt gedachten) Sechsermengen.

- Das ist gleichbedeutend mit: Die Zahl 5 steht in der Zahlwortreihe vor der Zahl 6, und die Zahl 6 steht in der Zahlwortreihe hinter der Zahl 5.
- Dafür gibt es auch die Formulierung: Die Zahl 5 ist der Vorgänger der Zahl 6, und die Zahl 6 ist der Nachfolger der Zahl 5.
- Dafür gibt es auch die Formulierung: Die Zahl 5 ist kleiner als die Zahl 6, und die Zahl 6 ist größer als die Zahl 5.
- Konkret: Die Zahl 5 ist um eins kleiner als die Zahl 6, und die Zahl 6 ist um eins größer als die Zahl 5.
- Anders betrachtet: Die 5 besteht aus 5 Einsen, die 6 besteht aus 6 Einsen (so wie die Fünfermenge 5 Elemente hat und die Sechsermenge 6 Elemente hat). Die 6 besteht also aus einer Eins mehr als die 5, deshalb ist sie um eins größer als 5. Die 5 besteht aus einer Eins weniger als die 6, deshalb ist sie um eins kleiner als 6.
- Die dynamische Deutung dessen ist: Wenn ich 5 um eins vermehre, dann erhalte ich 6, und wenn ich 6 um eins vermindere, dann erhalte ich 5.
- Die symbolische Darstellung dessen ist: $5 + 1 = 6$ und $6 - 1 = 5$
- Das muss man auf der Mengenebene und auf der Zahlenebene noch zusammenbringen mit $1 + 5 = 6$ und $6 - 5 = 1$ sowie mit der Zahlzerlegung von 6 in 5 und 1.

Vier klassische Missverständnisse seien angeführt:

- Die Formulierung, dass eine Zahl vor oder hinter einer anderen steht, ist keineswegs selbstverständlich eindeutig. Man kann auch denken, dass die 6 vor der 5 steht, wenn man sich die Zahlen sozusagen als Warteschlange vorstellt, die man von null oder eins kommend entlanggeht: 6 steht dann in dieser Schlange vor 5, 5 steht hinter 6.
- Die Begriffe „Vorgänger“ und „Nachfolger“ sind in dieser Sichtweise ebenfalls nicht eindeutig bzw. nicht stimmig: Die 6 geht ja der 5 voran, die 5 folgt der 6.

Manche Kursteilnehmer/-innen haben sich als Kinder nicht erklären können, warum die 5 „kleiner“ sein soll als die 6 oder die 6 „größer“ sein soll als die 5. Wenn man die Zahlen ins Heft schreibt, dann schreibt man sie doch beide gleich groß! Auch im Buch sind sie immer gleich groß gedruckt. Diese 5 ist zum Beispiel viel größer als diese 6. Der Begriff „Größe“ ist in dieser Sichtweise an die Ausdehnung des Zahlsymbols gebunden, ein Verständnis für die kardinale Bedeutung des Begriffs „Größe einer Zahl“ muss dann erst hergestellt werden.

Es ist keineswegs selbstverständlich, dass die Teilnehmer/-innen mit den Begriffen rechts (kleinere Zahl) und links (größere Zahl) im gleichen Sinne operieren wie die Kursleiter/-innen. Manche Menschen denken die Zahlwortreihe nicht von links nach rechts, sondern von rechts nach links oder von unten nach oben oder von oben nach unten, oder sie denken Zahlen nicht linear. Es gibt sogar Menschen, die denken Zahlen in Form von Kartons, und Rechnen bedeutet für sie, diese Kartons in bestimmter Weise umzupacken. Auch der Zahlenstrahl ist demzufolge keineswegs ein selbsterklärendes Modell für die Zahlen – zumal bereits in seiner objektiven Struktur nicht eindeutig ist, was eine Zahl überhaupt sein soll: Ist die Zahl „2“ ein Punkt auf dem Zahlenstrahl, ist sie eine Strecke, ist sie eine gerichtete Strecke? Keine dieser Deutungen ist zwingend, und jede hat ihre Vor- und Nachteile.

Der Gedanke des „um eins mehr“ und „um eins weniger“ wird weitergeführt zum Verständnis des Aufbaus der natürlichen Zahlen in der sogenannten Seriationslogik. Damit ist gemeint, dass der Nachfolger einer Zahl immer eins mehr ist als die Zahl selbst. Die Teilnehmer/-innen müssen in der Lage sein, ihr Wissen um die Seriationslogik zu nutzen, um Aufgaben wie $9 - 8$ oder $21 - 19$ oder später $401 - 399$ nicht rechnen zu müssen. Im Sinne einer nichtzählenden Beherrschung des Kleinen Ein-plus-Ein und des Kleinen Eins-minus-Eins muss den Teilnehmern und Teilnehmerinnen klar werden, dass sie mit dem Wissen um die Beziehung „eins mehr/eins weniger“ bereits 22 Plusaufgaben ($0 + 1$ bis $10 + 1$ und $1 + 0$ bis $1 + 10$) und 11 Minusaufgaben ($1 - 1$ bis $11 - 1$) nichtzählend rechnen können.

Der Übergang zu „zwei mehr/zwei weniger“ und zu „x mehr/x weniger“ ist nun wiederum nicht mit einer solchen Routinisierung der damit verbundenen Aufgaben verbunden. Diese findet erst mit der Untersuchung der Bezüge der Zahlen zu 5 und zu 10 sowie mit der Routinisierung der Zahlerlegungen statt. Die Beziehungen „zwei mehr/zwei weniger“ und „x mehr/x weniger“ sind eher im Sinne der Weiterführung der Logik des „eins mehr/eins weniger“ zu behandeln. Die oben für „eins mehr“ und „eins weniger“ aufgezeigten vielfältigen Deutungen des „x mehr“ und „x weniger“ sind es, die den Teilnehmern und Teilnehmerinnen den Zusammenhang zwischen statischen Mengenbetrachtungen (x mehr/x weniger), Mengenhandlungen (x dazu/x weg), Zahlverhältnissen (x mehr/x weniger) und Zahloperationen (plus 5/minus 5) erschließen müssen.

1.3.2 Bezüge zur 5 und zur 10

Die Zahlrelationen, die neben der „eins mehr/eins weniger“-Relation am einfachsten zu verstehen und zu routinisieren sind, sind die Relationen der Zahlen zur 5 und zur 10. Das liegt sicherlich an der Fünfer- und Zehnerstruktur unserer Finger, die eine gewisse Vertrautheit mit sich bringt und eine physisch leichte Aufrufbarkeit der Fünfer- und Zehnerbeziehungen zur Folge hat.

Diese Zusammenhänge zur Fünf und zur Zehn müssen erarbeitet werden. Die Beziehungen zur 10 werden dabei zunächst nur „für die zweite Hand“ betrachtet, also Beziehungen von Zahlen ab 5 zur 10. Dabei ist es sinnvoll, die Erarbeitungen an quasisimultane Mengenerfassungen anzubinden. Unabdingbar ist es, die Mengenerfahrungen mit Zahlerfahrungen zu verbinden und an symbolische Darstellungen in Form von Rechenaufgaben anzubinden. Mit dem Auswendigkönnen der Beziehungen zur 5 und zur 10 in Form von Rechenaufgaben stehen den Teilnehmern und Teilnehmerinnen bereits wieder 12 Aufgaben des Kleinen Eins-plus-Eins und 12 Aufgaben des Kleinen Eins-minus-Eins zur Verfügung, wenn man die Aufgaben mit null einbezieht.¹⁰ Der Kern bei der Erarbeitung dieser Beziehungen liegt aber in der weiteren Heranführung der Teilnehmer/-innen an die Idee, Zahlen als aus anderen Zahlen zusammengesetzt zu denken. Das beginnt dort, wo Teilnehmer/-innen nicht verlässlich wissen (oder erst spät in ihrer Lernbiografie darauf vertraut haben), dass sie *immer* fünf Finger an einer Hand und immer zehn Finger an beiden Händen haben. Diese Invarianz müssen sie für das Weitere verinnerlichen.

10) Die Aufgaben $4 + 6$, $3 + 7$, $2 + 8$, $1 + 9$ und $0 + 10$ sowie $10 - 10$, $10 - 9$, $10 - 8$, $10 - 7$, $10 - 6$ sind dabei noch nicht berücksichtigt.

In den Abschnitten „Zählen und Abzählen“ sowie „Wie viel? Der kardinale Zahlaspekt“ wird erläutert, dass zu einem tragfähigen Verständnis der Zahl (etwa „acht“) gehört, dass ich beim Abzählen von acht Elementen zwar zum Schluss lediglich das achte Element berühre, dass ich mit „acht“ aber die Anzahl *aller* Elemente meine. Nun kommt mit der relationalen Betrachtung eine weitere Idee hinzu: Die acht sind zwei weniger als zehn. Aber auch: Acht sind drei mehr als fünf oder „fünf und drei“. Für zählende Rechner bedeutet diese Sichtweise durchaus einen Bruch: Fünf und drei ergibt für sie deshalb acht, weil sie bei Acht landen, wenn sie von Fünf drei Schritte weiterzählen. Acht minus Drei ist für sie Fünf, weil sie bei Fünf landen, wenn sie von Acht drei Schritte rückwärts zählen. Für zählende Rechner muss also auf der Mengeebene erarbeitet werden, wie die Relationen der einzelnen Zahlen (bis 9) zur 5 und zur 10 sind. Dies muss mit der Zahlenebene verbunden werden.

An den Fingern¹¹ lassen sich die Zusammenhänge gut erarbeiten:

- Fünf und Eins sind Sechs. Umgekehrt: Nehme ich von sechs einen weg (und zwar jenen Finger, der separat ist), dann verbleiben fünf. Nehme ich von sechs fünf weg (und zwar die ganze Hand!), dann verbleibt einer.
- Fünf und Zwei sind Sieben. Umgekehrt: Nehme ich von sieben zwei weg (und zwar jene Finger, die separat sind), dann verbleiben fünf. Nehme ich von sieben fünf weg (und zwar die ganze Hand!), dann verbleiben zwei.
- Fünf und Drei sind Acht. Umgekehrt: Nehme ich von acht drei weg (und zwar jene Finger, die separat sind), dann verbleiben fünf. Nehme ich von acht fünf weg (und zwar die ganze Hand!), dann verbleiben drei.
- Fünf und Vier sind Neun. Umgekehrt: Nehme ich von neun vier weg (und zwar jene Finger, die separat sind), dann verbleiben fünf. Nehme ich von neun fünf weg (und zwar die ganze Hand!), dann verbleiben vier.

Ebenso:

- Wie viele Finger muss ich von fünf Fingern wegnehmen, um vier Finger zu haben?
- Wie viele Finger muss ich von fünf Fingern wegnehmen, um drei Finger zu haben?
- Wie viele Finger muss ich von fünf Fingern wegnehmen, um zwei Finger zu haben?
- Wie viele Finger muss ich von fünf Fingern wegnehmen, um einen Finger zu haben?

Ebenso:

- Ich habe vier Finger. Wie viel Finger muss ich noch ausklappen, um fünf Finger zu haben?
- Ich habe drei Finger. Wie viel Finger muss ich noch ausklappen, um fünf Finger zu haben?
- Ich habe zwei Finger. Wie viel Finger muss ich noch ausklappen, um fünf Finger zu haben?
- Ich habe einen Finger. Wie viel Finger muss ich noch ausklappen, um fünf Finger zu haben?

11) Hier wird auf die in Deutschland üblichen Fingersymbole Bezug genommen, bei denen z. B. die 6 symbolisiert wird durch eine Hand und den Daumen der anderen Hand. Nutzen die Teilnehmer/-innen andere Symbolisierungen, müssen die Betrachtungen daran angepasst werden.

1.4 Zahlzerlegungen und Rechenstrategien: Wege und Routinisierungen zum kleinen Einspluseins und zum kleinen Einsminuseins

Das *DVV-Rahmencurriculum Rechnen Stufe 1* richtet sich an Teilnehmer/-innen, die im Wesentlichen noch zählende Rechenstrategien verfolgen. Bereits im Abschnitt „Rechenwege: Verschiedene nichtzählende Strategien“ wurde eine Zielvorstellung für diesen Kurs entfaltet, nämlich die Beherrschung und Verwendung von nichtzählenden Strategien im Zahlraum bis 30.

Mit den bis hier erarbeiteten Inhalten kann man nun einen neuen Blick auf die dort angegebenen Rechenstrategien werfen. Folgende Strategien wurden bereits thematisiert:

- Aufgaben mit Addition bzw. Subtraktion von 1,
- Bezug zu 5/10,
- z. T. Umkehraufgaben,
- Nutzen der Seriationslogik und
- eventuell wurde im Kurs dabei auch bereits über „Ergänzen statt Abziehen“ gesprochen.

Zusammen mit den Aufgaben des Typus $x + 0$ und $0 + x$ ist damit das Kleine Eins-plus-Eins und das Kleine Eins-minus-Eins für die Zahlen bis 10 nahezu vollständig erarbeitet. Die Erarbeitung und Routinisierung der Zahlzerlegungen bis 10 wird damit relativ leicht zugänglich. Dabei hilft es, dass die bisherigen Erarbeitungen immer wieder auf die Verbindung von Mengenhandlung und Zahlhandlung und ihre Symbolisierung, das Verständnis der Operationshandlungen, das Verständnis des relationalen Charakters der Zahlen (Zahlen sind aus anderen Zahlen zusammengesetzt, Zahlen sind aus unterschiedlich vielen Einsen/Einern zusammengesetzt) rekurriert haben.

Die Behandlung der Zahlzerlegungen geht nun mit dem Prinzip einher, dass hier routinisiert wird, aus welchen Zahlen eine Zahl sich zusammensetzt. Die Teilnehmer/-innen erleben das Teilschrittverfahren nur dann als Rechenerleichterung, wenn sie

- verstehen, dass die Zahl 11 sich aus 10 und 1 zusammensetzt, die Zahl 12 aus 10 und 2, die Zahl 13 aus 10 und 3 usw.
- verstehen, welche große Erleichterung diese Struktur ihnen beim Rechnen bringt.
- verstehen, dass es wegen dieser Struktur erleichterung Sinn ergibt, beim Rechnen zunächst einmal „die 10 vollzumachen“ oder „zur 10 zu ergänzen“ oder „bis 10 zu gehen“ und dann den noch fehlenden Rest zu bestimmen.
- die dazu notwendigen Zahlzerlegungen sicher abrufen können.

Mit den Zahlzerlegungen der Zahlen bis 10 wird also einerseits das kleine Einspluseins und das kleine Einsminuseins bis 10 vollständig erschlossen, vor allem aber werden damit die notwendig routinisierten Voraussetzungen für das Teilschrittverfahren erarbeitet.

1.4.1 Zehner und Einer

Die Teilnehmer/-innen müssen mit den Zahlen jenseits der 9 nicht mehr bekannt gemacht werden. Sie müssen aber einen neuen Blick auf diese Zahlen einnehmen. Dieser neue Blick ist geprägt von einem Verständnis der Zusammenhänge rund um die Konstruktion der Einheit „Zehner“ bzw. der Zahl „10“. Im Kurs auf Stufe 1 wird dabei noch kein umfassendes Verständnis der Konstruktion des Stellenwertsystems angestrebt, dies ist Inhalt des darauf aufbauenden Kurses auf Stufe 2. Deshalb ist auch die Festlegung des Zahlraums bis 30 für den hier beschriebenen Kurs eher heuristisch zu verstehen: Es sollen bestimmte Zusammenhänge erarbeitet werden.

Jenseits der Zahl 9 vollzieht sich im dezimalen Stellenwertsystem ein fundamentaler Bruch. Sie können ihn mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen z. B. thematisieren, indem Sie sie 13 Würfel auszählen lassen und dann fragen, welche Anzahl hier liegt. Lassen Sie die zugehörige Zahl anschreiben. Zeigen Sie dann auf die beiden Ziffern 1 und 3 und fragen Sie, was diese Ziffern mit der Anzahl der Würfel zu tun haben, die dort liegt. Es sind schließlich nicht vier ($3 + 1$) Würfel.

Zu verstehen ist hier zum einen, dass die Zahl 13 sich aus zwei Zahlen zusammensetzt, nämlich aus der 10 und der 3. Wenn die Teilnehmer/-innen zu diesem Zeitpunkt mit dem relationalen Zahlbegriff vertraut sind – also Zahlen als aus anderen Zahlen zusammengesetzt denken können –, dann wird ihnen einsichtig sein, dass die Zahlen 11 bis 19 einfach spezielle dieser Zusammensetzungen sind, nämlich jene, bei denen ein Bezug zur 10 vorhanden ist. Dieser Gedanke reproduziert sich später bei den anderen zweistelligen Zahlen.

Zu verstehen ist hier aber ebenso der Bruch, der mit der *Symbolisierung* der Zahl 10 erfolgt. Bis zur 9 erhält jede (An-)Zahl ein eigenes Zahlsymbol. Mit der Hinzunahme eines weiteren Mengenelements erfolgt nun eine Änderung der Notation und der Sichtweise: Man schafft eine neue Denkeinheit, den „Zehner“. Die zehn Mengenelemente werden *nicht* mit einem neuen Zahlsymbol bedacht. Stattdessen werden sie zu dieser neuen Denkeinheit „Zehner“ „gebündelt“, also zu etwas qualitativ Neuem zusammengedacht. Man spricht hier vom „Bündelungsprinzip“ unseres Stellenwertsystems.

Die Teilnehmer/-innen werden diesen Bruch als Schüler/-innen wahrscheinlich nicht bemerkt haben. Für zählende Rechner/-innen gibt es innerhalb der Zahlwortreihe keine qualitativen Brüche, sondern nach der 8 kommt eben die 9 und dann kommt eben die 10 und dann eben die 11. Der Übergang zu zweistelligen Notationen wird eher als neues Symbol wahrgenommen, nicht als neues Konstruktionsprinzip der Anzahlnotation.

Der Zehner oder „die Zehn“ ist nun aber nicht nur als neue Einheit zu verstehen. Ebenso muss in einem dynamischen Sinne verstanden werden, dass die Zehn sich aus zehn Einern oder Einsen zusammensetzt (und jederzeit zusammensetzen lässt) und dass sie in zehn Einer oder Einsen entbündelt werden kann. Es geht dabei u. a. darum, dass die Teilnehmer/-innen verstehen, wie sich die von ihnen beim Teilschrittverfahren vollzogenen Rechenschritte begründen und auf der Zahlebene widerspiegeln. Man kann das so formulieren:

„Ich möchte die Aufgabe $8 + 5$ rechnen. Ich merke, dass das Ergebnis größer als 10 ist. Ich möchte nun beim Rechnen die enorme Erleichterung nutzen, die die Konstruktion unseres Stellenwertsystems ermöglicht: Die Zahlen zwischen 10 und 20 sind alle in der Form $10 + x$ aufgebaut. Wenn ich dieses x bestimmen kann, dann sehe ich leicht das Resultat meiner Aufgabe. Ich muss also überlegen, welche Zahl zu 8 addiert 10 ergibt.“

Die Teilnehmer/-innen sollen das nun nicht nur als quasiräumlichen Schritt verstehen im Sinne von „gehe erst mal bis zur 10“ oder „überlege, wie viele Schritte es bis zur 10 sind“. Diese „Laufanweisungen“ lassen nämlich nicht erkennen, *warum* man die 10 als Bezugspunkt für das Teilschrittverfahren verwendet. Das versteht man erst, wenn man das Bündelungsprinzip und den stellenweisen Aufbau unserer Zahlen einbezieht. Man wählt deshalb die 10 als Bezugspunkt, weil man auf diese Weise einen vollen Zehner oder eine volle Zehn herstellt und dann mit der einfachen Konstruktionsanweisung $10 + x$ sehr leicht die gesuchte Zahl (hier 13) aufbauen kann. Wenn ich also 8 mit 2 zur 10 ergänzt habe und somit zehn Einer zu einem Zehner gebündelt habe, dann muss ich nur noch wissen, dass von den 5 (zu addierenden Mengenelementen) noch 3 übrig sind, dass ich also im Ganzen einen Zehner und 3 Einer habe. Diese Zahl lässt sich deshalb leicht als 13 hinschreiben, weil ich eben gerade dieses Konstruktionsprinzip von 13 als $10 + 3$ genutzt habe.

Wenn ich die Aufgabe $13 - 5$ rechnen möchte, dann ist wiederum eine Entbündelung notwendig. Denke ich 13 als einen Zehner und 3 Einer, dann kann ich nicht direkt von den 3 Einern 5 Einer abziehen. Ich muss den Zehner zunächst zu 10 Einern entbündeln, erst dann kann ich „weiter abziehen“. Diese Sichtweise des Entbündelns des Zehners erscheint zunächst ungewohnt, weil auch gute Rechner dieses Entbündeln nicht mitdenken, erst recht nicht bei so kleinen Zahlen. Man muss sich aber vor Augen halten, dass die Teilnehmer/-innen in ihrer Lernbiografie an jenen Wegen zum Rechnen gescheitert sind, die auf dieses umfassende Verständnis verzichtet haben.

Der in den Schulen übliche Weg, diesen Entbündelungsgedanken zu umgehen und lediglich auf schrittweises Rückwärtsgehen o.Ä. zu rekurren, ist den Kursteilnehmer/-innen nicht zugänglich gewesen. Sie sind auf eine neue Sichtweise angewiesen. Gestützt wird das Bündelungs- und Entbündelungsdenken, wenn man auf der Mengenebene mit Material arbeitet, welches die Zehner als Einheiten repräsentiert, z. B. Mehrsystemblöcke oder das goldene Montessori-Perlenmaterial.

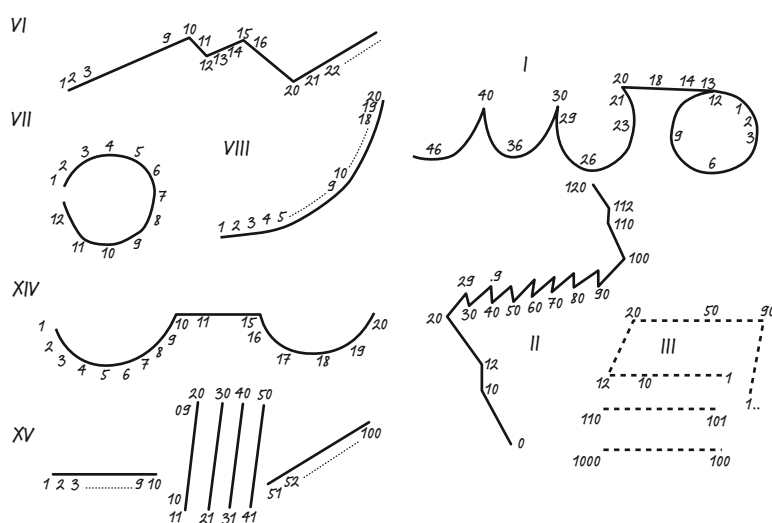
1.4.2 Zahlraumorientierung im Zahlraum bis 30

Auf Stufe 1 geht es darum, einen Zahlbegriff aufzubauen, Operationsverständnis der Addition und Subtraktion aufzubauen, die Aufgaben des Einspluseins und des Einsminuseins bis 20 nichtzählend lösen und möglichst automatisch abrufen zu können und eine Zahlraumorientierung im Zahlraum bis 30 zu schaffen. Zahlraumorientierung ist dabei eine Art *Querschnittsthema* des Kurses. Unter diesem Begriff wird hier Folgendes gefasst:

Zum einen geht es um Orientierung im engeren geometrischen Sinne. Wenn man sich die Zahlwortreihe oder einen Zahlenstrahl vorstellt, dann soll man ein Gespür dafür haben, dass die 7 näher an der 9 steht als an der 3. Man soll ein Gespür dafür haben, wie weit die 100 weg ist, wenn man sich gedanklich gerade etwa bei 15

bewegt. Wenn hier in einem heuristischen Sinne von Zahlraumorientierung im Zahlraum bis 30 die Rede ist, dann sollen damit nicht jene größeren Zahlräume gemieden werden, in denen sich die Teilnehmer/-innen fragmentarisch ohnehin bewegen. Es ist damit nur jener Zahlraum angegeben, in dem die Orientierung sicher sein soll. Das Rechnen jenseits der 20 ist damit nur im Sinne des ersten Erarbeitens von Analogien gemeint. Man muss sich vor Augen halten, dass die Zahlzusammenhänge für Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) zunächst im für sie überschaubaren Zahlraum bis 10 tiefgründig erschlossen werden müssen, der Bereich jenseits der 10 benötigt dieses Zusammenhangswissen. Im Sinne geometrischer Orientierung kann er aber bereits vorher diskutiert werden.

In diesem engeren geometrischen Sinn soll bei den Teilnehmern und Teilnehmerinnen eine lineare Vorstellung von den Zahlen aufgebaut werden – allerdings nur in dem Sinne, dass sie darauf zurückgreifen können, wenn es ihnen bei der Bearbeitung von mathematischen Problemen weiterhilft. Man kann keineswegs erwarten, dass jede/-r Einzelne *für sich* einen linear gedachten Zahlraum aufbaut. Es gibt zwar in Teilen der Psychologie die These, dass ein „innerer Zahlenstrahl“ eine anthropologische Konstante ist; in der Mathematikdidaktik hingegen gilt dies keineswegs als belegt, sondern höchstens als Lernziel. Empirische Untersuchungen zu den Zahlraumvorstellungen von Menschen zeigen sehr unterschiedliche innere Bilder von Zahlen. Innere Zahlenstrahlen sind dabei nicht selten, sie sind oftmals sogar von links nach rechts gerichtet, aber eben auch von unten nach oben, von rechts nach links oder von oben nach unten. Manche Menschen ordnen einen Zahlenstrahl spiralförmig an. Die Zahlen sind manchmal in immer gleichen Abständen angeordnet, manchmal eher logarithmisch, sodass die ersten zehn Zahlen etwa so viel Platz einnehmen wie die nächsten 90 Zahlen und wie dann die nächsten 900 Zahlen (vergleiche die Zahlraumvorstellungen aus empirischen Untersuchungen in nachfolgender Abbildung).¹² Oftmals sind die Abstände zwischen den Zahlen auch dynamisch je nach Anforderung: Das entspricht auch dem Wunsch von Mathematikdidaktikern und Mathematikdidaktikerinnen und spiegelt sich im Hilfsmittel des „leeren Zahlenstrahls“ wider.



12) Auszug einer Abbildung aus einer Vortragspräsentation von Jens Holger Lorenz: *Diagnose von Rechenschwierigkeiten in den Eingangsklassen und individuelle Förderung (Teil I)*, Hamburg, 01.11.09.

Selten trifft man Menschen, die Zahlen räumlich so angeordnet denken, wie man es vom Hunderterfeld kennt, vereinzelt trifft man auf seltsam anmutende Konstrukte. Ein Beispiel ist die oben bereits erwähnte Konstruktion der Zahlen als Kisten, die dann beim Rechnen nach bestimmten Regeln umgestapelt werden.

Menschen mit einem elaborierten mathematischen Verständnis haben oftmals keinerlei Zahlraumvorstellung. Sie denken die Zahlen nicht räumlich, sondern lediglich abstrakt. Umgekehrt findet man bei EbSR ebenfalls oft keine Zahlraumvorstellung. Wir wissen nicht, ob die elaborierten Vorstellungen als Voraussetzung in früheren Entwicklungsphasen eine Zahlraumvorstellung benötigen. Es erscheint aber für EbSR sinnvoll, eine lineare Zahlraumvorstellung zu erarbeiten, um eine Orientierungshilfe zu haben. Wenn die Zahlraumvorstellungen der Kursteilnehmer/-innen expliziert werden, dann können alle mathematischen Aktivitäten mit diesen Vorstellungen in Beziehung gesetzt werden, und damit sind für diejenigen, die keine Zahlraumvorstellung haben, verschiedene Angebote für Zahlraumvorstellungen permanent präsent. Gestützt wird dies durch alle Aktivitäten bzw. Spiele, bei denen auf Zahlwortreihen oder Zahlenstrahlen Bewegungen ausgeführt werden müssen. Herausgehoben ist hierbei sicherlich die Rolle des „leeren Zahlenstrahls“. Auch das Zählen vorwärts und rückwärts, auch in Zweier- oder Dreierschritten, stärkt die Zahlraumorientierung.

Besonders wichtig ist es, dass diese linearen Aktivitäten zu den beteiligten Kardinalitäten in Beziehung gesetzt werden. Der Kurs fokussiert ja darauf, dass Zahlen mit Anzahlen zusammengedacht werden und dass Zahlen in ihren Beziehungen zu anderen Zahlen gedacht werden. Beide Gedanken sind in linearen Zahlraumvorstellungen zunächst nicht präsent, lineare Zahlraumvorstellungen arbeiten mit einem nicht-kardinalen Blick auf Zahlen. Genau das ist ja ein zentrales Problem von zählenden Rechnern, wenn sie nur rechnen können, indem sie die Zahlwortreihe entlanglaufen. Die Anbindung der räumlichen Vorstellung an die kardinale Bedeutung muss deshalb dauerhaft expliziert werden.

Umgekehrt sollte aber das kardinale und relationale Wissen auch an Zahlraumvorstellungen angebunden werden. Zum einen besteht sonst die Gefahr, dass die Teilnehmer/-innen „mathematische Doppelwelten“ entwickeln. Sie verstehen dann etwas auf der Mengenebene, aber ihre räumlichen Zahlvorstellungen passen nicht dazu. So erschließt es sich nicht von allein, was das Bündeln bei der Addition mit Zehnerübergang mit dem „Sprung über die Zehn“ zu tun hat. Ebenso erschließt sich nicht von allein, was das Entbündeln bei der Subtraktion mit dem „Sprung über die Zehn“ zu tun hat.

Zum anderen erscheint das Rechnen mit Analogien auf die Dauer einfacher, wenn man sie auch mit Zahlraumvorstellungen verbindet. Es ist das eine, Folgendes zu überlegen: „Was ist $23 + 5$? Die 2 Zehner der Zahl 23 bleiben erhalten, weil $3 + 5$ keinen neuen Zehner, sondern nur 8 ergibt. Die 2 Zehner und die 8 Einer ergibt 28.“ Es ist aber etwas anderes, diese Analogie räumlich zu denken: „Wenn ich von der 23 fünf weitergehe, dann lande ich bei 28, das ist wie bei $3 + 5$.“ Sobald dann sogar ein neuer Zehner zu bündeln ist, ist es für manche Teilnehmer/-innen deutlich weniger aufwändig, die Aufgabe als „Schritt bis zum nächsten Zehner“ mit notwendiger Restbestimmung zu denken. Sie müssen eben nur in der Lage sein, dieses Handeln mit dem Mengenhandeln inklusive Bündeln zusammenzudenken.

Dem Thema „Zahlraumorientierung“ kann man auch die Fähigkeit der Einschätzung von Größenverhältnissen zuordnen. Damit ist nicht nur Relationalität gemeint, also etwa das Gespür dafür, dass die Differenz von 9 und 2 größer sein muss als die von 29 und 18. Dazu gehört ebenso das Gespür dafür, dass die Differenz von 17 und 9 im Vergleich zur Differenz von 1017 und 1009 zwar die gleiche sein mag, dass man aber zwischen zwei Menschen mit einem Tageseinkommen von 17 versus 9 Euro einen deutlichen Unterschied sehen würde, bei zwei Menschen mit einem Tageseinkommen von 1017 versus 1009 Euro aber kaum von einem Unterschied spräche. Hierzu gehört aber ebenso ein Gespür für verschiedene Größendimensionen bei Maßen.

LITERATURVERZEICHNIS STUFE 1

GAIDOSCHIK, MICHAEL (2007):

Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Hamburg.

GERSTER, HANS DIETER (1996):

Vom Fingerrechnen zum Kopfrechnen – Methodische Schritte aus der Sackgasse des zählenden Rechnens. In: Eberle, G.; Kornmann, R. (Hrsg.): Lernschwierigkeiten und Vermittlungsprobleme im Mathematikunterricht an Grund- und Sonderschulen. Weinheim, S.137 – 162.

GERSTER, HANS-DIETER; SCHULTZ, RITA (2000):

Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Pädagogische Hochschule Freiburg, unter: www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397/, zuletzt abgerufen am 22.05.2017

LORENZ, JENS HOLGER; RADATZ, HENDRIK (1993):

Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover.

MEYERHÖFER, WOLFRAM (2011):

Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). In: Pädagogische Rundschau, 65. Jg., Heft 4, S. 401 – 426.

SCHLÖGLMANN, WOLFGANG (2002):

Brauchen Erwachsene Mathematik? Forschungsschwerpunkte und Ergebnisse im Bereich Mathematiklernen bei Erwachsenen. In: Alfa-Forum: Zeitschrift für Alphabetisierung und Grundbildung, Nr. 49, S. 22 – 24.

WEIDENMANN, BERND (1991):

Lernen mit Bildmedien. Weinheim.

Rahmencurriculum Rechnen

Stufe 2

Christian Hartmann
unter Mitarbeit von
Wolfram Meyerhöfer

2. DVV-RAHMENCURRICULUM RECHNEN STUFE 2

2.1 Zweistellige Zahlen verstehen

2.1.1 Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen erwerben ein grundlegendes Verständnis der Idee der Bündelung und des Stellenwerts im Bereich der zweistelligen Zahlen.
- Die Teilnehmer/-innen verstehen den Zusammenhang zwischen Mengen, der symbolischen Zahldarstellung und der verbalen Zahlbezeichnung im Zahlraum bis 100.
- Die Teilnehmer/-innen können sich im Zahlraum bis 100 orientieren.

2.1.2 Grundlagen für das Verständnis zweistelliger Zahlen

Worum geht es?

Weltweit hat sich die Zahlnotation im Stellenwertsystem zur Basis zehn durchgesetzt. Mit der Zahlnotation im dezimalen Stellenwertsystem korrespondiert auf der Mengenebene eine sogenannte „Bündelung der Elemente der Menge“: Immer zehn Elemente werden (gedanklich) zu einer neuen Einheit, dem „Zehner“, zusammengefasst bzw. „gebündelt“. Sind von dieser ersten Bündelungseinheit zehn vorhanden, so werden diese wiederum zu einer neuen Einheit, einem „Zehner-Zehner“, dem „Hunderter“, gebündelt. Diese Bündelung wird so lange fortgesetzt, bis auf jeder Bündelungsstufe höchstens neun Bündel vorhanden sind und daher keine weiteren Zehner-Bündel mehr gebildet werden können. Die Menge wird dann als „*maximal gebündelt*“ bezeichnet.

Um die Mächtigkeit der Menge festzuhalten, wird die Anzahl der Bündel der verschiedenen Bündelungsstufen geordnet notiert. Die ungebündelten Einheiten, die „Einer“, werden ganz rechts notiert. Links daneben folgen die Zehner, dann die Hunderter usw. Der Aufbau von rechts nach links ist dabei eine reine Konvention. Man könnte die Zahlen auch von links nach rechts aufbauen. Diese Mitteilung hilft jenen Teilnehmern und Teilnehmerinnen, die sich als Kinder immer gefragt haben, warum sie die Zahlen gerade so herum notieren sollen. Man muss eine Notationsrichtung festlegen, und die Erfinder dieser Notation haben sich eben dafür entschieden, die Einer nach rechts und die größeren Einheiten nach links zu schreiben.

Die Ziffern einer Zahl tragen somit eine doppelte Bedeutung:

- Der *Stellenwert* einer Ziffer gibt an, für welche Bündelungsstufe die Ziffer steht.
- Der *Zahlwert* einer Ziffer gibt an, wie viele Bündel der jeweiligen Stufe vorhanden sind.

Die Position der „4“ im Zahlsymbol „42“ zeigt also zum Beispiel an, dass es sich um *Zehner* handelt. Der Zahlwert der „4“ liefert die Information, dass es *vier* Zehner sind.

Durch die Prinzipien der maximalen Bündelung und des Stellenwerts ist die Zahldarstellung eindeutig festgelegt. Die Mächtigkeit jeder Menge wird durch genau eine Zahl symbolisiert. Zum einen ermöglicht es die Zahldarstellung im Stellenwertsystem auf diese Weise, beliebig große Zahlen auf einfache Weise zu notieren. Zum anderen lassen sich durch dieses Konstruktionsprinzip der Zahlen die grundlegenden Rechenoperationen mit beliebig großen Zahlen auf die Operationen im Zahlraum bis zehn zurückführen.

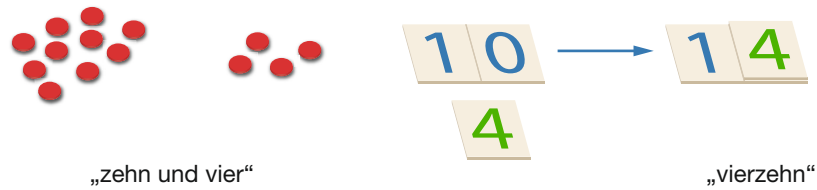
Die Idee der Bündelung und des Stellenwerts

Die Teilnehmer/-innen wollen in diesem Kurs rechnen lernen. Dazu müssen sie in einer anderen Weise mit Zahlen umgehen, als sie es gewohnt sind – denn dieser gewohnte Weg hat offenbar nicht zu einem Erfolg geführt. Der Grundgedanke der Betrachtungen zum Stellenwertsystem ist, dass Zahlen dazu da sind, Anzahlen zu beschreiben. Dies kann für die Zahl 3 auch z. B. in den Formen drei, |||,  erfolgen. Für die Zahl 13 wird die Darstellung ||||| schon recht unübersichtlich, die Zahl 354 wird auch mit irgendeiner Würfeldarstellung nicht mehr leicht lesbar sein. Das Stellenwertsystem stellt eine spezifische Art und Weise her, große Mengen ausgesprochen übersichtlich darzustellen und damit sehr effektiv rechnen zu können. Diese Effektivität ist der Grund dafür, dass wir mit dem Stellenwertsystem arbeiten.

Um dies deutlich zu machen, können Sie mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen Alternativen diskutieren, die Anzahl der Elemente großer Mengen, z. B. von 88 oder 462 Mengenelementen, schriftlich zu notieren. Historisch wurde in unseren Breiten noch vor 500 Jahren mit dem Abakus und mit römischen Zahlzeichen sehr aufwändig gerechnet, während die arabischen Zahlen mitsamt den damit möglichen effektiven schriftlichen Rechenverfahren sich erst langsam und gegen den Widerstand der Kirche – die diesen muslimischen Import ablehnte – durchgesetzt haben. Es hat für die Teilnehmer/-innen auch eine entlastende Funktion zu verstehen, dass unsere Art, Zahlen bzw. Mengen darzustellen, nur eine von vielen möglichen ist. Es war kulturell ein schwieriger Prozess, unsere Zahldarstellung zu entwickeln, deshalb darf es auch individuell ein schwieriger Prozess sein, sie sich anzueignen.

Was müssen die Teilnehmer/-innen also verstehen, um zweistellige Zahlen adäquat interpretieren zu können? Zunächst müssen sie verstanden haben, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind. Sie müssen also zum Beispiel die sieben denken können als ein Ganzes, das sich aus fünf und zwei zusammensetzt oder aus vier und drei usw. Andersherum betrachtet lässt sich die sieben also zerlegen in die Bestandteile fünf und zwei oder vier und drei usw. Das Verständnis dieser Sichtweise auf Zahlen und Anzahlen war unter dem Stichwort „relationaler Zahlbegriff“ eines der zentralen Lernziele auf Stufe 1.

Die Zahlsymbolisierung im dezimalen Stellenwertsystem greift genau diese Zerlegbarkeit von Zahlen auf. Die Zahl „vierzehn“ zum Beispiel lässt sich zerlegen in sieben und sieben oder in acht und sechs usw. Von den vielen denkbaren Zerlegungen wird aber genau eine genutzt, um die Zahl zu notieren, nämlich die Zerlegung in zehn und vier. Analog dazu symbolisieren auch die weiteren Zahlen 11 bis 19 spezielle Zerlegungen, nämlich jene mit Bezug zur zehn.



Die Teilnehmer/-innen müssen daher den fundamentalen Bruch verstehen, der sich hinsichtlich der Zahlnotation beim Übergang zur 10 vollzieht. Bis zur neun erhält jede Zahl ein eigenes neues Zahlsymbol, nämlich eine der Ziffern von 1 bis 9. Die Zahl 10 symbolisiert demgegenüber etwas qualitativ Neues. Sie steht für zehn Mengenelemente, die gedanklich zu einer neuen Denkeinheit, einem „Zehner“, zusammengefasst werden.

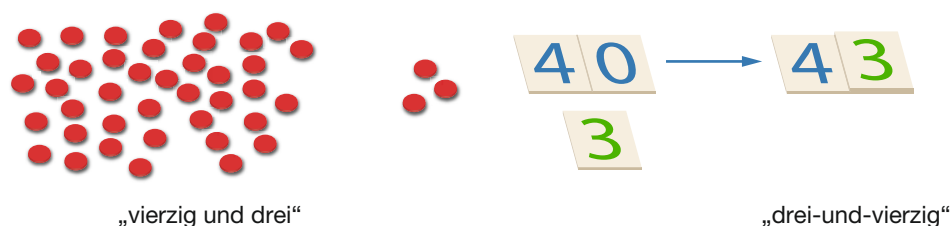
Diese gedankliche Zusammenfassung geschieht auch bei den Zahlen von 11 bis 19, wobei die zum Zehner zusammengefassten zehn Elemente nur noch durch die „1“ an der Zehnerstelle zu erkennen sind. Die Teilnehmer/-innen müssen also verstehen, dass sich zum Beispiel hinter dem Zahlsymbol „14“ zehn zu einem Zehner gebündelte Einer und noch vier Einer verbergen. Umgekehrt verbirgt sich hinter dem Zahlsymbol „14“ eine Zerlegung in 10 und 4. Die in der obigen Abbildung dargestellten Séguin-Zahlenkarten aus dem Materialfundus von Maria Montessori machen diese Zerlegung der „14“ transparent.

Erschwert wird das Erkennen der neuen Qualität der Zahlen ab zehn dadurch, dass sich der Bruch, der bei der Zahlnotation geschieht, in der Zahlwortreihe nicht widerspiegelt. Innerhalb der Zahlwortreihe „acht, neun, zehn, elf, zwölf“ wird die besondere Bedeutung der zehn nicht deutlich. Erst ab der „dreizehn“ wird auch in der Sprechweise die Zehnerbündelung aufgegriffen.

Auf Stufe 1 wurden die Zahlen 11 bis 19 schon unter den genannten Aspekten in den Blick genommen. Dies geschah dort im Sinne eines Einblicks in das Konstruktionsprinzip von Zahlen der Form $10 + x$ und im Hinblick auf die verständige Anwendung des Teilschrittverfahrens zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben des kleinen Einspluseins und Einsminuseins. Die prinzipielle Bedeutung der Denkeinheit Zehner erschließt sich jedoch erst in der Ausweitung der Betrachtungen auf einen größeren Zahlraum.

Ausweitung der Idee der Bündelung auf den Zahlraum bis 100

Ebenso wie durch die Notation der Zahlen 11 bis 19 eine spezielle Zerlegung mit Bezug zur zehn symbolisiert wird, sind auch die Zahlen der weiteren Dekaden nach einem ähnlichen Prinzip konstruiert. Auch sie repräsentieren spezielle Zerlegungen. So wie die „13“ aus 10 und 3 zusammengesetzt ist, ist die „43“ zusammengesetzt aus 40 und 3. Man spricht hier auch vom *additiven Aspekt des Stellenwertsystems*. Die Zusammensetzung wird wiederum durch die Séguin-Montessori-Zahlenkarten transparent gemacht.



Diese Sichtweise wird auch durch die Zahlbenennung als „drei-und-vierzig“ unterstützt. Trotzdem werden manche der Teilnehmer/-innen diese Strukturierung der Zahlen bisher nicht bewusst wahrgenommen haben, was ihnen jede weitere Arbeit mit den Zahlen erschwert hat. Um zu verstehen, dass die Zahldarstellung im dezimalen Stellenwertsystem auf einer solchen speziellen Zerlegung der Zahlen beruht, reicht das oben beschriebene relationale Zahlverständnis und das Verständnis des additiven Aspekts des Stellenwertsystems aus. Der zentrale Gedanke der Bündelung von je zehn Elementen zu einem Zehner muss aber im Kurs erst noch expliziert werden.

Die Teilnehmer/-innen müssen an dieser Stelle also auch verstehen, dass die „43“ über die Zerlegbarkeit in 40 und 3 hinaus eine Substruktur aufweist: Die 40 können auch als 4 Zehnerbündel gedacht werden.



Diese Sichtweise erschließt auch die Logik der Zahlschreibweise: Aus 43 Objekten können vier Zehnerbündel gebildet werden, wobei drei einzelne Objekte übrig bleiben. Die „4“ in „43“ gibt also die Anzahl der Zehnerbündel an und die „3“ die Anzahl der übrigen Einer.

Klarer ersichtlich wird die unterschiedliche Bedeutung der einzelnen Ziffern, wenn man sie in eine sogenannte Stellenwerttafel einträgt:

Z	E
4	3

Während bei der Darstellung im Dezimalsystem der Stellenwert einer Ziffer nur implizit durch die Position der Ziffern innerhalb der Zahl angegeben wird, werden die Wertigkeiten in der Stellenwerttafel explizit angegeben. Für manche der Teilnehmer/-innen kann es hilfreich sein, diese explizite Bezeichnung der Stellenwerte vorübergehend bei allen Zahlnotationen vorzunehmen, also die Stellenwerte über die einzelnen Ziffern der Zahlen zu schreiben:

Z	E
4	3

Auf Stufe 1 beschränkte sich die Zehner-Bündelung im Wesentlichen auf eine einmalige Handlung, da hier vorwiegend der Zahlraum bis 20 in den Blick genommen wurde. Erst durch die mehrfache Bündelung von jeweils zehn Mengenelementen zu Zehnern, wie sie bei größeren Anzahlen vorgenommen wird, wird die Zehner-Bündelung als generelles Prinzip deutlich.

Benennung der zweistelligen Zahlen im Deutschen

Die Sprechweise „drei-und-vierzig“ stützt das Verständnis der Zehner-Einer-Struktur der zweistelligen Zahlen nur bedingt. Zum einen lässt sich aus dem Zahlwort „vierzig“ nicht unmittelbar ableiten, dass damit vier Zehner gemeint sind. Allein die Endung „-zig“ weist darauf hin. Zum anderen werden zweistellige Zahlen im Deutschen in der Regel invertiert benannt, d. h., dass Zahlen wie „43“ von rechts nach links gelesen werden, also entgegen der sonst üblichen Leserichtung. Das hat bei einigen Teilnehmern und Teilnehmerinnen dazu geführt, dass sie „Zahlendreher“ produziert haben, dass sie also statt 43 manchmal oder immer 34 geschrieben haben. Manche werden die Zahl 34 „drei(und)vierzig“ genannt haben, andere haben diese Zahl „vierunddrei-Big“ genannt, haben damit aber die Vorstellung von vier Zehnern und drei Einern verbunden. Wiederum andere sind dieser Verwirrung völlig erlegen und haben das Problem als undurchschaubar zur Seite gelegt.

Über das Problem der Inversion hinaus gibt es einige Unregelmäßigkeiten bei der Benennung der zweistelligen Zahlen, die es den Kursteilnehmern und Teilnehmerinnen erschwert haben, die Zehner-Einer-Struktur der zweistelligen Zahlen zu erkennen und für die Entwicklung ihrer Zahlkonzepte zu nutzen.

Die Zahlwörter von zehn bis 19

- Nur bei den Zahlwörtern von 13 bis 19 und bei der zehn selbst wird der Zehneranteil explizit benannt. Dabei stimmt die Leserichtung aber nicht mit der üblichen Schreib- und Leserichtung überein. Man spricht „*vier-zehn*“ schreibt aber *eins-vier*: 14.
- Die Zahlwörter „elf“ und „zwölf“ haben zwar dem sprachhistorischen Ursprung nach eine Bedeutung, die sich auf den Zehner bezieht, diese Bedeutung wird aber im heutigen Sprachgebrauch nicht mehr deutlich. Das Zahlwort „elf“ stammt vom althochdeutschen „einlif“ ab und bedeutet in etwa „eins darüber“ im Sinne von einem Zehner und eins. Analog dazu hatte „zwelif“ die Bedeutung „zwei darüber“, also ein Zehner und zwei (vgl. Kluge & Seebold 2002, S. 163 und S. 898). Daher erscheinen uns die Bezeichnungen „elf“ und „zwölf“ willkürlich gewählt und geben keinen Hinweis auf ihre Bedeutung als „ein Zehner und eins“ bzw. „ein Zehner und zwei“.

Die Zahlwörter von 20 bis 99

- Im Gegensatz zu den Zahlen von 13 bis 19 wird der Zehneranteil bei den weiteren zweistelligen Zahlen nicht explizit benannt. Stattdessen wird das Suffix „-zig“ bzw. „-Big“ angehängt, um die Bedeutung als Zehneranteil anzuzeigen.
- Die Zahlwörter mancher Dekaden werden dabei unregelmäßig gebildet. Es heißt zwar zum Beispiel „*vier-zig*“ aber nicht „*zwei-zig*“ sondern „*zwan-zig*“, nicht „*sechs-zig*“ sondern „*sech-zig*“ und nicht „*sieben-zig*“ sondern „*sieb-zig*“.
- Ähnlich wie bei den Zahlwörtern von 13 bis 19 ist auch bei den restlichen zweistelligen Zahlen die Leserichtung gegenüber der üblichen Lese- und Schreibrichtung vertauscht. Man spricht „*drei-und-vierzig*“, schreibt aber *vier-drei*: 43.
- Manche der Zahlwörter von 13 bis 19 sind den entsprechenden Bezeichnungen der Dekaden phonologisch sehr ähnlich: Zum Beispiel „*vier-zehn*“ und „*vier-zig*“.

Ein paradigmatisches Beispiel

Um die Zahlschreibweise im Dezimalsystem durchdringen zu können, ist es für die Teilnehmer/-innen notwendig, die Verbindung zwischen der Zahlebene und der Mengenebene durch konkrete Mengenhandlungen herzustellen. Dazu können Sie die Teilnehmer/-innen zum Beispiel zunächst 43 Würfel auszählen und die entsprechende Anzahl aufschreiben lassen.

Entscheidend ist nun die Thematisierung der Korrespondenzen zwischen der Zahldarstellung und der Menge:

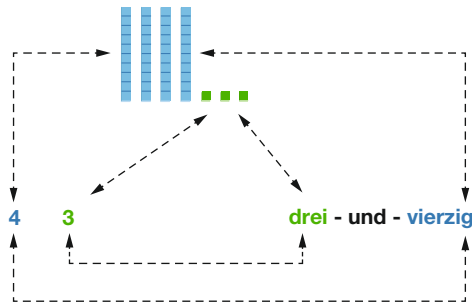
- Was haben die beiden Ziffern „4“ und „3“ mit der Anzahl der Objekte zu tun?
- Warum benötigt man nur zwei Ziffern? Warum stehen diese zwei Ziffern nicht nur für zwei Objekte? Warum benötigt man nur die Ziffern „4“ und „3“, obwohl doch 43 und nicht nur sieben Objekte (oder zwei) vorhanden sind?
- Wäre es auch möglich, die Ziffern zu vertauschen und die Anzahl als „34“ aufzuschreiben?
- Welche Anzahl beschreibt die „34“? Warum beschreibt die „34“ nicht die gleiche Anzahl, obwohl doch die gleichen Ziffern wie bei der „43“ verwendet werden?
- Welche Bedeutung hat die „3“ in „34“? Welche Bedeutung hat sie in der „43“?

Mit solchen und ähnlichen Fragen können Sie die Teilnehmer/-innen zu einer Reflexion des Aufbaus der Zahlen anregen. Dabei sollten stets die Mengenebene, die symbolische Zahldarstellung und die verbale Zahlbezeichnung präsent sein.

Hinsichtlich der verbalen Zahlbezeichnungen kann es hilfreich sein, gemeinsam mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen über alternative Zahlbezeichnungen nachzudenken, bei denen die Zehner-Einer-Struktur deutlicher hervortritt. Zum Beispiel werden in vielen Sprachen Südostasiens die Stellenwerte bei der Zahlbezeichnung explizit benannt. Die Zahlworte für 12 oder 58 lassen sich zum Beispiel in etwa mit „zehn-zwei“ bzw. „fünf-zehn-acht“ übersetzen (vgl. Fuson 1990, S. 278). Der Bestandteil „zehn“ taucht also in allen Zahlworten von zehn bis 99 auf und liefert so beständig einen Hinweis auf die Zusammensetzung der zweistelligen Zahlen aus einem Zehner- und einem Eineranteil. Zur Bezeichnung der 43 könnte man also zum Beispiel auch sagen: „vier Zehner und drei“ oder „vierzig-drei“. Die Frage ist nun, wie sich diese Bündelungen in der konventionellen Sprechweise widerspiegeln. Zur Beantwortung dieser Frage sollten die Regelhaftigkeiten, Bezeichnungskonventionen und Ausnahmen der deutschen Sprache mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen diskutiert werden. Eine solche Auseinandersetzung mit den Brüchen und Inkonsistenzen der üblichen Zahlbezeichnungen kann auch eine entlastende Funktion für die Teilnehmer/-innen haben. Viele von ihnen sind an der Hürde, die Zahlbezeichnungen korrekt zu dekodieren, gescheitert. Die Erfahrung, dass dieses Scheitern auch durch die inkonsequente Zahlbezeichnung verursacht wurde, hilft unter Umständen, Hemmnisse abzubauen.

Zusammenfassend geht es also zunächst darum, durch verschiedene Aufgaben zur Bündelung von konkretem Material, durch das Aufschreiben der entsprechenden Zahlsymbole, durch das gemeinsame Sprechen über die Materialhandlungen und durch gezielte Nachfragen bei den Teilnehmern und Teilnehmerinnen ein grundlegendes Bewusstsein für die Korrespondenz zwischen der Mengenebene, der Ebene der Zahlsymbole und der Ebene der verbalen Zahlbezeichnungen aufzubauen. Dabei ist

einerseits der Aufbau der zweistelligen Zahlen aus einer „Zehnerzahl“ und einer „Einerzahl“ zu verstehen, also 43 als $40 + 3$ und 76 als $70 + 6$. Andererseits müssen die Teilnehmer/-innen verstehen, dass die 43 über die Zerlegbarkeit in 40 und 3 hinaus eine Substruktur aufweist: Die 40 können auch als 4 Zehnerbündel gedacht werden. Die 70 aus der 76 kann auch als 7 Zehner gedacht werden.



2.1.3 Operationen mit Mengen und ihre Entsprechung auf der Symbolebene

Die Teilnehmer/-innen sind im Kurs, weil sie bislang tendenziell mit wenig passenden oder effektiven Strategien gerechnet haben. Sie wurden im Allgemeinen im Teilschrittverfahren unterrichtet und sind darin nicht erfolgreich gewesen. Es geht also darum, sie stimmiger in effektives Rechnen einzuarbeiten – indem die Bezüge der Rechen-techniken zum dezimalen Aufbau der Zahlen expliziert werden. Die Teilnehmer/-innen kennen vermutlich den „Schritt über den Zehner“ als Rechentechnik. Diese wird nun zunächst auf der Mengenebene als Bündelungs- oder Entbündelungsprozess verstanden, dann aber auch an Zahlenstrahlvorstellungen angebunden.

Hinzufügen oder Wegnehmen von vollen Zehnern

Wie oben beschrieben beinhaltet die Interpretation einer Zahl wie 43 als 40 und 3 noch nicht den Gedanken der Bündelung. Beim Operieren mit Zahlen stellt das insofern ein Problem dar, als ohne diese Sichtweise auch nicht unmittelbar klar ist, dass 53 zum Beispiel genau ein Zehner mehr ist als 43, dass 63 genau zwei Zehner mehr sind als 43 oder 33 genau ein Zehner weniger. Durch die wiederkehrende Struktur der Zahlworte in den einzelnen Dekaden ist zwar eine Analogie erkennbar, dass aber der Unterschied zwischen „drei-und-vierzig“ und „drei-und-fünfzig“ genau zehn beträgt, geht aus der Benennung der Zahlen nicht unmittelbar hervor.

Für jemanden, dem diese Einsicht fehlt, ist auch nicht klar, warum Rechnungen wie $43 + 20$ oder $43 - 10$ besonders leicht durchzuführen sind. Das tritt dann offen zu Tage, wenn Teilnehmer/-innen solche Aufgaben durch Zählen in Einerschritten lösen oder wenn sie auch hier auf das Teilschrittverfahren zurückgreifen und zum Beispiel $43 + 20$ in die Teilaufgaben $43 + 7$, $50 + 10$ und $60 + 3$ zerlegen.

Andererseits kann man von technischen Fertigkeiten bei der Durchführung von Rechnungen nicht unbedingt auf ein Verständnis der Idee der Bündelung und des Stellenwerts schließen. Wer sich zum Beispiel die Regel zurechtgelegt hat, dass man bei Rechnungen mit mehrstelligen Zahlen einfach alle Stellenwerte getrennt behandeln kann, kommt zum richtigen Ergebnis, solange kein Stellenwertübergang stattfindet: $43 + 21$ wird gerechnet als $4 + 2 = 6$ und $3 + 1 = 4$, als Resultat wird dann 64 hingeschrieben. Die richtige Lösung allein zeigt noch kein Verständnis des

Zusammenhangs von Zehnern und Einern im Summationsprozess. Genau auf dieses Verständnis kommt es aber an dieser Stelle des Lernprozesses an.

Neben den oben beschriebenen Bündelungshandlungen an einer gegebenen Menge sollten die Teilnehmer/-innen daher auch solche Veränderungen an Mengen vornehmen, bei denen die Zehner-Einer-Struktur der Zahlen im Mittelpunkt steht. Lassen Sie die Teilnehmer/-innen zum Beispiel wie oben beschrieben 43 Objekte auszählen und zu Zehnern bündeln. Anschließend soll die Anzahl notiert werden. Ausgehend von dieser Ausgangssituation können dann unterschiedliche Operationen vorgenommen werden, deren Auswirkungen auf der Mengen- und der Symbolebene durch gezielte Fragen in den Blickpunkt gerückt werden:

- Wie verändert sich die Menge, wenn noch *zehn Einer* hinzugefügt werden? Es entsteht dann eine Menge, die nicht maximal gebündelt ist. D. h., es könnten noch Elemente zu einem weiteren Bündel zusammengefasst werden. Die „kanonische“ Zahldarstellung im Dezimalsystem bezieht sich immer auf maximal gebündelte Mengen. Daher bezeichnet das Zahlsymbol „413“ 4 Hunderter, 1 Zehner und 3 Einer und nicht zum Beispiel 4 Zehner und 13 Einer.
Wie wird die dann vorhandene Anzahl notiert? Was bleibt auf der Symbolebene gleich und was verändert sich und warum ist das so? Warum kann man die nun vorhandene Anzahl nicht als 413 (im Sinne von 4 Zehner und 13 Einer) notieren?
- 4 Zehner und 13 Einer können im Dezimalsystem nicht durch das Zahlsymbol 413 dargestellt werden. Warum kann man die Anzahl aber in einer Stellenwerttafel auf folgende Weise festhalten:

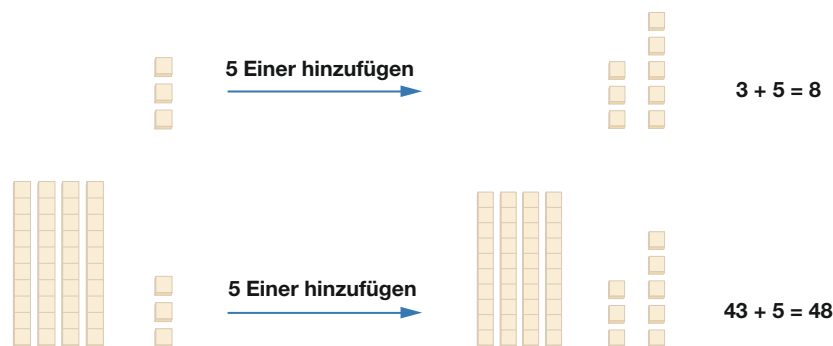
Z	E
4	13

- Wo liegt hier der Unterschied zur Zahlschreibweise ohne Stellenwerttafel? Welche anderen Zerlegungen der 53 lassen sich in einer Stellenwerttafel noch darstellen?
- Man kann die obige Frage auch andersherum stellen: Wie verändert sich die zugehörige Menge, wenn man aus der 43 eine 53 macht, also die Zehnerstelle um eins erhöht? Wie verändert sie sich, wenn man aus der 43 eine 44 macht, also die Einerstelle um eins erhöht?
- Wie verändert sich die Menge, wenn noch *zwei Zehnerbündel* hinzugefügt werden? Wie wirkt sich diese Veränderung auf der Symbolebene aus? Wie ist es, wenn statt der zwei Zehnerbündel *zwanzig Einer* hinzugefügt werden?
- Kann man von den vier Zehnerbündeln und drei Einern auch 20 Einer wegnehmen? Warum ist das möglich, obwohl doch nur drei Einer vorhanden sind? Warum sind bei der übrig bleibenden Menge wieder genau drei ungebündelte Einer vorhanden?

Bei diesen Überlegungen sollte stets auch die Notation der Mengenhandlungen auf der Symbolebene als Addition und Subtraktion präsent sein. Die entsprechenden Grundvorstellungen zu Addition und Subtraktion als Zusammenfügen von Mengen bzw. Extrahieren einer Teilmenge aus einer gegebenen Menge wurden bereits auf Stufe 1 erarbeitet.

Hinzufügen und Wegnehmen von Einern ohne Umbündeln

Werden zu einer gegebenen, maximal gebündelten Menge Einer hinzugefügt, ohne dass die Anzahl der dann vorhandenen Einer neun überschreitet, so kann kein neuer Zehner gebündelt werden. Die Anzahl der Zehner bleibt also gleich. Analog verhält es sich, wenn von einer gegebenen Menge nur maximal so viele Einer weggenommen werden, wie vorhanden sind, ohne dass Zehner entbündelt werden müssen. Die entsprechenden Rechnungen können daher auf die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis zehn zurückgeführt werden. Man spricht hier auch von *dekadischen Analogien*.



Ein Ziel der Arbeit auf Stufe 1 war die automatisierte Abrufbarkeit der Beziehungen der Zahlen bis zehn. Auf dieser Grundlage könnten die Teilnehmer/-innen auch Aufgaben ohne Stellenwertübergang wie $43 + 5$ oder $69 - 6$ bereits ohne Rückgriff auf zählende Rechenstrategien lösen. Es wird allerdings nicht allen Teilnehmern und Teilnehmerinnen gelingen, die Möglichkeit der Nutzung dekadischer Analogien selbstständig zu erkennen. Es gilt daher, diese Analogien bewusst zu machen und inhaltlich zu begründen.

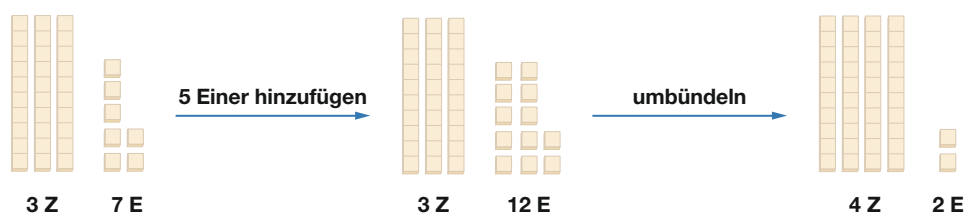
Dazu können Sie zum Beispiel die entsprechenden Mengenhandlungen und ihre Symbolisierung durch Aufgabenserien thematisieren, bei denen die dekadischen Analogien hervortreten. Lassen Sie die Teilnehmer/-innen zum Beispiel zu drei vorhandenen Einern fünf weitere hinzufügen und diese Handlung auf der Symbolebene notieren. Als nächstes sind drei Einer und ein Zehner vorhanden. Es werden wiederum fünf Einer hinzugefügt. Was unterscheidet die erste Situation von der zweiten? Wie wirkt sich dieser Unterschied auf der Symbolebene aus? Was ist, wenn man zu zwei Zehnern und drei Einern noch fünf Einer hinzufügt? Wo ist hier die Verbindung zu den vorausgegangenen Handlungen?

Aus zwei Gründen steht an dieser Stelle des Lernprozesses, ebenso wie beim Hinzufügen und Wegnehmen von vollen Zehnern, nicht die Routinisierung von Rechnungen ohne Stellenwertübergang im Vordergrund. Zum einen gibt es hier im Grunde nichts Neues zu routinisieren. Was an dieser Stelle automatisiert abrufbar sein muss, sind die Zahlzerlegungen bis zehn. Diese Voraussetzung wurde bereits auf Stufe 1 geschaffen. Zum anderen kann eine zu lange Fokussierung auf Rechnungen ohne Stellenwertübergang dazu beitragen, dass die Beziehungen zwischen Zehnern und Einern aus den Augen verloren werden. Worum es geht, ist die Einsicht, aus welchem Grund die dekadischen Analogien anwendbar sind.

Hinzufügen und Wegnehmen von Einern mit Umbündeln

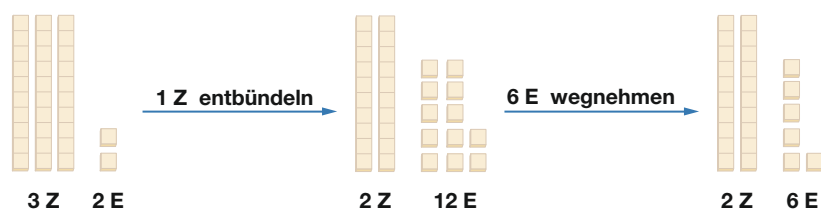
Eine qualitativ andere Situation ergibt sich, wenn einer Menge so viele Einer hinzugefügt werden, dass die Anzahl der dann vorhandenen Einer neun überschreitet oder mehr Einer weggenommen werden sollen, als ungebündelt vorhanden sind. In diesen Situationen ist es nötig, Beziehungen zwischen den ungebündelten Einern und den Zehnern herzustellen.

Im ersten Fall müssen jeweils zehn der vorhandenen Einer zu einem Zehner gebündelt werden, um eine maximal gebündelte Menge zu erhalten.



An diesem Punkt des Lernprozesses sollte diese Bündelungshandlung von den Teilnehmern und Teilnehmerinnen auch tatsächlich durchgeführt werden. Natürlich ist es auch möglich, die Gesamtanzahl zu ermitteln, ohne die konkrete Bündelungshandlung vorzunehmen, indem man zum Beispiel einfach von der vorher vorhandenen Anzahl weiterzählt und dabei jeweils einen der hinzugekommenen Einer antippt: „38, 39, 40, 41, 42“. Durch diese Abzählhandlung wird aber nicht deutlich, warum die Anzahl nun durch die Ziffernfolge „42“ symbolisiert wird. Die vorhandene Menge ist schließlich strukturiert in drei Zehner und 12 Einer, nicht aber in vier Zehner und zwei Einer. Die Veränderungen auf der Ebene der Zahlsymbole erschließen sich erst durch den Bezug zu den Bündelungshandlungen: Anstelle der 3 steht eine 4, weil nun vier Zehner vorhanden sind, und anstelle der 7 steht eine 2, weil nur noch zwei ungebündelte Einer vorhanden sind. Des Weiteren wird gerade durch die Handlung des Bündelns von zehn Einern zu einem Zehner der qualitative Unterschied zu den vorherigen Mengenhandlungen deutlich. Manche Teilnehmer/-innen können sich zudem auf das Teilschrittverfahren nur einlassen, wenn sie den zum Zehnerübergang gehörenden Bündelungs- bzw. Entbündelungsprozess auf der Mengenebene verstanden haben.

Noch deutlicher wird die Notwendigkeit, Zehner und Einer miteinander in Beziehung zu setzen, dann, wenn gefordert wird, mehr Einer von einer Menge wegzunehmen, als ungebündelt vorhanden sind. Will man zum Beispiel von vorhandenen drei Zehnern und zwei Einern sechs Einer wegnehmen, so muss man einen Zehner gegen zehn Einer eintauschen, um die entsprechende Handlung überhaupt vollziehen zu können.



2.1.4 Orientierung im Zahlraum bis 100

Der Aspekt der räumlichen Anordnung von Zahlen

Bisher ging es darum, bei den Teilnehmern und Teilnehmerinnen ein grundlegendes Verständnis für die Zehner-Einer-Struktur der zweistelligen Zahlen zu entwickeln. Da die Zahlschreibweise im Dezimalsystem auf der Idee der Bündelung von Mengenelementen basiert, stand dabei die Verbindung zwischen der Mengen- und der Symbol Ebene im Mittelpunkt der Betrachtungen. Was bisher ausgeklammert wurde, ist der Aspekt der Anordnung von Zahlen.

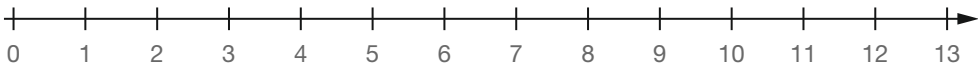
Obwohl die Rolle der inneren Zahlraumvorstellung für die Entwicklung eines elaborierten abstrakten Zahlbegriffs nicht abschließend geklärt ist (vgl. *DVV-Rahmencurriculum Rechnen Stufe 1*, S. 39–42), ist doch auffällig, dass Erwachsene mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (EbSR) oftmals nicht über eine Zahlvorstellung verfügen, die ihnen eine Zahlraumorientierung in einem geometrischen Sinne ermöglicht.

Landerl und Kaufmann (2008) berichten zum Beispiel, dass „selbst erwachsene Personen mit Dyskalkulie“ sich oftmals bewusst vergegenwärtigen müssen, welche Menge zum Beispiel mit dem Zahlwort „fünfzehn“ verbunden ist, da ihnen die Zahl ansonsten einfach „nichts sagt“ (vgl. *Landerl & Kaufmann 2008*, S. 110). Diese Vergegenwärtigung verläuft bei EbSR oftmals auf einer sehr konkreten Ebene, bei der auch unwesentliche Merkmale der Mengenrepräsentanten, wie Form und Farbe, mit aufgerufen werden. Sollen mit diesen vorgestellten Mengen auch noch Operationen vorgenommen werden, führt das zu einer hohen Belastung des Arbeitsgedächtnisses (vgl. *Gray et al. 2000*, S. 13).

Räumliche Beziehungen zwischen Zahlen im Sinne einer (linearen) Anordnung haben in einer solchen konkretistischen Sichtweise keinen Platz. Um aber zum Beispiel ein Gespür für die Größenverhältnisse von Zahlen zu entwickeln, ist eben dieser Aspekt der Anordnung von Zahlen eine wichtige Stütze. Aussagen wie „die 19 liegt näher an der 20 als die 23“ sind nur dann verständlich, wenn man Zahlen auch in einem geometrischen Sinne als angeordnete Reihe denken kann. Mit der Ausweitung des Zahlraums gewinnt diese geometrische Sicht auf Zahlen weiter an Bedeutung.

Der Zahlenstrahl als Stütze für die Zahlraumorientierung

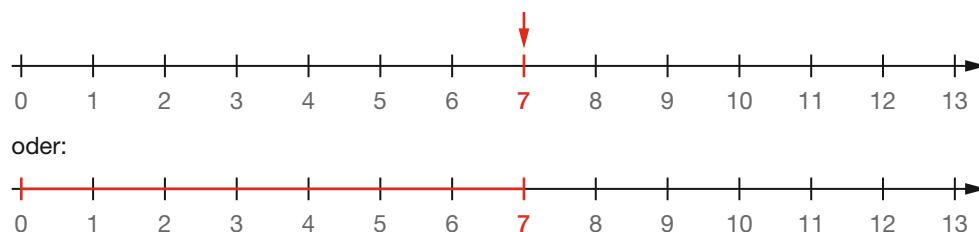
Ein Darstellungsinstrument, das die lineare Anordnung der Zahlen aufgreift, ist der sogenannte „Zahlenstrahl“, auf dem die Zahlen üblicherweise von links nach rechts aufsteigend äquidistant angeordnet werden:



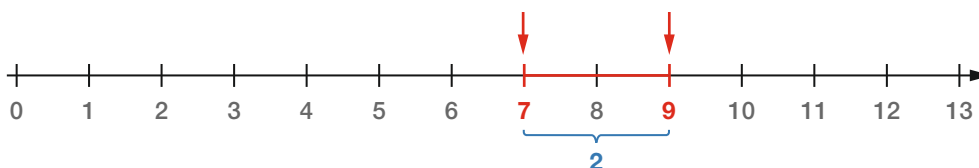
Die Anordnung der Zahlen von links nach rechts ist dabei nicht inhaltlich begründet, sondern lediglich eine Konvention. Insbesondere wäre auch eine Ausrichtung von unten nach oben oder von oben nach unten denkbar. Die inneren Bilder, die sich Menschen von der Anordnung der Zahlen machen, unterscheiden sich zum Teil deutlich von dieser linearen Anordnung (vgl. *DVV-Rahmencurriculum Rechnen Stufe 1*, S. 40). Da der Zahlenstrahl im Kurs auch als Kommunikationsmittel dienen soll, ist es aber sinnvoll, sich mit den Kursteilnehmern und Kursteilnehmerinnen auf eine einheitliche Darstellung zu verständigen.

Die Zahldarstellung am Zahlenstrahl birgt einige unauflösbare Probleme, die diskutiert werden sollten, da sie den Teilnehmern und Teilnehmerinnen früher eventuell Schwierigkeiten bereitet haben und Potential für Missverständnisse bergen.

Ein Problem bei der Zahldarstellung am Zahlenstrahl ist, dass nicht unmittelbar klar ist, was genau mit den Markierungen bezeichnet wird. Ist zum Beispiel die 7 der Punkt auf dem Zahlenstrahl oder ist sie die gesamte Strecke von der 0 bis zur 7?

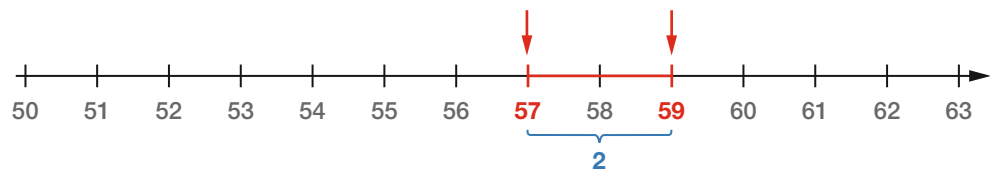


Was hat die Strecke zwischen 2 und 9 mit der Position der 7 zu tun? Wenn die 7 und die 9 durch den jeweiligen Punkt auf dem Zahlenstrahl repräsentiert werden, was bedeutet dann $9 - 7$? Was bedeutet dann, dass 7 um 2 kleiner ist als 9? Auf die letzte Frage könnte man antworten, dass 7 und 9 eben den Abstand 2 haben. Aber warum werden die 7 und die 9 dann als Punkt verstanden und die 2 als Strecke? Und was hat diese Strecke mit dem Punkt zu tun, der die 2 repräsentiert? Wenn man es konsequent durchdenkt, so erreicht man eine konsistente Sicht nur dann, wenn man die Zahlen am Zahlenstrahl als Strecke betrachtet. Die Vorstellung der Zahl als Punkt auf dem Zahlenstrahl hat aber ebenfalls eine hohe Plausibilität. Deshalb wird man unbewusst praktisch wahrscheinlich eher eine Mischung zwischen einer Positions- und einer Streckendenkweise verwenden.



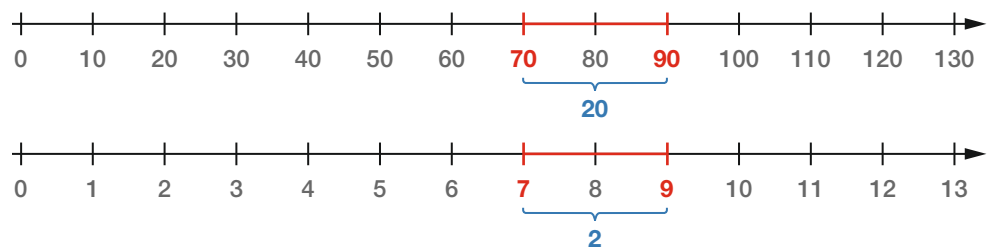
Das Modell des Zahlenstrahls bringt gegenüber der Mengeninterpretation eine Änderung der Sichtweise auf Zahlen und ihre Verhältnisse mit sich. Während es bei der Mengenbetrachtung um Anzahlen und ein Mehr oder Weniger an Elementen geht, geht es bei der Zahlinterpretation am Zahlenstrahl um Positionen von Zahlen und die Entfernung dieser Positionen voneinander bzw. um Streckenlängen und die Unterschiede dieser Streckenlängen. Auf der Mengenebene betrachtet, ist zum Beispiel der Unterschied zwischen 9 und 7 kleiner als der zwischen 3 und 7, weil sich die ersten beiden Mengen nur um zwei Objekte unterscheiden, die zweiten aber um vier. Notiert man diese Zahlen an einem Zahlenstrahl, so ist es daher sinnvoll, die 7 näher bei der 9 zu positionieren als bei der 3. Da sich zwei aufeinanderfolgende Zahlen auf der Mengenebene immer genau um ein Mengenelement unterscheiden, kann man die geometrischen Verhältnisse auch genauer bestimmen: Die 3 sollte genau doppelt so weit von der 7 entfernt sein wie die 9.

Aufgrund der analogen Strukturen kann man diese Überlegungen auch auf die weiteren Dekaden übertragen. Schaut man sich zum Beispiel die Zahlen von 50 bis 60 an, so wird deutlich, dass sich die Verhältnisse aus dem ersten Zehner übertragen: 57 ist genau so weit von 59 entfernt wie 7 von 9.



Betrachtet man allerdings *die relativen Unterschiede*, so wird deutlich, dass es durchaus einen Unterschied ergibt, ob man den Unterschied zwischen 7 und 9 oder den Unterschied zwischen 57 und 59 betrachtet. Es geht also auch um ein Gespür für die relativen Größendimensionen.

Zoomt man sozusagen heraus und betrachtet den Zahlraum bis 100, so übertragen sich die geometrischen Verhältnisse innerhalb des ersten Zehners entsprechend. Die 90 ist im „Maßstab der Zehner“ genauso weit von der 70 entfernt wie im „Maßstab der Einer“ die 9 von der 7. Die 30 ist doppelt so weit von der 70 entfernt wie die 90, weil der Unterschied zwischen 70 und 90 zwei Zehner beträgt, der Unterschied zwischen 30 und 70 hingegen vier Zehner.

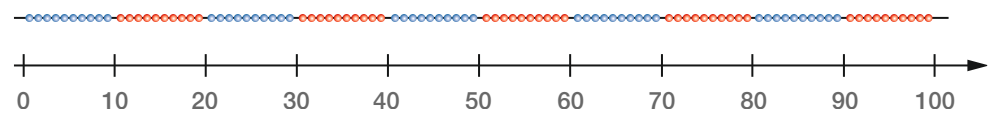


Durch diese Analogien des Aufbaus eines Hunderters aus 10 Zehnern zum Aufbau eines Zehners aus 10 Einern ist der Zahlenstrahl als Orientierungshilfe besonders effektiv. Die bekannten Strukturen können auf größere Zahlräume übertragen werden. Auf der konkreten Mengenebene ist zum Beispiel das Größenverhältnis zwischen 30 und 70 nur schwer vorstellbar. Mithilfe des Zahlenstrahls kann man sich klarmachen, dass dieses Verhältnis dem von 3 und 7 entspricht, was sich der Vorstellung wesentlich einfacher erschließt.

Verbindung zwischen der Repräsentation am Zahlenstrahl und Mengenebene

Wichtig für die Kursteilnehmer/-innen ist es nun zu verstehen, wie die lineare Anordnung der Zahlen am Zahlenstrahl und die Kardinalität von Mengen miteinander verbunden sind. Dazu sollten lineare Aktivitäten am Zahlenstrahl mit dem kardinalen und relationalen Zahlverständnis der Teilnehmer/-innen in Verbindung gebracht werden.

Eine Möglichkeit, diese Verbindung herzustellen, ist es, eine Mengenrepräsentation zu wählen, bei der die Mengenelemente ebenfalls linear angeordnet sind. Dies kann zum Beispiel durch eine Kette mit 100 zweifarbigen Holzperlen realisiert werden. Diese Perlen sind dabei so strukturiert, dass nach jeweils zehn Perlen ein Farbwechsel stattfindet, wodurch die Zehnerbündelung hervorgehoben wird. Der Zahlenstrahl kann dann als schematisierte Form dieser Perlenkette angesehen werden.



Um nun den Zahlenstrahl als Hilfsmittel zum Aufbau der Zahlraumorientierung nutzen zu können, bedarf es passender Aktivitäten, die die Zahlverhältnisse in den Blickpunkt der Teilnehmer/-innen rücken. Neben den oben angedeuteten systematischen Betrachtungen des Aufbaus eines Zahlenstrahls sind die folgenden Aufgabenbeispiele paradigmatisch für denkbare Fragestellungen:

- Lassen Sie die Teilnehmer/-innen die Zahlen von 0 bis 10 an einem leeren Zahlenstrahl markieren. Wie strukturieren die Teilnehmer/-innen diesen Zahlenstrahl? Sind die Markierungen äquidistant?
- Lassen Sie die Teilnehmer/-innen analog dazu die vollen Zehner von 0 bis 100 an einem leeren Zahlenstrahl markieren. Wie viele volle Zehner gibt es in diesem Zahlbereich? Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es im Vergleich zu dem vorherigen Zahlenstrahl? Strukturieren die Teilnehmer/-innen die Markierungen so, dass sie äquidistant sind?
- Lassen Sie die Teilnehmer/-innen 32 Perlen abzählen und analog dazu die 32 an einem leeren Zahlenstrahl oder einem Zahlenstrahl mit Zehnereinteilung markieren. Welche vollen Zehner liegen in der Nähe von 32? Wie groß ist ihr Abstand von der 32? Wie gehen die Teilnehmer/-innen beim Abzählen der Perlen vor? Nutzen sie die Zehner-Struktur, oder zählen sie alle Perlen einzeln ab?
- Führen Sie das Gleiche für die 42, 52, ... aus. Was ändert sich? Was bleibt gleich?
- Lassen Sie die Teilnehmer/-innen an einem Zahlenstrahl, auf dem nur die 0 und die 100 oder nur die vollen Zehner markiert sind, die ungefähre Position der 97, 48, 25, 74, ... bestimmen. Frage: Wie sind Sie vorgegangen, um die Positionen zu finden?
- Lassen Sie die Teilnehmer/-innen die Position bestimmter Zahlen (48, 75, 20, 99, ...) auf einem leeren Zahlenstrahl von 0 bis 100 beschreiben.
Die Teilnehmer/-innen sollen dabei vielfältige Beziehungen der Zahlen erkennen und verbalisieren. Die 48 liegt zum Beispiel nahe an der 50, sie ist ungefähr in der Mitte zwischen 0 und 100, ... Stellen Sie auch die Verbindung zur Mengenebene her. Auf der Mengenebene würde das Obige bedeuten: 48 ist fast genau so viel wie 50, 48 ist ungefähr halb so viel wie 100, ...
- Auch einfache Spiele wie das folgende eignen sich, um die Zahlraumorientierung zu fördern: Ein Teilnehmer/eine Teilnehmerin denkt sich eine Zahl aus. Die anderen versuchen, diese Zahl zu ermitteln, indem sie Vermutungen anstellen. Der- oder diejenige, der oder die sich die Zahl ausgedacht hat, gibt als Rückmeldung, ob die Zahl größer oder kleiner ist als die genannte.

Neben solchen grundlegenden Orientierungsübungen sollte der Zahlenstrahl auch zur Veranschaulichung von Addition und Subtraktion genutzt werden. Ziel dabei ist es, dass die Teilnehmer/-innen diese Rechenoperationen neben dem Verständnis auf der Mengenebene auch im Sinne einer Bewegung durch den Zahlraum auffassen können.

2.2 Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 100

2.2.1 Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen kennen verschiedene (Kopf-)Rechenstrategien für die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 100.
- Die Teilnehmer/-innen können die Ergebnisse von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlraum bis 100 sicher im Kopf bestimmen.

2.2.2 Vorgehensweisen zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben

In größeren Zahlräumen gibt es für die Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Prinzip drei Vorgehensweisen, die in Abhängigkeit von den gegebenen Zahlen, den verfügbaren Hilfsmitteln und den individuellen Fähigkeiten mehr oder weniger gut geeignet sind:

- Es gibt die Möglichkeit, die Rechenanforderungen im Kopf zu bewältigen.
- Hat man Papier und Bleistift zur Hand, so kann man die schriftlichen Algorithmen verwenden oder sich Zwischenergebnisse des Kopfrechnens notieren („gestütztes Kopfrechnen“).
- Des Weiteren gibt es die Möglichkeit, einen Taschenrechner zu verwenden.

Im Folgenden werden Wege zur Erarbeitung von Rechenstrategien für die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 100 aufgezeigt. Neu gegenüber dem traditionellen Mathematikunterricht, der für die Teilnehmer/-innen nicht erfolgreich war, ist die konsequente Erarbeitung der Rechenstrategien *basierend auf dem Verständnis der Zehner-Einer-Struktur der zweistelligen Zahlen*. Ziel der Erarbeitung dieser Strategien ist es, dass die Teilnehmer/-innen Additionen und Subtraktionen im Zahlraum bis 100 im Kopf durchführen können. Dieses Ziel sollte von allen Teilnehmern und Teilnehmerinnen erreicht werden, da solche Rechnungen zum Beispiel im täglichen Umgang mit Geld eine wichtige Rolle spielen. Darüber hinaus wird für die Erarbeitung des kleinen Einmaleins die Fähigkeit zur sicheren Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 100 benötigt (*vgl. Multiplikation*).

Die Grundgedanken der Kopfrechenstrategien lassen sich auch auf größere Zahlräume übertragen. Inwieweit das noch ein Thema im Kurs sein soll, sollten Sie von der Motivationslage der Teilnehmer/-innen abhängig machen. Es erscheint eher nicht notwendig, dass die Teilnehmer/-innen drei- und mehrstellige Zahlen im Kopf addieren und subtrahieren können. Von genereller Bedeutung in größeren Zahlräumen ist aber die Fähigkeit, die ungefähre Größenordnung eines Ergebnisses einschätzen zu können, wenn es zum Beispiel auf ein exaktes Ergebnis gar nicht ankommt oder man sich zunächst einen groben Überblick verschaffen möchte. Die Fähigkeit zum überschlagenden Rechnen sollte daher in jedem Kurs vermittelt werden. Überschlagsrechnungen in größeren Zahlräumen sowie die Rolle der schriftlichen Rechenverfahren werden in den nachfolgenden Kapiteln diskutiert.

2.2.3 Kopfrechenstrategien für die Addition und Subtraktion

Das Scheitern des zählenden Rechnens in größeren Zahlräumen

Für manche der Kursteilnehmer/-innen werden Zählstrategien der einzige Weg sein, auf dem sie Rechenanforderungen im Zahlraum bis 100 ohne weitere Hilfsmittel bewältigen können. In kleinen Zahlräumen sind Zählstrategien trotz aller mit ihnen verbundenen Probleme (vgl. *DVV-Rahmencurriculum Rechnen Stufe 1, Abschnitt 1.3, S.30 ff.*) zum Teil zumindest dahingehend zielführend, dass mit ihnen korrekte Ergebnisse erzielt werden. Das ändert sich, wenn Zahlen größer werden. Während es noch mit einigermaßen erträglichem Aufwand möglich ist, die Ergebnisse des kleinen Einspluseins und Einsminuseins zählend zu ermitteln, ist das je nach Zählstrategie bei Aufgaben im Zahlraum bis 100 kaum noch möglich. Um ein Gefühl dafür zu bekommen, welch enorme Konzentration dazu erforderlich ist, versuchen Sie einmal eine Aufgabe wie $73 - 45$ durch Zählen in Einerschritten zu lösen. Die Teilnehmer/-innen müssen sich daher Strategien erarbeiten, mit denen sie Rechenanforderungen auf effektivere Weise lösen können.

Voraussetzungen für die Ablösung von Zählstrategien im Zahlraum bis 100

Um sich im Zahlraum bis 100 von Zählstrategien lösen zu können, bedarf es *im Prinzip* nur zweier Voraussetzungen. Zum einen müssen die Teilnehmer/-innen Zahlen im Zahlraum bis 20 sicher addieren und subtrahieren können. Dies war Inhalt von Stufe 1, in dem die Kursteilnehmer/-innen sich verschiedene nichtzählende Strategien für die Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 20 erarbeitet haben. Zum anderen müssen die Teilnehmer/-innen den Aufbau zweistelliger Zahlen verstanden haben. Was dazu nötig ist, wurde in Stufe 1 dargestellt.

Einige Beispiele zur Verdeutlichung:

- Rechnungen wie $70 - 50$, $10 + 60$, ... oder auch $37 - 5$, $63 + 4$, ... können durch die Anwendung dekadischer Analogien leicht gelöst werden, wenn man die Zerlegungen der sieben beherrscht.
- Wenn man Aufgaben wie $8 + 7$ oder $12 - 8$ mit dem Teilschrittverfahren lösen kann, dann kann man dieses Vorgehen auch auf Aufgaben wie $28 + 7$, $38 + 7$ usw. übertragen. Um dies verständlich zu tun, muss man allerdings den Aufbau der zweistelligen Zahlen aus Zehnern und Einern und die dadurch bedingten Analogien verstanden haben.
- Die Kombination dieser beiden Vorgehensweisen ermöglicht es, beliebige Aufgaben aus dem Zahlraum bis 100, wie etwa $28 + 57$ oder $62 - 28$ zu lösen.

Viele Wege führen zum Ziel

Auf Grundlage ihres Verständnisses für den Aufbau der Zahlen können die Teilnehmer/-innen die im Zahlraum bis 20 erarbeiteten Rechenstrategien auf verschiedene Weise auf den Zahlraum bis 100 übertragen. Aufgaben wie zum Beispiel $27 + 48$ oder $63 - 57$ können auf ganz unterschiedliche Weise gelöst werden. Einige dieser Möglichkeiten werden im Folgenden inklusive einer möglichen (überspitzt formulierten) Denkweise exemplarisch dargestellt:

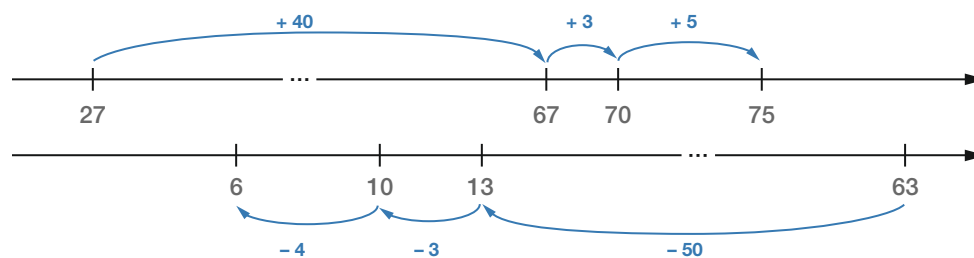
Schrittweises Rechnen

Man kann einen der Summanden zerlegen und schrittweise zum anderen Summanden hinzufügen. Dabei sind unterschiedliche Zerlegungen möglich. Welche tatsächlich genutzt wird, hängt stark vom individuellen Zahlbeziehungswissen ab.

- **27 + 48:** „27 + 40 sind 67. Bis zur 70 fehlen noch 3. Dann bleiben von den 8 noch 5 übrig, die ich hinzufügen muss. Also sind es 75.“
Oder auch: „27 + 3 sind 30. Es bleiben noch 45, die ich hinzufügen muss. 30 + 40 sind 70 und 70 + 5 sind 75.“
- **63 – 57:** „63 – 50 sind 13. 13 – 3 ist zehn. Von den zehn muss ich noch vier abziehen, damit ich 57 abgezogen habe. Also ist 63 – 57 gleich 6.“
Oder auch: „63 – 3 ist 60. Ich muss noch 4 Einer abziehen. 60 – 4 ist 56. Anschließend muss ich noch die 50 abziehen. 56 – 50 ist 6.“
Also ist 63 – 57 gleich 6.“

In der Literatur wird ein solches Vorgehen als „schrittweises Rechnen“ oder auch „Teilschrittverfahren“ bezeichnet. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass es sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion unabhängig von den gegebenen Zahlen stets anwendbar ist. Im Sinne einer Bewegung durch den Zahlraum lässt sich das schrittweise Rechnen auch sehr suggestiv an einem (leeren) Zahlenstrahl veranschaulichen.

Im Gegensatz zum „vollständigen“ Zahlenstrahl dient der leere Zahlenstrahl lediglich der groben Orientierung und der einfachen Notation der Zwischenschritte des Rechenweges. Es kommt hier nicht auf eine verhältnisgetreue Anordnung der Zahlen an.



Stellenweises Rechnen

Man kann zunächst die Zehner und Einer getrennt betrachten und die Teilergebnisse anschließend addieren.

- **27 + 48:** „2 Zehner und 4 Zehner sind 6 Zehner. 7 und 8 sind 15. Also noch ein Zehner mehr und 5 Einer. Insgesamt sind es also 7 Zehner und 5 Einer. Also 75.“
- **65 – 52:** „6 Zehner minus 5 Zehner ist 1 Zehner. 5 Einer minus 2 Einer sind 3 Einer. Insgesamt bleiben also 1 Zehner und 3 Einer übrig. Also 13.“
- **63 – 57:** „6 Zehner minus 5 Zehner ist 1 Zehner. Ich habe nur 3 Einer. Deshalb kann ich zunächst auch nur drei wegnehmen. Die restlichen 4 Einer nehme ich von dem einen Zehner weg. Dann bleiben 6 Einer übrig.“

Dieses Vorgehen wird in der fachdidaktischen Literatur auch als „Stellenwerte extra“ oder „Zehner extra, Einer extra“ bezeichnet. Bei Aufgaben ohne Stellenwertübergang ist „Stellenwerte extra“ relativ problemlos anwendbar. Bei der Subtraktion ergibt sich allerdings die Schwierigkeit, dass die Teilergebnisse *addiert* werden müssen. Bei Aufgaben mit Stellenwertübergang ist insbesondere die Subtraktion problematisch, wie das Beispiel zeigt. Eine komplett getrennte Betrachtung der Stellenwerte ist dann nicht möglich. Dadurch entstehen oftmals systematische Fehler, wie weiter unten noch näher erläutert wird. Ebenso gibt es keine einleuchtende Möglichkeit, das stellenweise Rechnen in Reinform an einem Zahlenstrahl zu veranschaulichen.

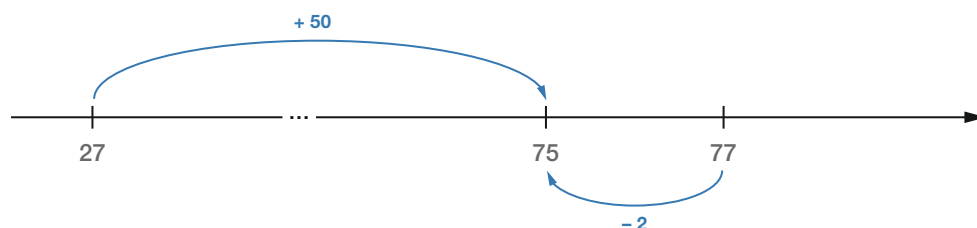
Nutzen von Hilfsaufgaben

Man kann zum Beispiel die Nähe eines der Summanden zu einem vollen Zehner ausnutzen, weil Rechnungen mit vollen Zehnern besonders einfach durchzuführen sind:

- **27 + 48:** „27 + 50 sind 77. Das sind aber 2 zu viel. Also ist das Ergebnis 75.“
- **63 – 57:** „63 – 60 ist 3. Dabei habe ich aber 3 zu viel abgezogen. Also muss ich wieder 3 dazutun. Also ist 63 – 57 gleich 6.“

Dieses Vorgehen wird in der Regel als „Hilfsaufgabe“ bezeichnet und kann eine große Rechenerleichterung sein. Allerdings ist für ihre Anwendung bereits ein gewisser „Zahlenblick“ notwendig. Man muss zum Beispiel zunächst erkennen, dass die 48 nahe an der 50 liegt. Des Weiteren muss man dann die Rechnung $27 + 50$ auch tatsächlich problemlos durchführen können. Und zuletzt muss man sich auch noch überlegen, wie sich die Veränderung der Zahlen auf das Ergebnis auswirken und wie man diese Veränderungen wieder korrigieren kann.

Gerade im Hinblick auf den letzten Punkt bietet die Darstellung am Zahlenstrahl eine sehr suggestive Möglichkeit, sich die Situation klarzumachen.



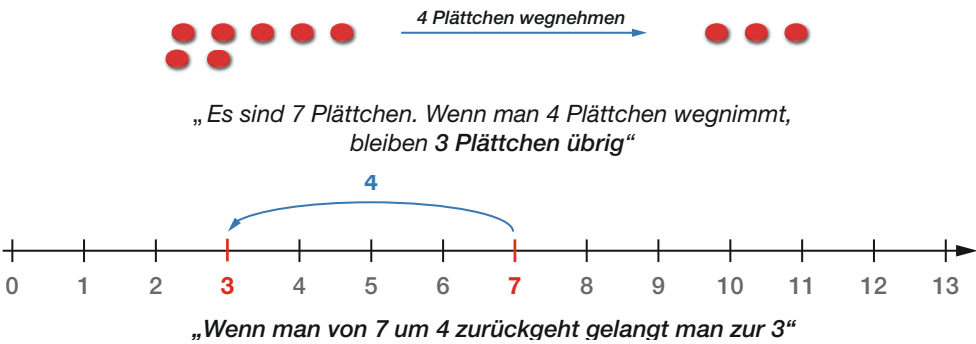
Ergänzen

Subtraktionsaufgaben kann man auch ergänzend lösen. Man bestimmt die Differenz der gegebenen Zahlen dann nicht, indem man die eine von der anderen abzieht, sondern indem man sozusagen den Abstand der beiden Zahlen „ausmisst“. Dieses Ausmessen kann vorwärts oder rückwärts geschehen.

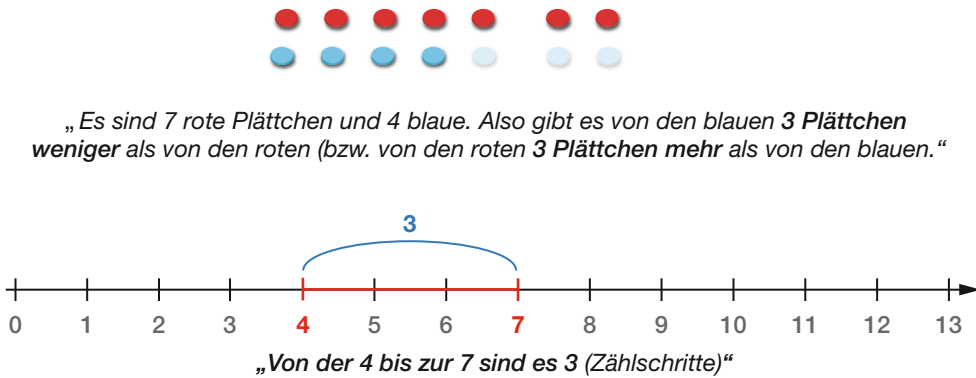
- **63 – 57:** Vorwärts-Ergänzen: „Von 57 bis 60 sind es 3. Von 60 bis 63 sind es auch 3. Also ist 63 – 57 gleich 6.“
Rückwärts-Ergänzen: „Von 63 bis 60 sind es 3. Von 60 bis 57 sind es auch 3. Also ist 63 – 57 gleich 6.“

Das Ergänzen bietet sich insbesondere dann an, wenn die Zahlen dicht zusammen liegen, oder auch dann, wenn eine der Zahlen nah an einem vollen Zehner liegt. Auch beim Herausgeben des Wechselgeldes an der Kasse greift man oftmals auf die Differenzbestimmung durch Vorwärts-Ergänzen zurück.

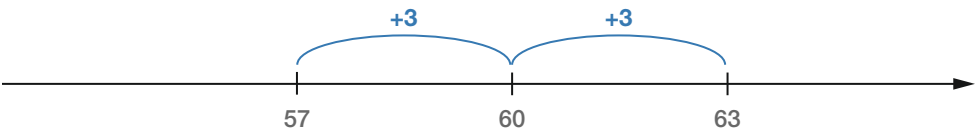
Dem Ergänzen liegt eine andere Sicht auf die Subtraktion zugrunde als die bisher im Kurs dominante Sicht. Bisher wurde die Subtraktion vorwiegend als Extraktion einer Teilmenge aus einer gegebenen Menge bzw. die Rückwärtsbewegung im Zahlraum gedeutet. $7 - 4 = 3$ bedeutet dann:



Das Ergänzen hingegen stellt auf der Mengenebene die Frage, um wie viele Elemente sich zwei Mengen unterscheiden bzw. wie viele Elemente noch fehlen, bis eine bestimmte Anzahl erreicht ist. Auf der Ebene des Zahlenstrahls stellt die ergänzende Sichtweise die Frage, wie weit die beiden Zahlen voneinander entfernt sind. Es geht sozusagen um eine Abstandsmessung. Die Deutungen von $7 - 4 = 3$ sind dann entsprechend die folgenden:



Der Abstand von 4 und 7 beträgt also 3. Hat man die Subtraktion auch im Sinne einer Abstandsmessung verstanden, bietet die Darstellung am leeren Zahlenstrahl wiederum eine anschauliche Möglichkeit, sich die Situation zu verdeutlichen.



Diese exemplarische Darstellung möglicher Vorgehensweisen ist keineswegs umfassend. Sie soll lediglich einen Einblick in die Vielfalt der möglichen Lösungswege geben. Die Oberbegriffe, unter denen die Vorgehensweisen subsummiert wurden, sollen den Kern des Vorgehens wiedergeben. Diese Oberbegriffe entstammen der

Fachdidaktik und dienen dort in erster Linie dazu, Untersuchungsergebnisse zu strukturieren und die Kommunikation innerhalb der fachdidaktischen Gemeinschaft zu erleichtern. Sie geben nicht die gesamte Bandbreite der möglichen Denkweisen wieder. Was zum Beispiel in der Literatur unter dem Begriff „Schrittweises Rechnen“ zusammengefasst wird, kann im Detail deutlich unterschiedliche Ausprägungen haben, wie schon an den beiden obigen Beispielen deutlich wird.

Wie bereits dargestellt, haben die Teilnehmer/-innen durch die Auseinandersetzung mit dem Aufbau der zweistelligen Zahlen und den Rechenstrategien im Zahlraum bis 20 die nötigen Voraussetzungen, um auch in größeren Zahlräumen nichtzählende Rechenstrategien anzuwenden. Dennoch sollte zu Beginn beständig und auch später immer mal wieder eine Anbindung der Rechnungen an die Mengenebene erfolgen – sei es um aus den Mengenhandlungen Rechenstrategien abzuleiten, sei es um die Korrektheit von Ergebnissen oder Vorgehensweisen zu überprüfen oder um anderen das eigene Vorgehen verständlich zu machen.

2.2.4 Umgang mit verschiedenen Rechenstrategien

In Abhängigkeit von den gegebenen Zahlen und dem individuellen Wissen sind die verschiedenen Strategien unterschiedlich gut geeignet, um eine Aufgabe zu lösen. Bei der o. g. Aufgabe $27 + 48$ bietet sich zum Beispiel aufgrund der Nähe der „48“ zur „50“ der Weg über eine Hilfsaufgabe an. Noch deutlicher werden die Unterschiede hinsichtlich der Effektivität bei der Subtraktion. Die Differenz von 91 und 89 lässt sich ermitteln, indem man schrittweise 89 von 91 subtrahiert. Dieser Rechenweg führt eventuell zu einem korrekten Resultat, ist aber sehr aufwändig. Macht man sich dagegen klar, dass 91 genau zwei mehr sind als 89, gibt es im Grunde gar nichts zu rechnen, denn genau diese zwei bleiben übrig, wenn man die 89 abzieht.

Für Sie als Kursleiter/-in kommt es zum einen darauf an, die von Ihren Kursteilnehmern und Kursteilnehmerinnen verwendeten Strategien inhaltlich zu durchdringen, um angemessene Rückmeldungen geben zu können, eine Diskussion zwischen den Kursteilnehmern und Kursteilnehmerinnen anleiten zu können und diese zu einer Reflexion ihrer Vorgehensweise zu bringen. Zum anderen kann es natürlich auch angebracht sein, dass Sie selbst Rechenstrategien in die Diskussion einbringen.

Der flexible Rechner als Leitbild

Für die Kursteilnehmer/-innen kommt es darauf an, ein Repertoire an Rechenstrategien zu erwerben, mit denen sie rechnerische Anforderungen bewältigen können. Das Leitbild ist dabei der „flexible Rechner“, der eine Aufgabe in Abhängigkeit von den Gegebenheiten auf effektive Weise lösen kann.

Die Frage ist, wie Lernprozesse so gestaltet werden können, dass die Teilnehmer/-innen dem Leitbild des flexiblen Rechners näher kommen. Ihre Aufgabe als Kursleiter/-in ist es, zunächst dafür zu sorgen, dass die Teilnehmer/-innen überhaupt ein Bewusstsein dafür entwickeln, dass es sehr unterschiedliche Wege gibt, eine Rechenanforderung zu bewältigen. Dazu ist es nötig, dass unterschiedliche Strategien im Kurs präsent sind. Das kann man zum Beispiel dadurch erreichen, dass die Teilnehmer/-innen sich gegenseitig erklären, auf welche Weise sie eine Aufgabe lösen.

In einem weiteren Schritt geht es darum, die unterschiedlichen Rechenwege hinsichtlich ihrer Effektivität zu vergleichen. Dazu sollten die unterschiedlichen Rechenwege miteinander in Beziehung gesetzt werden. Ziel ist es, dass die Teilnehmer/-innen verstehen, aus welchem Grund eine Vorgehensweise bei einer bestimmten Aufgabe effektiv oder weniger effektiv ist. Erst dieses In-Beziehung-Setzen der Lösungswege mit den Charakteristika der Aufgabe macht es möglich, Lösungsstrategien reflektiert auf andere Aufgaben zu übertragen.

Mathekonferenzen als methodischer Rahmen

Als methodischer Rahmen für den beschriebenen Prozess kann eine sogenannte „Mathekonferenz“ dienen. Dabei sollen sich die Teilnehmer/-innen in einer ersten Phase selbständig mit ausgewählten Aufgaben auseinandersetzen, um eine Grundlage für die Diskussion zu schaffen. In dieser Phase haben Sie als Kursleiter/-in die Gelegenheit, sich ein Bild von den Vorgehensweisen der Teilnehmer/-innen zu machen. Dabei können Sie bereits die in der Gruppe vorhandenen Lösungswege ausmachen, die in der anschließenden Diskussion aufgegriffen werden können. Interessant sind dabei gerade auch fehlerhafte Lösungen. Ihre Besprechung bietet ein hohes Erkenntnispotenzial für die Gruppe.

In einer zweiten Phase stellen die Teilnehmer/-innen ihre Lösungswege den anderen Teilnehmern und Teilnehmerinnen vor. Die unterschiedlichen Lösungswege werden zunächst einmal gesammelt, ohne eine Bewertung ihrer Effektivität vorzunehmen. Erst nach der Sammlung aller Lösungswege findet in einer dritten Phase eine Diskussion darüber statt, welche Lösungswege für die entsprechende Aufgabe besonders effektiv sind und warum.

Mathekonferenzen haben somit drei Hauptfunktionen. Für denjenigen, der sein Vorgehen vorstellt, bietet die Mathekonferenz zum einen die Möglichkeit, Wertschätzung für seine Ideen zu erhalten. Zum anderen kann die Darstellung des eigenen Vorgehens gegenüber anderen auch dazu beitragen, dieses Vorgehen selbst inhaltlich noch einmal tiefer zu durchdringen. Für denjenigen, der die Rechenstrategie eines anderen nachvollzieht, ergibt sich die Möglichkeit, sein eigenes Repertoire an Vorgehensweisen zu erweitern. Sie als Kursleiter/-in erhalten darüber hinaus einen Einblick in die Denkweise der Teilnehmer/-innen und somit einen Zugriff auf mögliche Verständnislücken.

Das Erkenntnispotenzial von fehlerhaften Lösungen

Fehlerhafte Lösungen entstehen in der Regel nicht „wahllos“. Sie folgen oftmals einem Muster, das auf der Anwendung eines selbst konstruierten, fehlerhaften Rechentricks basiert. In der Anwendung dieses Rechentricks äußert sich dann ein grundlegendes Fehlverständnis.

So kann man zum Beispiel bei Grundschulkindern häufig beobachten, dass sie bei Subtraktionsaufgaben mit Stellenwertübergang systematisch stellenweise die kleinere von der größeren Ziffer abziehen. Um zum Beispiel das Ergebnis von $53 - 28$ zu ermitteln, rechnen sie $5 - 2 = 3$ und $8 - 3 = 5$ und erhalten so 35 als Ergebnis. Dieses Vorgehen ist insofern rational begründet, als es bei Aufgaben ohne Stellenwertübergang immer zum richtigen Ergebnis führt. In einem solchen Vorgehen zeigt sich aber auch, dass diese Kinder auf der inhaltlichen Ebene noch nicht verstanden haben, was ihre Rechnungen bedeuten.

Es ist davon auszugehen, dass viele der Kursteilnehmer/-innen sich im Verlauf ihrer Schulzeit und auch im späteren Leben mit einer Vielzahl solcher Tricks über Wasser gehalten haben. Diese Tricks haben manchmal zu richtigen Ergebnissen geführt und manchmal nicht – aber immerhin. Was „mathematischen Analphabeten“ jedoch stets verborgen blieb, war, *aus welchem Grund* ihre Rechentricks manchmal funktionierten und manchmal nicht. Rechnen verkommt dann zu einer Art Ratespiel, das scheinbar keinen rationalen Regeln folgt.

Diese Erfahrung sollte sich im Kurs nicht wiederholen. Stattdessen sollten Sie versuchen, systematische Fehler der Teilnehmer/-innen produktiv zu nutzen, indem Sie diese auf der inhaltlichen Ebene diskutieren. Wer sich zum Beispiel auf der Mengenebene klar macht, was $53 - 28$ bedeutet, dem wird deutlich, dass die obige Rechnung nicht zielführend ist.

Ein spielerischer Zugang

Es gibt eine Vielzahl an einfachen Spielen, wie zum Beispiel „Elf nimmt“ oder „Lobo 77“, bei denen Additionen und Subtraktionen im Zahlraum bis 100 durchgeführt werden müssen. Diese bieten eine hervorragende Möglichkeit, die Routinisierung des Kopfrechnens auf interessante Weise zu unterstützen.

2.3 Mehrstellige Zahlen verstehen

2.3.1 Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen verstehen die Idee der fortgesetzten (Zehner-)Bündelung als Grundlage der Anzahldarstellung im Dezimalsystem.
- Die Teilnehmer/-innen verstehen die Idee des Stellenwerts als grundlegende Idee der Zahlschreibweise im Dezimalsystem und erkennen die Korrespondenz zur fortgesetzten Zehnerbündelung.
- Die Teilnehmer/-innen verstehen den Zusammenhang zwischen Mengen, der symbolischen Zahldarstellung und der verbalen Zahlbezeichnung.
- Die Teilnehmer/-innen können sich im Zahlraum bis 1000 orientieren. Sie nutzen die überlagerte 1000er-Struktur des Dezimalsystems, um Größenverhältnisse beliebig großer Zahlen auf die Verhältnisse im Zahlraum bis 1000 zurückzuführen.
- Die Teilnehmer/-innen können die Größenordnung des Ergebnisses von Additionen und Subtraktionen abschätzen.

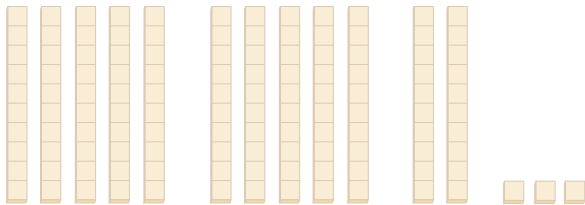
2.3.2 Grundlagen für das Verständnis mehrstelliger Zahlen

Die Idee der mehrfachen Bündelung

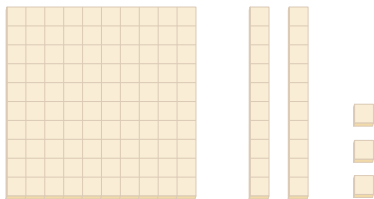
Jenseits der 99 kommt im dezimalen Stellenwertsystem die Idee der mehrfachen Bündelung ins Spiel. Die Zahl 99 repräsentiert neun Zehnerbündel und neun Einer. Kommt nun ein weiteres Mengenelement hinzu, so lassen sich die dann vorhandenen Einer zu einem weiteren Zehner bündeln. Es sind dann zehn Zehner vorhanden. Hinsichtlich der Notation passiert hier zunächst einmal scheinbar nichts Neues: „Hinter“ werden die nicht vorhandenen ungebündelten Einer durch eine Null repräsentiert, und „vorne“ stehen die zehn Zehner. Erst die Benennung der Zahl als „einhundert“ gibt einen Hinweis darauf, dass sich an dieser Stelle hinsichtlich der Sicht auf die Zahl qualitativ etwas ändert: Die zehn Zehner werden wiederum zu einer neuen Denkeinheit vereinigt – dem Hunderter.

Problematisch an dieser Stelle ist, dass es nun zumindest drei verschiedene Sichtweisen auf das Zahlsymbol „100“ gibt. „100“ kann gedacht werden als 100 einzelne Objekte, „100“ kann gedacht werden als zehn Zehner und „100“ kann gedacht werden als ein Hunderter. Bei manchen Zahlen wird diese unterschiedliche Sichtweise auch durch die Zahlbezeichnung deutlich. So wird zum Beispiel die Zahl „1900“ im Kontext von Jahreszahlen üblicherweise als „neunzehnhundert“ bezeichnet, ansonsten spricht man eher von „eintausendneunhundert“. An diesem Beispiel wird bereits der erneute Bruch in der Zahlbenennung deutlich. Nach der Logik der invertierten Zahlbenennung der Zahlen bis 99 würde „neun-zehn-hundert“ die Zahl 119 bezeichnen.

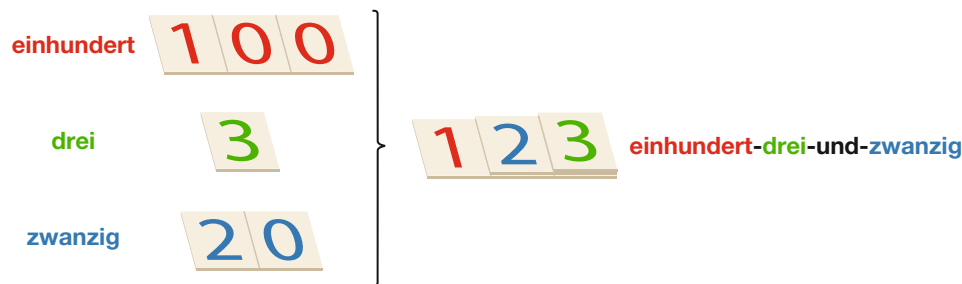
Auch wenn es zunächst vielleicht sehr aufwändig erscheint, sollten Sie die unterschiedlichen Sichtweisen auf mehrstellige Zahlen mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen anhand von konkreten Mengen thematisieren. Geben Sie den Teilnehmern und Teilnehmerinnen zum Beispiel eine große Menge an Steckwürfeln, z.B. 123. Lassen Sie die Teilnehmer/-innen zunächst schätzen, wie viele es sind. Anschließend sollen sie die genaue Anzahl ermitteln und diese Anzahl aufschreiben. Die Frage ist nun, was die Ziffern 1, 2 und 3 mit der Anzahl der Objekte zu tun haben. Auf Grundlage der zuvor erarbeiteten Idee der Bündelung zu Zehnern ist zunächst eine Interpretation als zwölf Zehner und drei Einer naheliegend.



Was neu hinzukommt, ist die Idee der fortgesetzten Bündelung. Zehn der zwölf Zehner können zu einem Bündel höherer Ordnung zusammengefasst werden. Dadurch entsteht ein „Zehner-Zehner“ bzw. Hunderter.



Mit der entstandenen Strukturierung der Menge lässt sich das Zahlsymbol „123“ als Notation der Anzahl der vorhandenen Hunderterbündel, Zehnerbündel und Einer verstehen. Aufgrund der fortgesetzten Bündelung geht mit der Notation dreistelliger Zahlen also eine Zerlegung der Zahl in drei Teile einher. Dies spiegelt sich auch in der dreigliedrigen Bezeichnung der Zahl als „einhundert-drei-und-zwanzig“ wider. Mithilfe der Séguin-Montessori-Zahlenkarten lassen sich auch dreistellige Zahlen im Wortsinn „aufbauen“:



Um den Gedanken der mehrfachen Bündelung und seine Bedeutung für die Zahlnotation zu verdeutlichen, ist auch die Notation in einer Stellenwerttafel hilfreich, da sich die unterschiedlichen Sichtweisen bzw. Bündelungen hier auch in einer unterschiedlichen Notation niederschlagen.

Darstellungen verschiedener Bündelungen der 123 in der Stellenwerttafel:

H	Z	E
1	2	3
	12	3
		123

Dass die erneute Bündelung zu einem Hunderter wiederum erfolgt, wenn zehn Zehner vorhanden sind, ist übrigens keine Notwendigkeit, sondern der Logik des Dezimalsystems geschuldet. So werden zum Beispiel Eier in Waben zu je zehn abgepackt. Es gibt aber keinen Grund dafür, die Kisten, in denen diese Waben verschickt werden, auch mit jeweils zehn Waben zu bestücken. Anders ist es bei der Bündelung im Dezimalsystem. Die Bündelung erfolgt stets bei zehn Objekten einer Bündelungsstufe, weil auf diese Weise für jeden Stellenwert die gleiche Anzahl an Ziffern benötigt wird. Durch dieses Konstruktionsprinzip reichen die Ziffern „0“ bis „9“ aus, um jede beliebige Anzahl darzustellen.

Die Rolle der Null

Bei der Zahlnotation im Stellenwertsystem hängt die Bedeutung einer Ziffer von ihrer Position innerhalb einer Zahl ab. Aus diesem Grund ist es nötig, auch unbesetzte Stellenwerte zu kennzeichnen, wenn es noch größere Stellenwerte gibt, die besetzt sind. Im dezimalen Stellenwertsystem werden die unbesetzten Stellenwerte durch eine Null gekennzeichnet.

Diese Bedeutung der Null für den Wert einer Zahl erschließt sich erst, wenn man die Grundideen der Zahlnotation im Stellenwertsystem bereits verstanden hat und weiß, dass die Ziffern auf den einzelnen Stellenwerten die Anzahl der Bündel einer

bestimmten Bündelungsstufe beschreiben. Die Teilnehmer/-innen werden sich dieser Platzhalterfunktion der Null in der Regel nicht bewusst sein. Sie assoziieren mit „null“ vielleicht „nichts“ oder „die Zahl, die beim Rückwärtszählen als letztes kommt“. In Zahlen wie 20, 300 oder 1024, werden sie die Null wahrscheinlich einfach als Teil der Schreibfigur angesehen, nicht aber ihre Bedeutung für den Wert der Zahl reflektiert haben. Es gilt daher, bei den Teilnehmern und Teilnehmerinnen durch die Auseinandersetzung mit geeigneten Beispielen ein Bewusstsein für die Funktion der Null innerhalb einer Zahl zu entwickeln.

Um die Notwendigkeit der Kennzeichnung unbesetzter Stellenwerte herauszuarbeiten, bietet sich die Kontrastierung mit der Zahlnotation in einer Stellenwerttafel an. In der Stellenwerttafel ist wegen der expliziten Bezeichnung der Stellenwerte eine Kennzeichnung unbesetzter Stellenwerte nicht notwendig. So lässt sich die folgende Zahldarstellung ohne weiteres als Symbolisierung von zwei Hundertern und sechs Einern deuten. Dabei spielt es keine Rolle, dass die Bündelungsstufe der Zehner nicht besetzt ist.

H	Z	E
2		6

Anders sieht es aus, wenn die gleiche Anzahl ohne die Stellenwerttafel festgehalten werden soll. Dann reichen die Ziffern 2 und 6 allein nicht mehr aus. Auch die nicht vorhandenen Zehner müssen nun dargestellt werden, damit die Hunderter überhaupt als solche notiert werden können.

Sie können das mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen zum Beispiel thematisieren, indem Sie die Aufgabe stellen, die gleiche Anzahl einmal mit und einmal ohne Stellenwerttafel darzustellen. Wenn die Zahl dann auch ohne Stellenwerttafel als „26“ aufgeschrieben wird, ergibt sich der Gesprächsanlass unmittelbar, wenn man versucht, den beiden Zahldarstellungen die entsprechenden Mengen zuzuordnen. Wenn die Zahl korrekt als „206“ aufgeschrieben wird, sollten Sie nachhaken, aus welchem Grund denn nun die 2 und die 6 für die Darstellung nicht mehr ausreichen, was die Null in der 206 bedeutet und aus welchem Grund man sie bei der Zahldarstellung in der Stellenwerttafel nicht benötigt.

Benennung dreistelliger Zahlen

Neben der neuen Idee der mehrfachen Bündelung auf der Mengenebene ergibt sich bei den dreistelligen Zahlen auch durch die Zahlbenennung eine Verständnishürde. Manche Kinder setzen zum Beispiel die Zahlwortreihe bei 100 folgendermaßen fort: „..., 98, 99, hundert, ein-hundert, zwei-hundert, drei-hundert, ...“. Offenbar zählen diese Kinder also ab der 100 nicht mehr in Einerschritten, sondern in Hunderter-schritten: „..., 98, 99, 100, 200, 300, ...“. Fordert man die Kinder aber auf, die Zahlen, die sie gerade aufgesagt haben, einmal aufzuschreiben oder die entsprechenden Mengen zu legen, so zeigt sich, dass sie mit ihren Zahlworten etwas ganz anderes meinen, nämlich die Zahlen ..., 98, 99, 100, 101, 102, 103, ... Diese Kinder übertragen die Regel „sprich die Zahlen von hinten“, die sie von den zweistelligen Zahlen kennen, auch auf die dreistelligen Zahlen: So wie die Zahl „23“ mit „drei-und-zwanzig“ bezeichnet wird, müsste es dieser Logik folgend auch „drei(-und-)hundert“

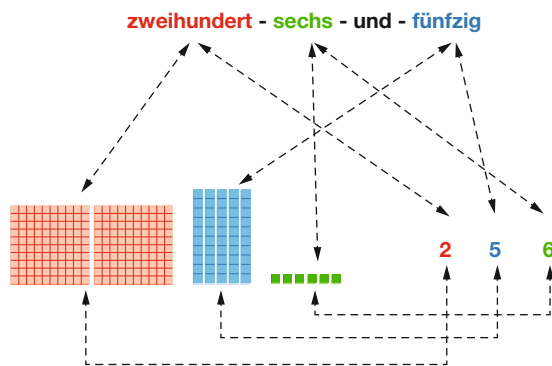
heißen, wenn man „103“ meint. Wenn die Teilnehmer/-innen diesen „Fehler“ machen oder früher gemacht haben, dann sollte ihnen deutlich gemacht werden, dass sie dabei streng logisch agiert haben, dass die Konvention hier also lediglich einer anderen Logik folgt. Die mehrfachen logischen Brüche in der Zahlbenennung mögen manche Teilnehmer/-innen gerade deshalb verwirrt haben, weil die gängige Behauptung ist, dass die Mathematik logisch sei.

Diese Fortsetzung des Musters der Benennung zweistelliger Zahlen lässt die erneuten Brüche besonders deutlich hervortreten, die sich beim Übergang zur Benennung dreistelliger Zahlen vollziehen. Während die zweistelligen Zahlen in der Regel invertiert gesprochen werden („drei-und-zwanzig“ statt „zwanzig-und-drei“), wird nun der Hunderter-Anteil von dreistelligen Zahlen zuerst benannt. Die Zahl „123“ zum Beispiel wird daher nicht als „drei-und-zwanzig-(und-)einhundert“ bezeichnet, wie es nach der Logik der invertierten Sprechweise heißen müsste, sondern als „einhundert-drei-und-zwanzig“. Es findet also eine doppelte Änderung der Leserichtung statt.

Des Weiteren wird die Anzahl der Hunderter im Gegensatz zur Anzahl der Zehner explizit benannt. Zwei Hunderter werden zum Beispiel mit „zwei-hundert“ bezeichnet, zwei Zehner aber nicht mit „zwei-zehn“ sondern mit „zwanzig“. Obwohl die Benennung des Hunderter-Anteils also eigentlich transparenter ist, lauern hier doch potenzielle Schwierigkeiten. Wie aus dem obigen Beispiel deutlich wird, ist es nicht unbedingt selbsterklärend, dass mit „hundert“ und „einhundert“ die gleiche Zahl gemeint ist. Wer aber schon hier immer wieder unsicher ist, ob es sich bei „einhundert“ nun um 100 oder 101 handelt, oder ob vielleicht auch beides gemeint sein kann, der wird auch Schwierigkeiten haben, andere Zahlworte korrekt zu interpretieren. Handelt es sich zum Beispiel bei „zwei-hundert“ um „zwei und 100“, wie es die Analogie zu „zwei-und-dreißig“ nahe legt, oder um zwei Hunderter? Handelt es sich bei „zwei-hundert“ und „hundert-zwei“ um die gleiche Zahl?

Man kann sich leicht ausmalen, dass die Bedeutung eines Zahlwortes wie „zwei-hundert-sechs-und-fünzig“ für jemanden, der diese Brüche in der Zahlbenennung nie als solche wahrgenommen hat, ein Buch mit sieben Siegeln bleibt. Wer die Konventionen der Zahlbenennung nicht verstanden hat, dem erschließt sich unter Umständen nicht, was „zwei“, „hundert“, „sechs“ und „fünzig“ mit dem Zahlsymbol 256 zu tun haben, verweisen die Zahlworte für sich genommen doch auf etwas anderes, nämlich auf 2, 100, 6 und 50.

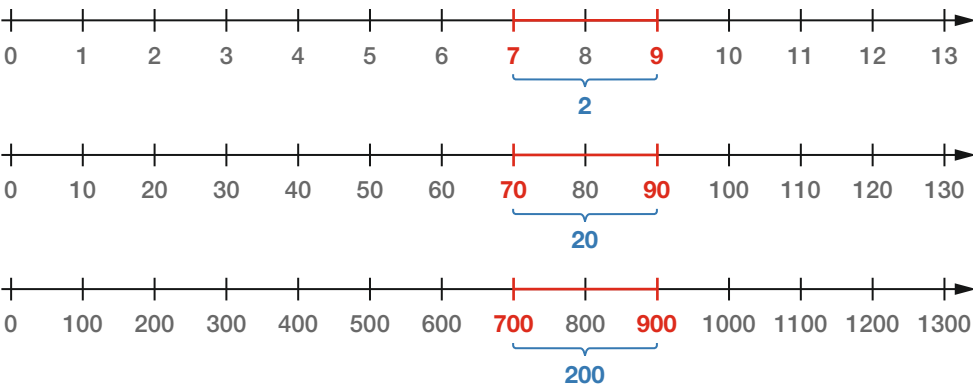
Um solche Missverständnisse aufzuklären und den Teilnehmern und Teilnehmerinnen die daraus resultierenden Unsicherheiten zu nehmen, sollten die Regelhaftigkeiten der Zahlbenennung und die dabei auftretenden logisch-konstruktiven Brüche im Kurs explizit thematisiert werden. Um die Zahlbezeichnungen mit Inhalt zu füllen, sollten dabei stets die Mengenebene, die Symbolebene und die verbale Ebene miteinander verknüpft werden.



2.3.3 Orientierung im Zahlraum bis 1000

Der Aufbau des Tausenders

Aufgrund der wiederkehrenden Zehner-Strukturierung lässt sich die Grobstruktur des Tausenders auf die Struktur eines Zehners zurückführen. Wie schon bei der Betrachtung der Analogien zwischen dem Aufbau eines Zehners und dem eines Hunderters lässt sich auch der Zahlraum bis 1000 durch ein „Hinein-“ und „Herauszoomen“ überschaubar machen. Fertigt man zum Beispiel einen Zahlenstrahl von 0 bis 1000 an, auf dem nur die vollen Hunderter markiert sind, so zeigen sich die Entsprechungen: Im „Maßstab der 100er“ ist 900 genauso weit von 700 entfernt wie die 90 von der 70 im „Maßstab der Zehner“ und die 9 von der 7 im „Maßstab der Einer“.

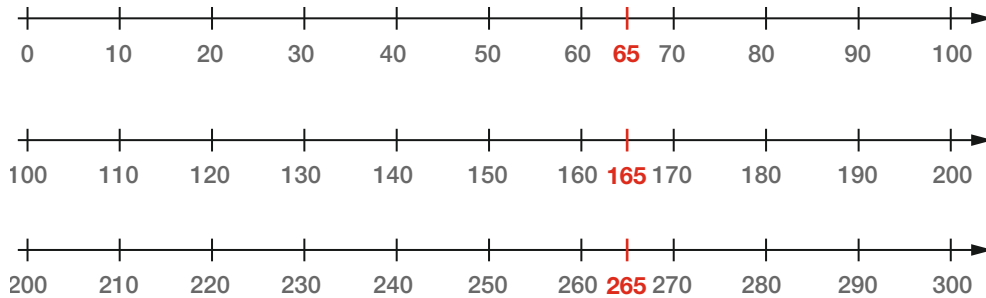


Der Aufbau der Hunderter

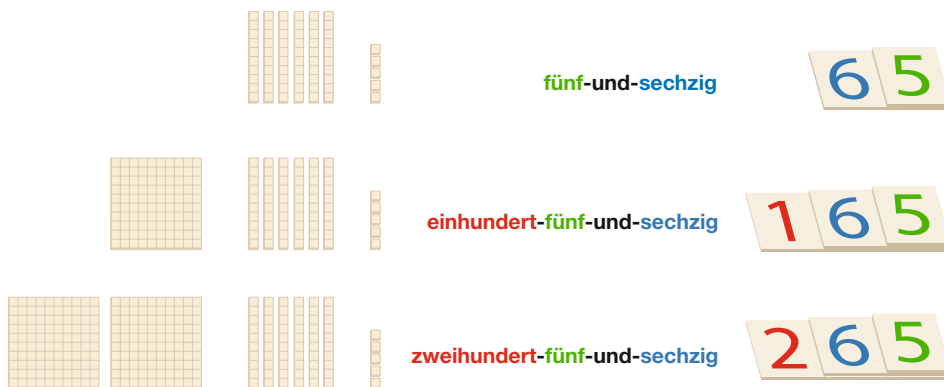
Nimmt man die Struktur der einzelnen Hunderter in den Blick, so wiederholt sich der Aufbau der Zahlen bis 100 analog in jedem weiteren Hunderter. Bewegt man sich innerhalb eines Hunderters, geschieht daher nichts prinzipiell Neues. Dies gilt es den Teilnehmern und Teilnehmerinnen bewusst zu machen, um ihnen eine Stütze für die Orientierung im Zahlraum zu geben. Diese Orientierung wird den Teilnehmern und Teilnehmerinnen in der Regel fehlen, weil sie die wiederkehrenden Strukturen im Zahlaufbau von sich aus nicht erkannt haben.

Um die Analogien im Aufbau der Hunderter zu verdeutlichen, können Sie die Teilnehmer/-innen arbeitsteilig im gleichen Maßstab eine Zahlenstrahl-Darstellung jedes Hunderters anfertigen lassen. Auf dem einen sind also die Zahlen von 0 bis 100 eingetragen, auf dem nächsten die von 100 bis 200 usw.

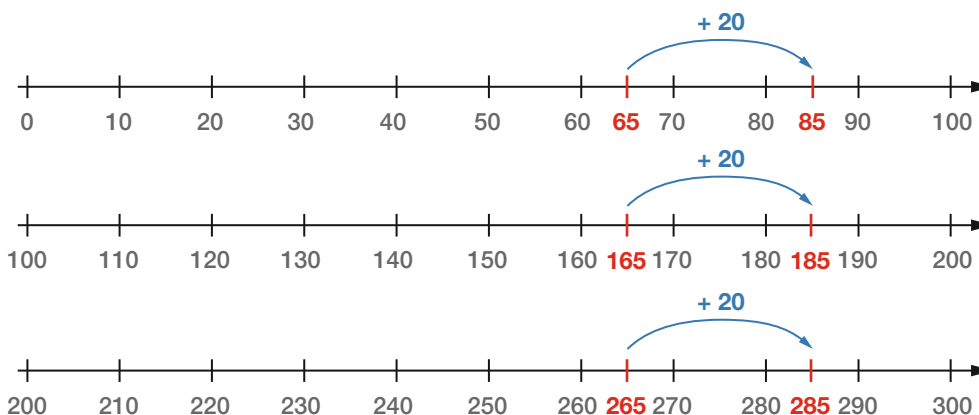
Platziert man die Darstellungen untereinander, lassen sich zum Beispiel Zahlen an den entsprechenden Positionen des jeweiligen Zahlenstrahls markieren. Die 65 liegt genau zwischen der 60 und der 70. Daher liegt die 165 genau zwischen 160 und 170 usw.



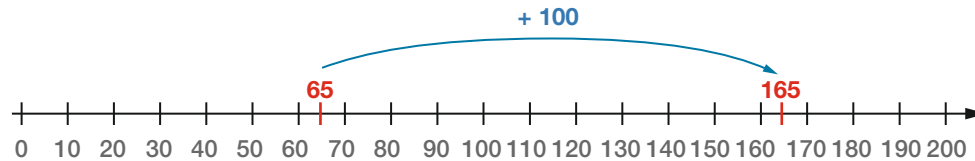
Die Frage ist nun, inwiefern sich diese Zahlen unterscheiden und was gleich ist. Ordnet man den markierten Positionen auf dem Zahlenstrahl die entsprechenden Mengen zu oder stellt die Zahlen in einer Stellenwerttafel mit Plättchen dar, so zeigt sich, dass sie sich nur durch die Anzahl der Hunderter unterscheiden. Auch in der Zahlbenennung finden sich die Analogien wieder. Die eine Zahl wird mit „fünfundsechzig“ bezeichnet, die andere mit „einhundert-fünfundsechzig“ und die letzte mit „zweihundert-fünfundsechzig“.



Führt man nun mit den Mengen jeweils die gleichen Operationen durch, so spiegeln sich diese Operationen in analogen Bewegungen auf dem jeweiligen Zahlenstrahl wider. Fügt man etwa jeder Menge noch zwei Zehner hinzu, so gelangt man auf jedem Zahlenstrahl an Stellen, die sich jeweils entsprechen.



Fügt man den jeweiligen Mengen volle Hunderter hinzu, so gelangt man „auf einem anderen Zahlenstrahl“ an die entsprechende Stelle.

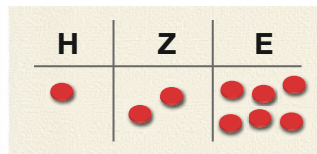


Solche und ähnliche Überlegungen sollten Sie mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen auf den gesamten Zahlraum bis 1000 ausdehnen. Die Aufgabenbeispiele zur Verbindung der Repräsentation am Zahlenstrahl und der Mengenebene aus dem ersten Kapitel lassen sich entsprechend übertragen und ausbauen.

2.3.4 Mengenoperationen im Zahlraum bis 1000

Wie schon bei der Erarbeitung des Verständnisses der zweistelligen Zahlen kommt dem Operieren mit Mengen eine besondere Bedeutung für das Verständnis mehrstelliger Zahlen zu. Dabei kann neben der konkreten Mengenrepräsentation auch eine „halbkonkrete“ Darstellung in einer Stellenwerttafel mit Plättchen hilfreich sein. In dieser Darstellung steht ein Plättchen nicht nur für ein Objekt, sondern repräsentiert eine Einheit des entsprechenden Stellenwertes.

126



Zum einen wird die analoge Zahlrepräsentation durch eine entsprechende Anzahl von Mengenelementen bei großen Anzahlen recht unpraktisch. Zum anderen kann die Plättchendarstellung in der Stellenwerttafel als Bindeglied zwischen der konkreten Menge und der abstrakten symbolischen Notation fungieren. Dies gilt insbesondere auch schon im Hinblick auf die Erarbeitung der schriftlichen Algorithmen der Addition und Subtraktion. Nicht zuletzt lassen sich anhand der Plättchendarstellung in einer Stellenwerttafel einige Übungen durchführen, die für das Verständnis des Stellenwertsystems aufschlussreich sind. Im Folgenden werden einige Beispiele für solche Übungen aufgegriffen.

Bündelungs- und Entbündelungshandlungen

Gegenüber den Mengenhandlungen mit Zehnern und Einern kommt im Zahlraum bis 1000 die Idee der fortgesetzten Bündelung ins Spiel. Dabei sind die Übergänge zwischen den Stellenwerten bzw. Bündelungsstufen die neuralgischen Punkte. Was an diesen Übergängen geschieht, sollte durch passende Fragestellungen in den Blick der Teilnehmer/-innen gerückt werden. Ausgehend von einer Menge von 9 Zehnern und 7 Einern könnte man etwa die folgenden Fragen stellen:

- Wie verändert sich die Menge, wenn man noch 6 Einer hinzufügt?
Wie wird die dann vorhandene Anzahl notiert? Was hat diese Notation mit den vorhandenen 9 Zehnern und 13 Einern zu tun? Warum kann man die Anzahl nicht als 913 (im Sinne von 9 Zehnern und 13 Einern) notieren?

- Welche Anzahl erhält man, wenn man noch 1 Zehner hinzufügt?
Wenn man die Anzahl ohne Stellenwerttafel notiert, steht an der Zehnerstelle eine „0“. Warum ist das so, obwohl doch 10 Zehner vorhanden sind? Was geschieht mit den 10 Zehnern?

Noch deutlicher wird die Notwendigkeit, Bezüge zwischen den verschiedenen Bündelungsstufen herzustellen, wenn man subtraktive Handlungen vollzieht. Beginnt man zum Beispiel mit einer Menge von 2 Hundertern und 3 Einern, ergibt sich die Notwendigkeit zur Entbündelung eines Hunderters aus der Sache heraus:

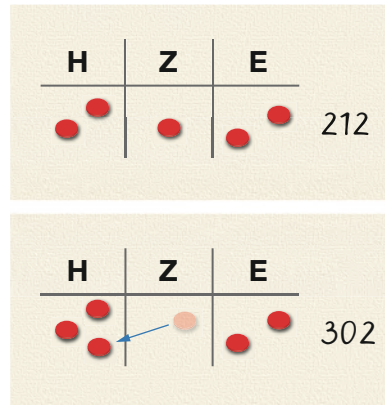
- Wie kann man 1 Zehner von der gegebenen Menge wegnehmen, obwohl doch keine Zehner vorhanden sind?
Wie wird die dann vorhandene Anzahl notiert? Warum sind nach dem Wegnehmen eines Zehners noch Zehner vorhanden, obwohl doch vorher keiner vorhanden war?
- Wie kann man 6 Einer von der gegebenen Menge wegnehmen, obwohl doch nur 3 Einer vorhanden sind?

Systematische Überlegungen mit Plättchen an der Stellenwerttafel

Wie oben bereits angedeutet, lassen sich an der Stellenwerttafel einige systematische Überlegungen anstellen, die dazu beitragen können, das Verständnis des Stellenwertsystems noch einmal zu vertiefen, um verständiger rechnen zu können. So können Sie den Teilnehmern und Teilnehmerinnen zum Beispiel die Aufgabe stellen, alle möglichen Zahlen zu finden, die man mit einem (zwei, drei, ...) Plättchen an der Stellenwerttafel darstellen kann.

H	Z	E	
		● ●	2
	● ●		20
● ●			200
	●	●	11
●		●	101
●	●		110

Notiert man die gefundenen Möglichkeiten und legt die entsprechenden Anzahlen mit Zehner-Systemblöcken, wird durch diese Überlegungen noch einmal die unterschiedliche Bedeutung der Ziffern an den verschiedenen Stellen verdeutlicht: Mit der gleichen Anzahl an Plättchen kann man sehr unterschiedliche Mengen darstellen. Auf eine ähnliche Erkenntnis zielt die Fragestellung ab, wie sich die dargestellte Anzahl verändert, wenn man ein Plättchen zum Beispiel von der Einer- in die Zehner-Spalte oder von der Zehner- in die Hunderter-Spalte verschiebt:



Auch hier werden nochmals die positionsabhängige Gewichtung der Plättchen in der Stellenwerttafel und die entsprechende Gewichtung der Ziffern innerhalb einer Zahl hervorgehoben.

2.3.5 Abschätzen der Größenordnung von Summen und Differenzen

Oftmals ist es aufwändig, Summen oder Differenzen mehrstelliger Zahlen exakt zu bestimmen, wenn man keine technischen Hilfsmittel zur Hand hat – und zum Teil ist es auch unnötig, wenn es auf das exakte Ergebnis gar nicht ankommt. Es reicht dann aus, das Ergebnis näherungsweise zu bestimmen.

Beim Abschätzen der Größenordnung eines Ergebnisses sollte man zwei gegensätzliche Anforderungen im Auge behalten. Zum einen sollte die Überschlagsrechnung möglichst einfach durchzuführen sein. Man wird also versuchen, mit möglichst „glatte Zahlen“ zu rechnen. Zum anderen sollte das Ergebnis der Überschlagsrechnung aber auch nicht zu weit vom tatsächlichen Ergebnis abweichen.

Dabei ergibt sich ein wichtiger Schnittpunkt zwischen der Fähigkeit zur Orientierung im Zahlraum und der Fähigkeit zum verständigen Rechnen. Zum einen ist es für eine sinnvolle Rundung der Zahlen hilfreich, eine gewisse Vorstellung von deren Größenordnungen zu haben. Zum anderen kann aber auch gerade das Abschätzen von Ergebnissen eine Stütze für den Ausbau der Zahlraumvorstellung sein, weil man dazu wiederholt Zahlen miteinander in Beziehung setzen muss.

Um etwa das Ergebnis von $576 + 189$ abzuschätzen, könnte man zum Beispiel 600 und 200 addieren. Um diese Abschätzung als sinnvoll und hilfreich zu erkennen, benötigt man zunächst eine Vorstellung davon, dass 576 (in Relation zur absoluten Größe) „nah bei“ 600 ist und auch 189 „nah bei“ 200. Deshalb macht man mit dieser Rundung keinen allzu großen Fehler. Des Weiteren muss man die „vollen Hunderter“

aber auch als Zahlen erkennen, mit denen sich besonders einfach rechnen lässt. Dieses In-Beziehung-Setzen der Zahlen, um eine sinnvolle Rundung zu erhalten, ist ein Anknüpfungspunkt für die obigen Überlegungen zum Aufbau der Hunderter und des Tausenders.

Nachdem man das Ergebnis der Überschlagsrechnung $600 + 200 = 800$ ermittelt hat, sollte man sich noch überlegen, inwieweit man damit vom tatsächlichen Ergebnis abweicht. Weil man beide Zahlen aufgerundet hat, wird das tatsächliche Ergebnis kleiner sein als 800 und „irgendwo zwischen 750 und 800“ liegen. Im Verhältnis zur Größenordnung von 800 ist eine Unsicherheit von 50 in Ordnung.

Hätte man die Summe von 76 und 89 abschätzen wollen, wäre die analoge Überschlagsrechnung $100 + 100 = 200$ bereits deutlich weniger geeignet, denn „irgendwo zwischen 150 und 200“ ist im Vergleich zur absoluten Größe keine besonders gute Abschätzung. Zum Beispiel $76 + 100$ oder $80 + 80$ würden hier eine deutlich bessere Abschätzung liefern, ohne die Rechnung unnötig kompliziert zu machen.

Es gilt, solche Überlegungen mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen anhand von Beispielen zu systematisieren:

- Wann reicht es aus, ein Ergebnis nur größenordnungsmäßig zu bestimmen?
- Wie exakt sollte das Ergebnis einer Überschlagsrechnung sein?
- Wie verändert sich das Ergebnis durch die Rundung der Zahlen?
- Warum sollte man bei Rechnungen mit mehreren Zahlen nicht alle Zahlen „in die gleiche Richtung“ verändern?
- Diskutieren Sie unterschiedliche Rundungen. Welche Vor- und Nachteile haben die verschiedenen Rundungen?
- Welche Rundungen sind für das Abschätzen von Ergebnissen sinnvoll?

Ein Ziel dabei ist es, aus der Diskussion dieser Überlegungen Kriterien für das sinnvolle Runden abzuleiten. Es geht aber explizit nicht darum, mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen unreflektiert bestimmte Regeln zur Rundung von Zahlen einzuüben. Im Mittelpunkt sollte unseres Erachtens der Ausbau des Gefühls für die Zahlbeziehungen stehen.

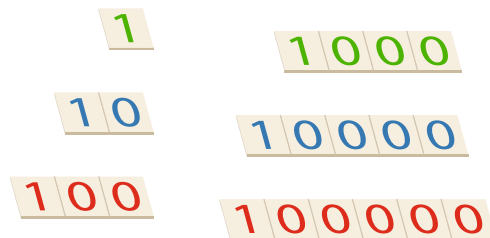
2.3.6 Verständnis beliebig großer Zahlen

Wenn die Teilnehmer/-innen die oben beschriebenen Grundideen verstanden haben, so besitzen sie im Prinzip alle Voraussetzungen, um beliebig große Zahlen verstehen zu können. Im Grunde geht es nur noch darum, den Teilnehmern und Teilnehmerinnen das auch bewusst zu machen.

Fortsetzung der Prinzipien der Zahlnotation und -bezeichnung

Das Prinzip Zehnerbündelung von Mengenelementen setzt sich weiter fort: Zehn Hunderter werden zu einem Tausender gebündelt, zehn Tausender werden zu einem Zehntausender gebündelt, zehn Zehntausender werden zu einem Hunderttausender gebündelt usw. Aus diesem Grund werden auch für die Symbolisierung beliebig großer Anzahlen nur die zehn Ziffern von „0“ bis „9“ benötigt. Jede der neuen Bündelungsstufen wird durch genau einen Stellenwert innerhalb der Zahl symbolisiert. Auf der sprachlichen Ebene gibt es ab Tausend eine neue Struktur bei der Zahlbenennung. Diese Struktur greift die Benennung der Zahlen bis Tausend wieder auf. Die Tausender werden mit einem neuen Zahlwort bedacht. Die nächste Bündelungsstufe wird dann als Zehntausender bezeichnet und die darauf folgende als Hunderttausender. Dieses Muster setzt sich bei der Bezeichnung der weiteren Zahlen fort: Millionen, zehn Millionen, hundert Millionen, Milliarden, zehn Milliarden, aufgrund dieses Zusammenfassens in „Dreierpakete“ mit dem Bezug zu den Bündelungsstufen aus dem Zahlraum bis 1000 spricht man auch von der *überlagerten Tausenderstruktur* der Zahlbenennung.

Diese überlagerte Tausenderstruktur wird durch die Séguin-Montessori-Zahlenkarten aufgegriffen: Einer und Tausender (grün), Zehner und Zehntausender (blau) sowie Hunderter und Hunderttausender (rot) werden jeweils in der gleichen Farbe dargestellt.



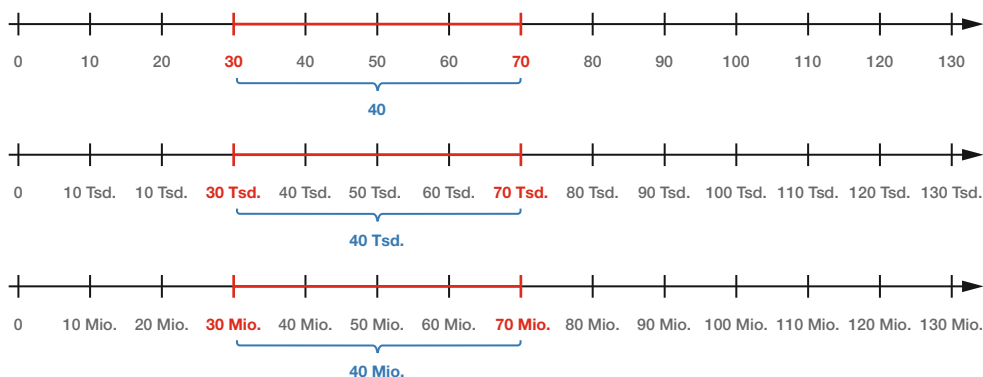
Auch bei der Notation großer Zahlen greift man diese Struktur auf. Um diese besser lesbar zu machen, werden jeweils drei Ziffern durch Punkte zu einem Paket zusammengefasst. Die Punkte geben die Ankerpunkte für die Zahlbenennung vor. Dabei werden die Pakete von links nach rechts benannt. Das Paket mit dem größten Wert wird also zuerst benannt.

12.345.678

„Zwölf-Millionen – dreihundert-fünf-und-vierzig-Tausend – sechs-hundert-acht-und-siebzig“.

Orientierung in großen Zahlräumen

Bei großen Zahlen wie zum Beispiel 70.000 oder 70 Mio. versagt die Vorstellung einer konkreten Menge als Orientierungshilfe vollständig. Die überlagerte Tausenderstruktur des Dezimalsystems erlaubt es aber, die bisher erarbeiteten Zahlraumvorstellungen auch für die Orientierung in größeren Zahlräumen zu nutzen. Die Struktur des Zahlraums bis 1000 spiegelt sich in jedem weiteren „Dreierblock“ wider. Wer zum Beispiel eine Vorstellung von den Beziehungen zwischen 30 und 70 hat, der hat auch eine Möglichkeit, sich ein Bild von den Größenverhältnissen von 30 Tsd. und 70 Tsd. oder 30 Mio. und 70 Mio. zu machen.



Ein spielerischer Zugang

Ein Zugang, um den Umgang mit großen Zahlen zu routinisieren, kann zum Beispiel über ein einfaches Spiel wie „hohe bzw. niedrige Hausnummern“ erfolgen. Dazu ziehen die Teilnehmer/-innen entweder Ziffernkärtchen aus einem Topf oder würfeln mit einem Würfel. Die entsprechenden Ziffern tragen sie in eine Stellenwerttafel ein, die zum Beispiel Werte von Einern bis zu Millionen hat. Das Ziel ist es, mit den Ziffern eine möglichst hohe bzw. niedrige Zahl zu erzeugen. Am Ende ergibt sich auf natürliche Weise ein Anlass, die entstandenen Zahlen zu lesen. Wer mit seinen Ziffern die kleinste Zahl erzeugt hat, übernimmt im Anschluss an die Kurssitzung die erste Runde in der Kneipe ...

2.4 Schriftliche Addition und Subtraktion

2.4.1 Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen verstehen, wie und warum das Verfahren der schriftlichen Addition und das Entbündelungsverfahren der schriftlichen Subtraktion funktionieren.

2.4.2 Die schriftliche Addition und Subtraktion als Rettungsanker?

In der Schule ist es oftmals so, dass mit der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren der Addition und Subtraktion (im Weiteren nur: „die schriftlichen Verfahren“) in der dritten Klasse scheinbar eine deutliche Abschwächung der Probleme von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (KbSR) einhergeht. Auf einmal produzieren auch diese Kinder viele richtige Ergebnisse bei der Addition und Subtraktion mehrstelliger Zahlen, obwohl die Aufgaben, die sie bearbeiten, scheinbar viel schwieriger sind als die, die sie zuvor erfolglos bearbeitet haben. Für diese Kinder haben die damit verbundenen Erfolgserlebnisse einen spürbaren Entlastungseffekt. Diese Erfolgserlebnisse führen häufig dazu, dass die Kinder nun sämtliche Aufgaben mithilfe der schriftlichen Rechenverfahren lösen, ohne darauf zu achten, ob sie nicht auch anders einfacher zu lösen wären. Manche Kinder stellen sich sogar beim Kopfrechnen ein Abbild der Notation der schriftlichen Verfahren vor.

Wie kommt es zu diesen plötzlichen Erfolgen? Zum einen basieren die schriftlichen Rechenverfahren auf Algorithmen, also auf einer fest vorgegebenen Abfolge von Schritten, die mit Sicherheit zum richtigen Ergebnis führen, wenn sie korrekt ausgeführt werden. Um den Algorithmus ausführen zu können, muss man nicht verstanden haben, *warum* er zum richtigen Ergebnis führt und *warum* die Schritte in einer bestimmten Reihenfolge ausgeführt werden. Man muss lediglich das Verfahren abarbeiten und sich dabei an die vorgegebenen Schreibfiguren halten. Zum anderen sind die Algorithmen so angelegt, dass sich die Rechenanforderungen bei den einzelnen Schritten auf das kleine Einspluseins bzw. kleine Einsminuseins beschränken. Es werden stets nur die Zahlen auf den entsprechenden Stellenwerten miteinander verrechnet. Diese Rechenanforderungen können von den Kindern daher auch zählend bewältigt werden.

Um zum Beispiel 247 und 185 mithilfe des schriftlichen Algorithmus zu addieren, müssen folgende Schritte ausgeführt werden:

- Schreibe die beiden Zahlen stellengerecht untereinander.
- Beginne ganz rechts mit der Addition.
- $5 + 7 = 12$
- Schreibe die 2 unter die 7. Schreibe eine kleine 1 zu der 8 der 185.
- $1 + 8 + 4 = 13$
- Schreibe die 3 unter die 8. Schreibe eine kleine 1 zu der 1 der 185.
- $1 + 1 + 2 = 4$
- Schreibe die 4 unter die 1 der 185.

$$\begin{array}{r}
 247 \\
 + 185 \\
 \hline
 1 \quad 1 \\
 432
 \end{array}$$

Was die „kleinen Einsen“ bedeuten und warum sie an die entsprechenden Stellen geschrieben werden, muss man ebenso wenig verstanden haben wie die Begründung dafür, dass man „von rechts“ beginnt, die Zahlen zu addieren.

Das *unverstandene* Abarbeiten der Verfahren führt dazu, dass viele der Teilnehmer/-innen mittlerweile vergessen haben, wie die Verfahren auszuführen sind. Andere konnten die Verfahren nie korrekt ausführen, weil sie unverstandene Verfahren nicht routinisieren konnten. Manche werden vielleicht nur die Addition, nicht aber die Subtraktion beherrschen.

Haben die Teilnehmer/-innen die schriftlichen Rechenverfahren nicht auf der inhaltlichen Ebene verstanden, sondern lediglich als eine Prozedur kennengelernt, die es abzuarbeiten gilt, so werden sie auch nicht in der Lage sein, Fehler innerhalb dieser Prozedur zu finden und zu korrigieren. Wenn die Teilnehmer/-innen mit der schriftlichen Addition und Subtraktion keine Vorstellungen auf der inhaltlichen Ebene verbinden, werden Fehler oftmals auch dann unbemerkt bleiben, wenn der Algorithmus Ergebnisse liefert, die offensichtlich falsch sein müssen.

Im Kurs geht es darum, in eine emanzipierte Position gegenüber den Verfahren zu kommen, also zu erfahren, dass man in der Lage ist zu verstehen, wie und warum das Verfahren funktioniert. Wie tief die Teilnehmer/-innen die eigenen technischen Fertigkeiten im Ausführen des Verfahrens entwickeln möchten, sollte ihrer jeweiligen Motivlage angepasst sein. Der Kurs hat das Ziel, dass die Teilnehmer/-innen verständig rechnen und eine praktisch brauchbare Orientierung in den Zahlen haben, um mit Quantitäten und Maßen sicher umgehen zu lernen. Es geht darum, ihr rechnerisches Verstehen so weit zu entwickeln, dass sie den Taschenrechner verständig benutzen können. In diesem Sinne hat die Diskussion der schriftlichen Verfahren im Kurs eine Hilfsfunktion zur Vertiefung von verständigem Rechnen. Die Teilnehmer/-innen sind daran früher gescheitert, und wir gehen mit ihnen den Weg entlang des Verstehens der Stellenwertzusammenhänge. Diese Zusammenhänge werden in einer neuen Qualität deutlich, wenn man die schriftlichen Verfahren *in ihrem Bezug zum Stellenwertsystem* versteht. Dieses Verstehen vertieft ihre Fähigkeit zu überschlagendem Rechnen und zur Einschätzung, ob sie in einer konkreten Situation eher im Kopf, mit gestütztem Kopfrechnen oder mit dem Taschenrechner rechnen sollten. Das elaborierte technische Ausführen der schriftlichen Verfahren ist hingegen kein Kursziel.

2.4.3 Die Normalverfahren der schriftlichen Addition und Subtraktion

Schriftliche Addition

Für die schriftliche Addition wird in Deutschland im Wesentlichen nur ein Verfahren verwendet. Die Summanden werden stellengerecht untereinander geschrieben. Die Addition beginnt bei den Einern und wird dann sukzessive bei den höheren Stellenwerten fortgesetzt. Wird bei der Addition innerhalb eines Stellenwertes neun überschritten, so wird am unteren Rand der nächsten Spalte ein Übertrag notiert (s. o).

Vergleicht man das Vorgehen bei der schriftlichen Addition mit der (Kopf-)Rechenstrategie „Stellenwerte extra“, stellt man fest, dass beide viele Gemeinsamkeiten aufweisen.

$$\begin{array}{r} 247 + 185 = 432 \\ 200 + 100 = 300 \\ 40 + 80 = 120 \\ 7 + 5 = 12 \end{array}$$

Schriftliche Subtraktion

Für die schriftliche Subtraktion gibt es im Gegensatz zur Addition verschiedene Verfahren, die sich inhaltlich stark unterscheiden. Diese Unterschiede ergeben sich zum einen durch die Art, wie die Differenz der einzelnen Stellenwerte ermittelt wird, und zum anderen durch den Umgang mit notwendigen Überträgen, wenn die Ziffer im Minuenden kleiner ist als im Subtrahenden. Die Verfahren werden hier dargestellt, damit Sie die eventuell unterschiedlichen Lösungswege der Teilnehmer/-innen besser nachvollziehen und miteinander in Beziehung setzen können.

Bestimmung der Differenz

Die Differenzen in den Teilrechnungen können sowohl abziehend als auch ergänzend ermittelt werden. Während die Schreibweise für beide Sichtweisen gleich ist, gibt es auf der gedanklichen Ebene deutliche Unterschiede.

654

- 123

531

- Denkweise beim Abziehen:

 - 4E minus 3E ist 1E
 - 5Z minus 2Z sind 3Z
 - 6H minus 1H sind 5H
- Denkweise beim Ergänzen:

 - 3E plus 1E sind 4E
 - 2Z plus 3Z sind 5Z
 - 1H plus 5H sind 6Z

Umgang mit Überträgen

Ist mindestens eine der Ziffern im Minuenden kleiner als im Subtrahenden, so reicht es nicht mehr aus, die Stellenwerte getrennt zu betrachten. Es müssen Beziehungen zwischen den Stellenwerten hergestellt werden. Dabei gibt es im Wesentlichen drei Möglichkeiten, diese Beziehungen herzustellen: das Entbündeln, das gleichsinnige Verändern (auch als Erweitern bezeichnet) und das Auffüllen.

Entbündeln und Erweitern lassen sich sowohl mit dem Abziehen als auch mit dem Ergänzen kombinieren. Das Auffüllen hingegen lässt sich nur ergänzend denken.

Im Folgenden werden die Denkweisen des Entbündelns, Erweiterns und Auffüllens jeweils am Beispiel der Aufgabe 527 – 132 erläutert. Dabei wird für das Entbündeln und Erweitern eine abziehende Sichtweise eingenommen. Die ergänzende Sichtweise ergibt sich entsprechend.

Abziehen mit Entbündeln

- „Wenn ich von 7 E(inern) 2E abziehe, bleiben 5E übrig.“
- „Von 2 Z(ehnern) kann ich nicht 3Z abziehen. Ich entbündele einen der H(underter) zu 10 Zehnern. Dann habe ich insgesamt 12Z. Es bleiben 4H übrig“
- „Von den 12Z ziehe ich 3Z ab. Es bleiben 9Z übrig.“
- „Von den verbleibenden 4H ziehe ich 1H ab. Es bleiben 3H übrig.“

410

~~5~~27

- 132

395

Beim Entbündeln wird also lediglich der Minuend umgeformt. Um alle Teilrechnungen durchführen zu können, wird falls nötig ein größerer Stellenwert in den nächstkleineren entbündelt. Auf der Mengenebene reproduzieren sich also genau die Handlungen, die die Teilnehmer/-innen schon bei der Erarbeitung des Verständnisses des Stellenwertsystems und bei früheren Subtraktionshandlungen vollzogen haben.

Abziehen mit Erweitern

- „Wenn ich von 7E 2E abziehe, bleiben 5E übrig.“
- „Von 2Z kann ich nicht 3Z abziehen. Ich erweitere den Minuenden mit 10Z und den Subtrahenden mit 1H. Damit bleibt die Differenz unverändert.“
- „Im Minuenden habe ich dann 12Z.“
- „Von den 12Z ziehe ich 3Z ab. Es bleiben 9Z übrig.“
- „Von den 5H ziehe ich insgesamt 2H ab: 1H des ursprünglichen Subtrahenden und den 1H, um den ich den Subtrahenden erweitert habe. Es bleiben 3H übrig.“

$$\begin{array}{r} 10 \\ 5 \quad 2 \quad 7 \\ - 1 \quad 3 \quad 2 \\ \hline 1 \\ 3 \quad 9 \quad 5 \end{array}$$

Beim Erweitern werden sowohl Minuend als auch Subtrahend verändert. Bei beiden wird die gleiche Anzahl hinzugefügt – allerdings jeweils in anders gebündelter Form. Beim Minuenden werden zum Beispiel 10Z ergänzt und im Subtrahenden 1H. Die Differenz ändert sich durch dieses gleichsinnige Verändern nicht. Diese Tatsache wird auch als *Gesetz von der Konstanz der Differenz* bezeichnet. Durch die Veränderung der Zahlen geht der Bezug zur ursprünglichen Aufgabe ein Stück weit verloren. In der Beispielaufgabe wird aufgrund der gleichsinnigen Veränderung von Minuend und Subtrahend nicht mehr 132 von 527 abgezogen, sondern 232 von 627.

Es gibt also drei Hürden beim Verständnis des Erweiterungsverfahrens: Zum einen muss verstanden werden, dass sich die Differenz zweier (An-)Zahlen nicht ändert, wenn jeweils die gleiche (An-)Zahl hinzugefügt wird. Zum anderen muss verstanden werden, dass diese (An-)Zahl auch in anders gebündelter Form addiert werden kann und muss. Und zuletzt muss der Bezug zwischen der neu entstandenen Aufgabe und der ursprünglichen hergestellt werden.

In der maximal verkürzten Schreibweise werden lediglich die Veränderungen im Subtrahenden notiert. Die Ergänzungen im Minuenden werden lediglich in Gedanken durchgeführt.

$$\begin{array}{r} 5 \quad 2 \quad 7 \\ - 1 \quad 3 \quad 2 \\ \hline 1 \\ 3 \quad 9 \quad 5 \end{array}$$

Auffüllen

Die Notation beim Auffüllverfahren entspricht der maximal verkürzten Notation beim Erweitern. Trotzdem ist die zugrunde liegende Idee eine deutlich andere.

- „Ich fülle die 132 so lange mit Einern auf, bis ich so viele Einer habe wie im Minuenden. Dafür benötige ich 5E und habe den Minuenden auf 137 aufgefüllt.“
- „Anschließend fülle ich die 137 mit 7Z bis zum nächsten Hunderter auf. Die Überschreitung des Hunderters markiere ich, indem ich den Hunderter im Subtrahenden um 1 erhöhe. Ich habe jetzt bis 207 aufgefüllt.“
- „Um auf die 2 Zehner der 527 zu kommen, benötige ich dann noch 2Z. Insgesamt habe ich der 137 also 9Z hinzugefügt und bin nun bei 227.“
- „Der 227 füge ich 3H hinzu und bin bei 527.“

Beim Auffüllverfahren wird also der Subtrahend beginnend bei den Einern stellenweise so lange aufgefüllt, bis der Wert des Minuenden an diesem Stellenwert erreicht ist. Die Differenz ergibt sich beim Auffüllverfahren also durch die Zahl, die dem Subtrahenden hinzugefügt werden muss, um den Minuenden zu erreichen. Die Idee im Hintergrund ist also ein Auffüllen des Subtrahenden bzw. ein Zahl- bzw. Mengenvergleich.

Die Notation beim Auffüllverfahren entspricht der maximal verkürzten Notation beim Erweitern. Trotzdem ist die zugrunde liegende Idee eine deutlich andere.

Entscheidung für ein Subtraktionsverfahren

Bis vor wenigen Jahren war in Deutschland durch Beschlüsse der Kultusminister-Konferenz (KMK 1958 und 1976) in der Schule das Ergänzen als Verfahren der Differenzbestimmung vorgeschrieben. Für den Zehnerübergang war die Technik des Erweiterns oder des Auffüllens vorgeschrieben. Hintergrund dieser Entscheidung war eine Untersuchung von Johnson, in der festgestellt wurde, dass diese beiden Verfahren den anderen hinsichtlich der Schnelligkeit und Fehlerhäufigkeit überlegen seien. Vor der Verbreitung von Taschenrechnern waren dies die entscheidenden Kriterien. Es gab in der Arbeitswelt eine Nachfrage nach Arbeitskräften, die schnell und sicher in der Lage waren, Zahlen zu addieren und zu subtrahieren.

Die Untersuchung von Johnson bezog sich allerdings auf eine stark drillorientierte Einführung der Rechentechniken, wie sie in den USA üblich war. In differenzierteren Untersuchungen, in denen (auch) Klassen untersucht wurden, in denen die Verfahren verständnisorientiert eingeführt wurden, konnten die Ergebnisse von Johnson hinsichtlich Fehleranfälligkeit und Schnelligkeit nicht bestätigt werden. Was sich allerdings zeigte, war eine deutliche Überlegenheit des Entbündelungsverfahrens hinsichtlich des Verständnisses des Verfahrens und seiner Übertragbarkeit auf noch unbekannte Aufgabentypen (vgl. Padberg 1994, S. 30–34).

Mittlerweile ist von Seiten der KMK freigestellt, welches Verfahren der schriftlichen Subtraktion im Unterricht verwendet wird, weshalb Sie bei den Teilnehmern und Teilnehmerinnen unterschiedliche Verfahren und Notationsweisen vorfinden können. In der fachdidaktischen Diskussion zeigt sich jedoch eine deutliche Tendenz zum Verfahren des Abziehens mit Entbündeln. Auch in den aktuellen Schulbüchern ist dieses Verfahren mittlerweile das am weitesten verbreitete. Einige der Argumente werden im Folgenden näher beleuchtet. Eine ausführliche Gegenüberstellung der verschiedenen Verfahren der schriftlichen Subtraktion findet sich zum Beispiel bei Padberg & Benz (2011, S. 237–252).

In diesem Kurs geht es darum, das Verfahren als verstehbar erlebbar zu machen. Deshalb empfehlen wir die Behandlung des Entbündelungsverfahrens. Wir empfehlen es in Verbindung mit der subtraktiven Denkweise, denn diese ist eng an die Subtraktionshandlungen angelehnt, die im Kurs bisher dominant waren: Es geht auf der inhaltlichen Ebene um die Extraktion einer Teilmenge aus einer Gesamtmenge – und genau das spiegelt sich auch beim Abziehen mit Entbündeln wider.

Des Weiteren greift das Entbündelungsverfahren auf der Mengenebene die Handlungen auf, die bei der Erarbeitung des Verständnisses mehrstelliger Zahlen durchgeführt wurden. Die notwendigen Mengenhandlungen ergeben sich beim Entbündelungsverfahren vollkommen ungezwungen. Demgegenüber sind die Mengenhandlungen, die nötig sind, um die anderen schriftlichen Subtraktionsverfahren nachzuvollziehen, deutlich schwieriger zu verstehen.

Diese Argumente überwiegen deutlich die Nachteile, die sich in der praktischen Anwendung des Entbündelungsverfahrens ergeben können. Zum einen kann das Entbündelungsverfahren vergleichsweise schreibaufwändig und unübersichtlich werden, wenn im Minuenden viele Nullen vorkommen oder wenn mehrere Entbündelungen vorgenommen werden müssen. Zum anderen sind Subtraktionen mit mehreren Subtrahenden unter Umständen schwerer durchzuführen als mit den anderen Verfahren.

2.4.4 Inhaltliche Begründungen der schriftlichen Rechenverfahren

Anbindung an die Mengenebene

Für die Erarbeitung eines inhaltlichen Verständnisses der schriftlichen Rechenverfahren ist eine Anbindung des Vorgehens an die Mengenebene unabdingbar. Dafür eignet sich im Prinzip jedes Material mit einer Zehnerstruktur, insbesondere jedoch solche, bei denen die Bündelungsstufen nur durch einen Umtausch ineinander überführt werden können. Dies ist zum Beispiel bei den bereits vorn gezeigten Zehner-Systemblöcken der Fall. Auch Geld kann in diesem Sinne verwendet werden, wenn nur 1 €-Münzen sowie 10 €- und 100 €-Scheine zur Verfügung gestellt werden. Die Einschränkung auf diese Werte mag aber auf die Kursteilnehmer/-innen künstlich wirken.

Die Arbeit mit einer Plättchendarstellung in der Stellenwerttafel kann zum einen als Bindeglied zwischen der konkreten Mengenhandlung und der abstrakten symbolischen Notation fungieren. Zum anderen erlaubt die Verwendung der Stellenwerttafel auch bei großen Zahlen noch eine Anbindung an eine halbkongkrete Darstellung.

Die schriftliche Addition

Berechnet man zum Beispiel die Summe von 256 und 328 mithilfe der schriftlichen Addition und führt parallel zu den Schritten des schriftlichen Algorithmus die entsprechenden Mengenhandlungen mit Zehner-Systemblöcken oder mit Plättchen an der Stellenwerttafel aus, so wird die Bedeutung der Notation unmittelbar einsichtig.

In einem ersten Zugriff kann es dabei hilfreich sein, die Stellenwerte der einzelnen Ziffern explizit kenntlich zu machen, um die Analogien zwischen den Teilrechnungen und den Handlungen auf der Mengenebene noch deutlicher hervortreten zu lassen.

H	Z	E
••	•••••	•••••
••	••	•••••

H	Z	E
••	•••••	•••••
••	••	•••••

H	Z	E
••	•••••	•••••
••	••	•••••

H	Z	E
••	•••••	•••••
••	••	•••••

H	Z	E
•••••	•••••	•••••
•••••	•••••	•••••

H	Z	E
2	5	6
+	3	2
8		

8 E + 6 E = 14 E

H	Z	E
2	5	6
+	3	2
8		

Umbündeln von 10 E zu 1 Z

H	Z	E
2	5	6
+	3	2
4		

1 Z + 2 Z + 5 Z = 8 Z

H	Z	E
2	5	6
+	3	2
8 4		

H	Z	E
2	5	6
+	3	2
5 8 4		

Zur weiteren Anbindung an bereits Bekanntes können Sie auch die enge Verbindung der schriftlichen Addition zur Strategie „Stellenwerte extra“ herausstellen.

Die schriftliche Subtraktion

Ebenso wie bei der schriftlichen Addition erschließt sich auch die Logik der schriftlichen Subtraktion relativ ungezwungen aus den entsprechenden Mengenhandlungen bzw. den Handlungen an der Stellenwerttafel, wenn man das Verfahren des Entbündelns mit Abziehen verwendet. Auch hier könnte man die Stellenwerte zunächst explizit kenntlich machen.

Verbleibende Mengenelemente



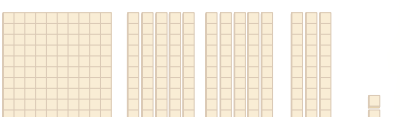
Weggenommene Mengenelemente





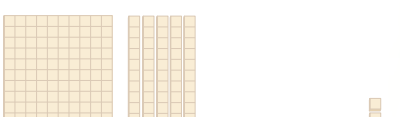
$$\begin{array}{r} 236 \\ - 184 \\ \hline 2 \end{array}$$

$6\text{ E} - 4\text{ E} = 2\text{ E}$



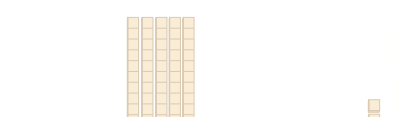
$$\begin{array}{r} 236 \\ - 184 \\ \hline 2 \end{array}$$

Entbündeln von 1 H, um die 8 Z abziehen zu können.



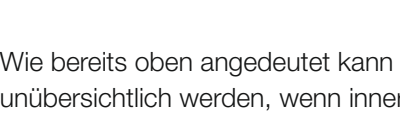
$$\begin{array}{r} 236 \\ - 184 \\ \hline 2 \end{array}$$

$13\text{ Z} - 8\text{ Z} = 5\text{ Z}$



$$\begin{array}{r} 236 \\ - 184 \\ \hline 52 \end{array}$$

$1\text{ H} - 1\text{ H} = 0\text{ H}$



$$\begin{array}{r} 236 \\ - 184 \\ \hline 52 \end{array}$$

Wie bereits oben angedeutet kann die Notation des Entbündelungsverfahrens recht unübersichtlich werden, wenn innerhalb einer Subtraktion mehrere Entbündelungen vorgenommen werden müssen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Notation des Entbündelungsverfahrens zu verkürzen, was das Problem der Unübersichtlichkeit ein wenig abschwächt. So kann man zum Beispiel nur die Einheiten, die entbündelt wurden, markieren und die 10 Einheiten, in die entbündelt wurde, nur in Gedanken berücksichtigen.

Ausführliche Schreibweise:

$$\begin{array}{r} 4 \quad 10 \quad 10 \\ \cancel{5} \quad \cancel{3} \quad 1 \\ - 1 \quad 5 \quad 7 \\ \hline 3 \quad 7 \quad 4 \end{array}$$

Verkürzte Schreibweise:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 5 \quad 3 \quad 1 \\ - 1 \quad 5 \quad 7 \\ \hline 3 \quad 7 \quad 4 \end{array}$$

Allerdings geht mit einer Verkürzung der Notation auch immer ein gewisser Informationsverlust einher. Es wird weniger transparent, was eigentlich geschieht. Inwieweit Sie im Kurs zu einer Verkürzung der Notation übergehen wollen, sollten Sie davon abhängig machen, welche Rückmeldungen Sie von Ihren Teilnehmern und Teilnehmerinnen bekommen.

Warum beginnt man mit dem kleinsten Stellenwert?

Intuitiv scheint es sinnvoller zu sein, bei seinen Rechnungen mit dem größten Stellenwert zu beginnen. Auf diese Weise erreicht man schon im ersten Rechenschritt die ungefähre Größe des Ergebnisses. Beim Kopfrechnen oder gestützten Kopfrechnen geht man oftmals auf diese Weise vor. Demgegenüber ist für die Verfahren der schriftlichen Addition und Subtraktion charakteristisch, dass mit dem kleinsten Stellenwert begonnen wird. Dies geschieht nicht willkürlich, sondern aus Gründen der Praktikabilität bei Rechnungen mit Stellenwertübergang. Würde man zum Beispiel bei der schriftlichen Addition $247 + 185$ mit den Hundertern beginnen, so müsste man das Ergebnis dieser Teilrechnung nochmals korrigieren, nachdem man die Zehner addiert hat, weil zehn der insgesamt zwölf Zehner zu einem weiteren Hunderter gebündelt werden können. Ein entsprechendes Problem würde bei der Berechnung der Zehner auftreten. Beginnt man mit den Einern, ergeben sich diese Probleme nicht, da die neu gebündelten Einheiten bei den Teilrechnungen direkt berücksichtigt werden können.

Ähnlich verhält es sich bei der schriftlichen Subtraktion. Würde man zum Beispiel bei der Aufgabe $527 - 132$ mit der Berechnung der Hunderter beginnen, so müsste man dieses Teilergebnis korrigieren, wenn man zu den Zehnern kommt, weil einer der übrigen Hunderter entbündelt werden muss.

Die Einsicht, aus welchem Grund man beim kleinsten Stellenwert beginnt, sollten Sie den Teilnehmern und Teilnehmerinnen nicht vorenthalten. Lassen Sie die Teilnehmer/-innen eine Aufgabe mit Stellenwertübergang beginnend beim größten Stellenwert berechnen. Erst durch die Probleme, die sich bei dieser Kontrastierung ergeben, wird deutlich, warum der Beginn bei den Einern wesentlich effektiver ist.

Die schriftlichen Algorithmen als mächtiges Werkzeug erleben

Mit den schriftlichen Rechenverfahren haben die Teilnehmer/-innen mächtige Werkzeuge an der Hand, mit denen sie Zahlen beliebiger Größe addieren und subtrahieren können. Diese Erfahrung der eigenen Kompetenz sollten Sie den Teilnehmern und Teilnehmerinnen nicht vorenthalten. Stellen Sie ihnen Aufgaben mit wirklich großen Zahlen. In der Praxis wird man solche Rechnungen kaum durchführen müssen, aber es ist eine erleichternde Erfahrung, dass auch solche „Ungetüme“ ein wenig von ihrem Schrecken verlieren, wenn man die passenden Werkzeuge an der Hand hat, um sie zu bändigen.

2.5 Multiplikation

2.5.1 Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen verstehen die Multiplikation im Sinne einer wiederholten Addition.
- Die Teilnehmer/-innen haben die Ergebnisse der Kernaufgaben des kleinen Einmaleins gedächtnismäßig verfügbar. Die Ergebnisse der restlichen Aufgaben des kleinen Einmaleins können sie aus den Kernaufgaben sicher im Kopf ableiten.

- Die Teilnehmer/-innen können – zumindest dem Prinzip nach – Multiplikationsaufgaben mit einem mehrstelligen Faktor durch stellenwertgerechte Zerlegung in mehrere Teilaufgaben lösen.

2.5.2 Operationslogiken der Multiplikation

Ähnlich wie bei der Addition und Subtraktion lassen sich mithilfe eines einzigen Multiplikationsterms sehr unterschiedliche Situationen abbilden. Andersherum betrachtet kann ein einzelner Multiplikationsterm hinsichtlich der Situation, die er beschreibt, sehr unterschiedlich gedeutet werden. Die Fülle an unterschiedlichen Situationen ist dabei bei der Multiplikation bedeutend größer als bei der Addition und Subtraktion.

So lässt sich zum Beispiel die Anzahl der Wasserflaschen in einer Kiste mit vier Reihen à fünf Flaschen ebenso durch den Term $4 \cdot 5$ beschreiben wie die Anzahl der Augen auf vier Würfeln, die jeweils eine fünf zeigen, oder die Summe, die für ein Geschenk zur Verfügung steht, wenn von vier Personen jeweils fünf Euro eingesammelt werden. Aber auch der Flächeninhalt eines vier Meter langen und fünf Meter breiten Teppichs oder die Anzahl der Möglichkeiten, vier verschiedene Krawatten mit fünf verschiedenen Hemden zu kombinieren, wird durch den Term $4 \cdot 5$ beschrieben. (*Eine umfassende Übersicht von multiplikativen Sachsituationen findet sich bei Gerster & Schultz 2004, S. 389.*)

In den ersten drei Situationen geht es um die *Vervielfachung* einer Menge bzw. Größe. Die Multiplikation kann hier als wiederholte Addition gleicher Summanden aufgefasst werden:

- In den vier Reihen sind $5 + 5 + 5 + 5$ Flaschen vorhanden.
- Es sind $5 + 5 + 5 + 5$ Augen auf den Würfeln.
- Es stehen $5\text{€} + 5\text{€} + 5\text{€} + 5\text{€}$ zur Verfügung.

Die Vervielfachung ist also eine Vereinigung mehrerer gleichmächtiger Mengen. Dabei wurde die „4“ jeweils als „Multiplikator“ gedeutet und die „5“ als „Multiplikand“. Die „4“ gibt also an, wie viele Teilmengen vorhanden sind, und die „5“ gibt an, wie groß diese Mengen jeweils sind. Dass im Term $4 \cdot 5$ der erste Faktor als Multiplikand und der zweite Faktor als Multiplikator gedeutet wird, ist lediglich eine Konvention. Man könnte ebenso gut die zu vervielfachende Menge als ersten Faktor setzen und den Vervielfacher als zweiten.

Im vierten Beispiel werden Maßeinheiten *miteinander* multipliziert. Die Interpretation der Multiplikation als wiederholte Addition scheint hier genauso zu versagen wie beim letzten Beispiel, bei dem Anzahlen miteinander multipliziert werden. Es geht hier eben nicht um $5\text{ m} + 5\text{ m} + 5\text{ m} + 5\text{ m}$ bzw. $5 + 5 + 5 + 5$ Hemden. Allerdings lassen sich diese Situationen *indirekt* doch im Sinne der mehrfachen Addition deuten: Der Teppich lässt sich deuten als 4 Streifen mit je 5 m Länge und 1 m Breite. In diesem Sinne liegen $(5\text{ m} \cdot 1\text{ m}) + (5\text{ m} \cdot 1\text{ m}) + (5\text{ m} \cdot 1\text{ m}) + (5\text{ m} \cdot 1\text{ m})$ vor, also $5\text{ m}^2 + 5\text{ m}^2 + 5\text{ m}^2 + 5\text{ m}^2$, also 20 m^2 . Das Kombinationsbeispiel lässt sich so deuten: Krawatte 1 lässt sich mit 5 Hemden kombinieren, Krawatte 2 lässt sich mit 5 Hemden kombinieren, Krawatte 3 lässt sich mit 5 Hemden kombinieren und Krawatte 4 lässt sich mit 5 Hemden kombinieren, also ergeben sich $5 + 5 + 5 + 5$ Kombinationsmöglichkeiten.

2.5.3 Operationsverständnis der Multiplikation

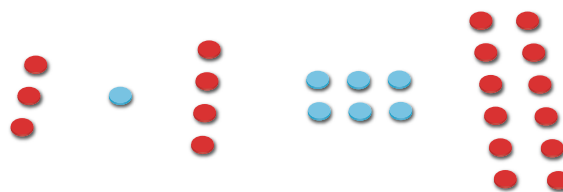
Wie bereits im *DVV-Rahmencurriculum Rechnen Stufe 1* dargestellt, lässt sich Operationsverständnis auffassen als die Fähigkeit, Verbindungen herzustellen zwischen:

- (verbal beschriebenen) konkreten Sachsituationen
- modell- oder bildhaften Darstellungen von Quantitäten oder Beziehungen
- symbolischen Schreibweisen für die zugrunde liegenden Quantitäten und Rechenoperationen

Man nennt diese Verbindungen auch „intermodalen Transfer“ zwischen den Darstellungsebenen. Gerster & Schultz (2004, S. 387 f.) sprechen anschaulich von drei verschiedenen „Sprachen“, zwischen denen übersetzt werden muss. Man sieht, dass sich diese Sicht auf das Operationsverständnis leicht in konkrete Anforderungen übersetzen lässt – man kann testen, ob jemand in der Lage ist, zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen hin und her zu übersetzen.

Die Auffassung des Operationsverständnisses als Fähigkeit zum Wechsel zwischen den Modalitäten verbleibt auf einer eher technischen Ebene. Ob jemand tatsächlich verstanden hat, was Multiplizieren bedeutet, zeigt sich in der Fähigkeit zum intermodalen Transfer nur indirekt. Wir schlagen daher eine weniger technisch orientierte Sicht auf den Begriff des Operationsverständnisses vor. Es gilt zu verstehen, welche Frage(n) die Multiplikation an Zahlen, Mengen und Größen stellt und auf welche Weise die Multiplikation diese Fragen beantwortet.

Bei der Multiplikation $3 \cdot 4$ ist eine dieser Fragen zum Beispiel, wie viele Mengenelemente man insgesamt hat, wenn man drei Mengen mit jeweils vier Elementen zusammenfügt. Im Jenaer Rechentest (JRT) wird das Operationsverständnis der Multiplikation mit folgender Frage überprüft: „Stell dir vor, du bist der Lehrer und erklärst, was mit $3 \cdot 4 = 12$ gemeint ist. Erkläre das mithilfe der Würfel.“ Vor dem Probanden liegen dabei Würfel oder Plättchen, mit denen er arbeiten soll. Wer nicht verstanden hat, was die Multiplikation inhaltlich bedeutet, legt zur Erklärung der Bedeutung von $3 \cdot 4 = 12$ vielleicht etwas wie:



Falls keine Mengehandlung mit den Würfeln erfolgt, wird weitergefragt: „Kannst du eine Rechengeschichte erzählen, die zur Aufgabe $3 \cdot 4 = 12$ passt?“ Hier zeigt sich zum einen, ob für den Teilnehmer und die Teilnehmerin mit der Multiplikation außerhalb der Zahlebene eine inhaltliche Vorstellung verknüpft ist. Zum anderen wird deutlich, ob es diesen Teilnehmern und Teilnehmerinnen möglich ist, multiplikative Situationen, die ihnen in ihrer Umwelt begegnen, mithilfe der Mathematik zu modellieren.

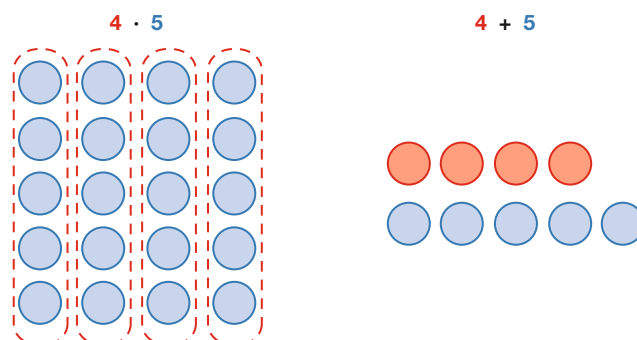
Was bedeutet „Malrechnen“ für die Teilnehmer/-innen, wenn sie die Multiplikation nicht im oben erläuterten Sinne verstehen? Vielleicht ist es für manche der Teilnehmer/-innen eine besondere Art zu zählen, bei der man manche Zahlen auslassen muss. $4 \cdot 5$ ist für diese Teilnehmer/-innen dann die Aufforderung, beim Zählen nur jede fünfte Zahl laut zu nennen. Die vierte Zahl, die sie laut genannt haben, ist das Ergebnis von $4 \cdot 5$. Manche der Teilnehmer/-innen werden mit dem Multiplizieren vor allem das Auswendiglernen der Zahlreihen des kleinen Einmaleins verbinden. Viele werden diese Reihen in der Schule auswendig gelernt haben – oder es zumindest versucht haben – ohne zu verstehen, was es damit auf sich hat. Ohne ein inhaltliches Verständnis werden diese Zahlwortketten allerdings auch schnell wieder in Vergessenheit geraten sein.

Das erste Ziel der Auseinandersetzung mit der Multiplikation im Kurs muss es daher sein, bei den Teilnehmern und Teilnehmerinnen ein adäquates Operationsverständnis aufzubauen.

2.5.4 Die wiederholte Addition als grundlegendes Operationsverständnis

Aus zwei Gründen liegt es nahe, den Zugang zur Multiplikation über die wiederholte Addition gleicher Summanden herzustellen. Zum einen haben die Teilnehmer/-innen die Addition als Vereinigung von Mengen kennengelernt. Die Interpretation der Multiplikation als wiederholte Addition knüpft an dieses Verständnis an, indem die Multiplikation auf der Mengenebene als Vereinigung mehrerer gleichmächtiger Mengen aufgefasst wird. Zum anderen bildet die Multiplikation als wiederholte Addition die Grundlage für das Verständnis der Zusammenhänge zwischen verschiedenen Multiplikationsaufgaben.

Auf der Symbolebene ist die Multiplikation hier sozusagen eine verkürzte Schreibweise einer wiederholten Addition. Eine der Schwierigkeiten dabei ist, dass die Anforderungen beim konzeptuellen Verständnis der Multiplikation über das der Addition hinausgehen. Bei der Addition bewegen sich die Bedeutungen beider Summanden auf der gleichen Ebene. Beide beschreiben die Mächtigkeit einer Teilmenge. Dagegen sind die Bedeutungen von Multiplikand und Multiplikator auf unterschiedlichen Ebenen angesiedelt. Der Multiplikand beschreibt die Anzahl der einzelnen Elemente einer Teilmenge. Der Multiplikator hingegen „zählt“ die Teilmengen. Er beschreibt also die Eigenschaft einer Menge von Mengen (vgl. Gerster & Schultz 2004, S. 387).



Im Beispiel gibt der Multiplikand also an, dass es sich um Fünfer-Bündel handelt. Der Multiplikator gibt an, dass es *vier Fünfer* sind. Die vier ist also nicht als Anzahl von Einzelobjekten sichtbar, sondern entsteht sozusagen erst durch das Zusammendenken der Objekte in den Teilmengen zu neuen Einheiten. Die Teilnehmer/-innen müssen also auf der einen Seite in der Lage sein, einen Fünfer als *ein* Ding aufzufassen, das gezählt werden kann. Auf der anderen Seite müssen sie aber auch die Anzahligkeit der einzelnen Fünfer im Blick behalten. Dieser Zusammenhang ist für die Nutzung der Multiplikation in Sachkontexten relevant, hat sich vielen Teilnehmern und Teilnehmerinnen aber nie erschlossen, wenn ihr Mathematikunterricht die Multiplikation nur auf der Ebene der Malreihen betrieben hat.

Konzeptuell steht dieses Verständnis der Multiplikation dem Verständnis mehrstelliger Zahlen nahe: So wie die „4“ als Multiplikator im Term $4 \cdot 5$ die Anzahl der Fünfer angibt, so steht auch die „4“ in „43“ für eine Anzahl von Teilmengen, nämlich für die vier Zehner, die in 43 enthalten sind. Dies ist der *multiplikative Aspekt des Stellenwertsystems*.

2.5.5 Strategien für die Multiplikation

Wir wissen nichts darüber, wie Erwachsene mit bSR die Multiplikation denken bzw. ausführen. Wir stellen deshalb hier dar, wie sich Strategien zum Multiplizieren bei Kindern entwickeln. Sie als Kursleiter/-in müssen herausfinden, inwieweit es möglich ist, die Teilnehmer/-innen in dieser Entwicklungshierarchie zu verorten.

Zählgeführte Strategien

Gerster & Schultz (2004, S. 399) versammeln verschiedene Strategien, um Produkte wie $5 \cdot 4$ zählend zu bestimmen:

Modellieren und vollständiges Auszählen

Zunächst legt man fünfmal hintereinander vier Mengenelemente hin. Anschließend zählt man aus, wie viele Mengenelemente insgesamt vorhanden sind. Um den Überblick zu behalten, ist es dabei nützlich, die Mengenelemente in Portionen zu strukturieren, die dem Multiplikanden entsprechen. Dieses Vorgehen realisieren manche Kinder auch ohne konkret vorhandenes Material, indem sie sich die entsprechenden Mengenelemente im Kopf vorstellen. Der Merk- und Konzentrationsaufwand ist dabei allerdings enorm.

Auf der einen Seite ist das Modellieren und vollständige Auszählen natürlich sehr aufwändig, da man jede Teilmenge zunächst einzeln und anschließend auch noch die entstandene Gesamtmenge zählen muss. Auf der anderen Seite zeigt sich in diesem Vorgehen aber zumindest ein adäquates Grundverständnis der Multiplikation als Vereinigung gleichmächtiger Mengen. Es müssen aber effektivere Strategien zur Ergebnisbestimmung erarbeitet werden.

Rhythmisches Zählen

Es wird die Zahlwortreihe bei eins beginnend aufgesagt, wobei das jeweils vierte Zahlwort betont wird: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., 17, 18, 19, 20“. Auch diese Methode erfordert hohe Konzentration, weil einerseits darauf geachtet werden muss, genau jedes vierte Zahlwort zu betonen, und andererseits mitgezählt werden muss, wie viele Zahlwörter man bereits betont gesprochen hat. Es laufen also zwei Zählprozesse parallel ab.

Als Hilfe kann man dabei zum Beispiel beim Aufsagen der Zahlwortreihe jeweils vier Finger der linken Hand aufklappen und mit den Fingern der rechten Hand die Anzahl der Viererportionen festhalten.

Nutzen von Zahlenfolgen

Manche Kursteilnehmer/-innen werden vielleicht die Anfangsglieder einiger Einmaleins-Reihen auswendig können. Im Beispiel also: „4, 8, 12, 16, 20“. Um das Ergebnis von $5 \cdot 4$ zu bestimmen, muss man dabei den Überblick darüber behalten, wie viele Glieder der Einmaleins-Reihe man bereits genannt hat. Dies kann zum Beispiel wiederum durch das Aufklappen von Fingern geschehen.

Rückführung auf die Addition

Wer die Multiplikation als wiederholte Addition verstanden hat, kann die Aufgabe auch durch sukzessives Addieren der vier lösen: $4 + 4 = 8$; $8 + 4 = 12$; $12 + 4 = 16$; $16 + 4 = 20$. Das ist insofern ebenfalls eine Art Zählstrategie, als man ermitteln muss, wie oft man die vier bereits addiert hat. Eine besondere Schwierigkeit dabei ist, dass man beachten muss, dass man bei der ersten Addition ($4 + 4 = 8$) bereits zwei Vieren verwendet hat.

Schon bei Aufgaben des kleinen Einmaleins, wie zum Beispiel $6 \cdot 8$, bei denen größere Zahlen beteiligt sind, tragen diese Strategien nicht mehr, weil ihre Durchführung viel zu aufwändig wird. Es gilt daher, mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen zielführendere Strategien zu erarbeiten und gleichzeitig ihr Operationsverständnis der Multiplikation zu festigen.

Mathematische Grundlagen nichtzählender Strategien für die Multiplikation

Nichtzählende Rechenstrategien für die Multiplikation beruhen grundlegend auf dem Verständnis der Multiplikation als wiederholte Addition bzw. auf der Zusammensetzung eines Ganzen aus mehreren gleich großen Teilmengen. Darüber hinaus sind das Kommutativ- und das Distributivgesetz von zentraler Bedeutung. Sie werden im Weiteren dazu dienen, Ableitungsstrategien an die Stelle eines Auswendiglernens des Einmaleins zu setzen.

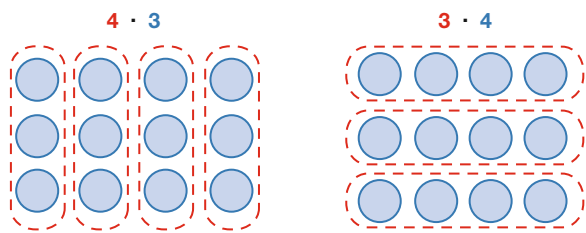
Wenn die Rechengesetze hier in Form von Gleichungen mit Variablen dargestellt wurden, bedeutet das natürlich nicht, dass sie in dieser Form im Kurs thematisiert werden sollen. Es geht für die Teilnehmer/-innen darum, die Rechengesetze anwenden zu können und sich ihre Gültigkeit anschaulich klar zu machen.

Kommutativgesetz

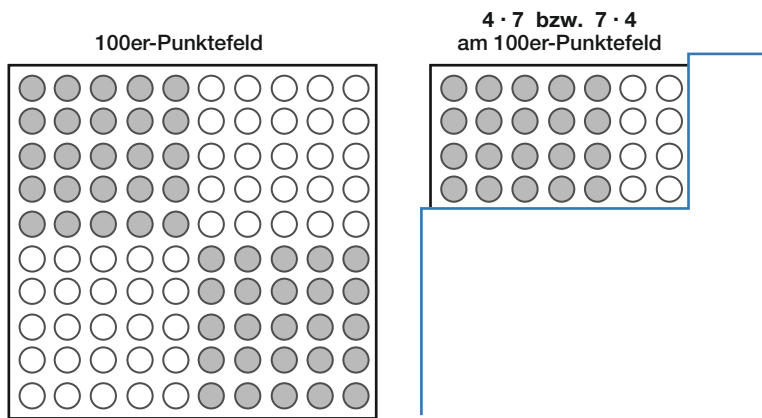
Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a \cdot b = b \cdot a$

Bei der Addition ist die Gültigkeit des Kommutativgesetzes unmittelbar einsichtig, wenn man sich die Situation auf der Mengenebene klar macht. Beide Summanden sind im Prinzip gleichwertig. Die Gültigkeit des Kommutativgesetzes der Multiplikation ist dagegen keineswegs selbstverständlich. Vier Packungen mit je drei Äpfeln sind etwas anderes als drei Packungen mit je vier Äpfeln. Es bedarf einiger Überlegungen, eine schlüssige Begründung dafür zu finden, dass die Gesamtanzahl dennoch gleich ist. Zum Beispiel könnte man sich überlegen, dass man aus jeder der vier Packungen einen Apfel herausnehmen und auf eine Schale legen könnte. Auf diese Weise kann man drei Schalen mit je vier Äpfeln füllen. Man hat dann also drei Mengen mit je vier Äpfeln.

Eine anschaulichere Möglichkeit, die Gültigkeit des Kommutativgesetzes zu begründen, ist die Darstellung an einem Punktefeld:



Je nachdem, wie man auf das Punktefeld schaut, sind hier vier Spalten mit je drei Punkten oder drei Reihen mit je vier Punkten dargestellt. Die Gesamtanzahl der Punkte verändert sich dabei offensichtlich nicht. Das Prinzip lässt sich auf beliebige Faktoren übertragen. Zur Veranschaulichung unterschiedlicher Beispiele eignet sich insbesondere das sogenannte 100er-Punktefeld. Auf diesem Feld kann man mit einem Abdeckwinkel alle Aufgaben des kleinen Einmaleins auf der Mengenebene veranschaulichen.



Durch die Anwendung des Kommutativgesetzes lässt sich der Rechenaufwand mitunter deutlich reduzieren. $8 \cdot 2$ ist gedacht als $2 \cdot 8 = 8 + 8$ wesentlich einfacher zu berechnen als $2 + 2 + \dots + 2$. Auch können neue Aufgaben auf bereits bekannte zurückgeführt werden. Wer zum Beispiel das Ergebnis von $9 \cdot 4$ kennt, der kennt auch das Ergebnis von $4 \cdot 9$. Damit reduziert sich die Anzahl der Aufgaben des kleinen Einmaleins, die auswendig gelernt werden müssen, auf fast die Hälfte.

Distributivgesetz

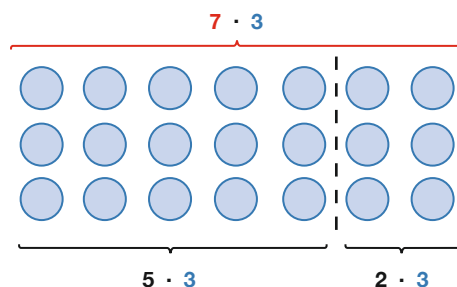
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
 $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

Aufgrund des Distributivgesetzes lassen sich schwierige Aufgaben in leichtere Teilaufgaben aufspalten, indem einer der Faktoren zerlegt wird. So lässt sich zum Beispiel $7 \cdot 4$ zurückführen auf die Teilaufgaben $5 \cdot 4$ und $2 \cdot 4$:

$$7 \cdot 4 = (5 + 2) \cdot 4 = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 4.$$

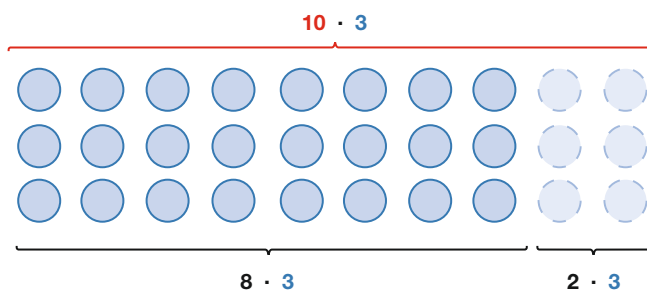
Analog lassen sich auch Multiplikationen mit mehrstelligen Faktoren auf einfachere Teilrechnungen zurückführen. Zum Beispiel lässt sich $256 \cdot 8$ zerlegen in $200 \cdot 8$, $50 \cdot 8$ und $6 \cdot 8$.

Die Gültigkeit des Distributivgesetzes wird unmittelbar einsichtig, wenn man es an einem Punktfeld veranschaulicht, also auf die Mengenebene zurückführt.



Die insgesamt $7 \cdot 3$ Punkte können zerlegt werden in Teilmengen von $5 \cdot 3$ und $2 \cdot 3$ Punkten. Die Gesamtzahl der Punkte bleibt dabei gleich.

Für das Distributivgesetz der Subtraktion ist eine dynamische Sichtweise erforderlich. Hat man zum Beispiel $10 \cdot 3$ Punkte und nimmt von diesen $2 \cdot 3$ Punkte weg, so bleiben $8 \cdot 3$ Punkte übrig. $8 \cdot 3$ ist also das Gleiche wie $10 \cdot 3 - 2 \cdot 3$.



Auch bei der anschaulichen Begründung des Distributivgesetzes hängt die grundsätzliche Idee nicht an den konkreten Zahlenbeispielen. Sie lässt sich auf beliebige Beispiele verallgemeinern.

2.5.6 Wege zur Beherrschung des kleinen Einmaleins

Als das kleine Einmaleins werden die Multiplikationsaufgaben bezeichnet, bei denen beide Faktoren zwischen null und zehn liegen. Das kleine Einmaleins umfasst daher 121 Aufgaben.

Padberg & Benz (2011, S. 138f.) unterscheiden idealtypisch zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen zur Erarbeitung des kleinen Einmaleins. Der lange Zeit übliche „traditionelle“ Weg war es, die einzelnen Einmaleins-Reihen isoliert durchzunehmen und diese auswendig zu lernen. Diese Praxis werden auch die Kursteilnehmer/-innen in der Regel in ihrer Grundschulzeit erlebt haben – und sind daran gescheitert.

Demgegenüber wird seit den 90er Jahren in der Fachdidaktik ein „ganzheitlicher“ Zugang zum Einmaleins propagiert. Bei diesem Zugang wird im Prinzip sofort das gesamte Einmaleins in den Blick genommen, um die Verbindungen zwischen den Reihen für die Automatisierung nutzen zu können und die universelle Anwendbarkeit der Rechenstrategien und die Parallelen bei der Erarbeitung der Reihen herauszustellen. Diesem Ansatz folgt auch diese Handreichung.

Ableiten aus bereits bekannten Aufgaben als Grundidee

Wir gehen davon aus, dass eine Speicherung von neuem Wissen im Langzeitgedächtnis besser möglich ist, wenn es an bereits vorhandenes Wissen anknüpfen kann. Für einen Zahlensatz des kleinen Einmaleins bedeutet das, dass er besser im Langzeitgedächtnis gespeichert wird, wenn ihm zum Beispiel über die Verbindung zu anderen, bereits gespeicherten Aufgaben eine Bedeutung beigemessen wird (*vgl. Gerster & Schultz 2004, S. 373*). Diese Grundsätze greift ein ganzheitlicher Zugang zum Einmaleins einerseits durch die bewusste Anwendung der oben erläuterten Rechenstrategien und andererseits durch das Aufdecken der gemeinsamen Struktur aller Malreihen auf.

Von besonderer Bedeutung sind dabei die sogenannten „Kernaufgaben“ bzw. „kurzen Reihen“ (*Müller & Wittmann 1994, S. 188*): $1 \cdot x$, $2 \cdot x$, $5 \cdot x$ und $10 \cdot x$.

Die Kernaufgaben der 7er-Reihe bzw. die kurze Reihe der 7 ist also $1 \cdot 7 = 7$, $2 \cdot 7 = 14$, $5 \cdot 7 = 35$ und $10 \cdot 7 = 70$. Die Ergebnisse dieser Aufgaben sind zum einen besonders leicht zu merken, weil sich die Ergebnisse von $2 \cdot x$ und $5 \cdot x$ aus der Verdopplung bzw. Halbierung der einfachen Aufgaben $1 \cdot x$ und $10 \cdot x$ ableiten lassen. Zum anderen lassen sich die Ergebnisse aller weiteren Aufgaben des kleinen Einmaleins aus Kombinationen der Kernaufgaben ableiten. So lassen sich zum Beispiel alle Ergebnisse der 7er-Reihe folgendermaßen aus den Kernaufgaben bestimmen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 7 &= 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 \\ 4 \cdot 7 &= 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7 \\ 6 \cdot 7 &= 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7 \\ 7 \cdot 7 &= 5 \cdot 7 + 2 \cdot 7 \\ 8 \cdot 7 &= 10 \cdot 7 - 2 \cdot 7 \\ 9 \cdot 7 &= 10 \cdot 7 - 1 \cdot 7 \end{aligned}$$

Entsprechend lassen sich auch die Ergebnisse der anderen Reihen des kleinen Einmaleins aus deren Kernaufgaben ableiten. Neben der sicheren Abrufbarkeit der Kernaufgaben und des distributiven Zusammenhangs ist dabei Sicherheit beim Addieren und Subtrahieren von Zahlen im Zahlraum bis 100 notwendig. Wenn es den Teilnehmern und Teilnehmerinnen noch schwer fällt, Aufgaben wie $35 + 7$ oder $70 - 14$ zu lösen, können sie zwar die Zusammenhänge zwischen den Malaufgaben und die Grundidee des Ableitens aus den Kernaufgaben verstehen, eine Automatisierung der abgeleiteten Aufgaben ist dann allerdings nicht zu erwarten.

In diesem Kurs geht es nicht darum, dass die Teilnehmer/-innen das kleine Einmaleins vollständig auswendig können – wir rechnen aber mit einer gewissen Motivation, „das jetzt endlich mal zu können“. Sie sollen lediglich die Ergebnisse der Kernaufgaben des kleinen Einmaleins gedächtnismäßig verfügbar haben und in der Lage sein, die Ergebnisse der restlichen Aufgaben des kleinen Einmaleins aus den Kernaufgaben im Kopf abzuleiten.

Neben den Kernaufgaben der kurzen Reihen sind erfahrungsgemäß auch die Quadratzahlen relativ leicht zu merken. Wie alle bereits auswendig gewussten Ergebnisse können auch diese als Stützpunkte für das Ableiten von Ergebnissen dienen, die noch nicht auswendig verfügbar sind. Je mehr Zahlensätze des Einmaleins die Teilnehmer/-innen bereits verfügbar haben, über desto mehr Stützpunktaufgaben verfügen sie.

Ein Vorschlag zur Ausgestaltung des Lernweges zum kleinen Einmaleins

In Anlehnung an Gerster & Schultz (2004, S. 402–404) wird im Folgenden ein Weg zur konkreten Ausgestaltung des Lernweges zur Erarbeitung des kleinen Einmaleins aufgezeigt, der die obigen Überlegungen systematisiert.

Veranschaulicht man sich die Aufgaben des kleinen Einmaleins in einer Tabelle, wird deutlich, dass sich die Anzahl der noch zu lernenden Aufgaben auf eine überschaubare Anzahl reduziert, wenn man die Kernaufgaben und deren „Tauschaufgaben“ (grün) bereits beherrscht.

.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	1·10
2	2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6	2·7	2·8	2·9	2·10
3	3·1	3·2	3·3	3·4	3·5	3·6	3·7	3·8	3·9	3·10
4	4·1	4·2	4·3	4·4	4·5	4·6	4·7	4·8	4·9	4·10
5	5·1	5·2	5·3	5·4	5·5	5·6	5·7	5·8	5·9	5·10
6	6·1	6·2	6·3	6·4	6·5	6·6	6·7	6·8	6·9	6·10
7	7·1	7·2	7·3	7·4	7·5	7·6	7·7	7·8	7·9	7·10
8	8·1	8·2	8·3	8·4	8·5	8·6	8·7	8·8	8·9	8·10
9	9·1	9·2	9·3	9·4	9·5	9·6	9·7	9·8	9·9	9·10
10	10·1	10·2	10·3	10·4	10·5	10·6	10·7	10·8	10·9	10·10

Mit den Quadratzahlen (blau) verringert sich diese Anzahl noch weiter. Die übrigen Aufgaben lassen sich aus den Kernaufgaben durch die Nutzung von Nachbarschaftsbeziehungen (Distributivgesetz) und Verdoppelungen ableiten.

Bei der Erarbeitung der Ableitungsstrategien ist es sinnvoll, sich zunächst innerhalb einer Reihe zu bewegen und diese Ideen erst dann auf andere Reihen zu übertragen. Dabei sollte in jeder Reihe zuerst die kurze Reihe beherrscht werden, um die nötigen Stützpunktaufgaben zur Verfügung zu haben. Bereits bei der Erarbeitung der kurzen Reihen ist es zweckmäßig, die Verbindungen zwischen den Aufgaben zu nutzen: $5 \cdot x$ ist die Hälfte von $10 \cdot x$ und $2 \cdot x$ ist das Doppelte von $1 \cdot x$.

Die Erarbeitung der weiteren Aufgaben sollte dann zunächst stets explizit an die Aufgaben der kurzen Reihe angekoppelt werden, zum Beispiel in Aufgabenserien wie der folgenden:

$$\begin{array}{lll} 1 \cdot 7 = & \text{oder:} & 10 \cdot 7 = \\ 2 \cdot 7 = & & 5 \cdot 7 = \\ 4 \cdot 7 = & & 6 \cdot 7 = \end{array}$$

Diese Erarbeitung der Ableitungsstrategien sollte natürlich nicht auf einer rein verbal-symbolischen Ebene erfolgen. Die Teilnehmer/-innen müssen die Zusammenhänge auf der Mengenebene verstehen und diese mit der symbolischen Ebene verknüpfen. Dazu kann man, wie oben beschrieben, zum Beispiel auf Darstellungen an Punktefeldern zurückgreifen oder mit Steckwürfeln entsprechende Stangen zusammenstecken. Die Mengenhandlungen und die angeschlossenen Fragen zur oben beschriebenen Aufgabenserie könnten dann wie folgt aussehen: Nimm zehn 7er-Stangen. Wie viele Steckwürfel sind es insgesamt? Wie viele Stangen muss man wegnehmen, damit es nur noch fünf 7er-Stangen sind? Wie viele Steckwürfel sind es jetzt noch insgesamt? Wie hängt die übrig gebliebene Menge mit der zuvor vorhandenen zusammen? Wie viele Stangen muss man jetzt noch wegnehmen, damit nur noch $4 \cdot 7$ Steckwürfel übrig bleiben? Wie viele Steckwürfel weniger sind es jetzt? Wie viele sind noch übrig?

Durch diese Anbindung an die Mengenebene kann man auch einem häufig zu beobachtenden Verständnisproblem entgegenwirken. Beim beschriebenen Übergang von $5 \cdot 7$ zu $4 \cdot 7$ sind sich erfahrungsgemäß viele Teilnehmer/-innen unsicher, ob sie von den 35 nun einmal vier oder einmal sieben abziehen müssen. Wer auf der Mengenebene verstanden hat, was hier geschieht, der bewältigt dieses Problem.

Um die Leitgedanken des hier aufgezeigten Lernweges noch einmal zusammenfassend zu skizzieren: Es geht in einem ersten Zugriff darum, eine Grundvorstellung der Multiplikation als wiederholte Addition aufzubauen. Aufbauend auf dieser Grundvorstellung werden die Aufgaben des kleinen Einmaleins mithilfe verschiedener Strategien aus leicht zu erlernenden Kernaufgaben abgeleitet. Die Anwendung dieser Ableitungsstrategien soll einerseits dazu beitragen, dass die Ergebnisse des kleinen Einmaleins zunehmend automatisiert abgerufen werden können – auch wenn das *DVV-Rahmencurriculum Rechnen* ausdrücklich nicht auf das Auswendigkönnen des gesamten Einmaleins rekurriert. Andererseits soll die reflektierte Verwendung der Ableitungen das Verständnis der Multiplikation als wiederholte Addition festigen, damit Sachprobleme als multiplikative erkannt werden können. Dazu ist es nötig, die Verbindung zwischen der verbal-symbolischen Ebene und der Mengenebene stets präsent zu halten.

Es erscheint uns wichtig, diesen Lernweg auch den Teilnehmern und Teilnehmerinnen transparent zu machen, denn für viele wird das Lernen des kleinen Einmaleins mit sehr negativen Erfahrungen verknüpft sein. Eltern von Kindern mit bSR berichten regelmäßig, dass sie unglaublich viel Zeit auf das Auswendiglernen des kleinen Einmaleins verwenden, ohne dass sich erkennbare Erfolge einstellen. Wenn dann doch einmal eine Reihe „sitzt“, so ist dieses Wissen nach kurzer Zeit scheinbar wieder verschüttet. Die obigen Überlegungen bieten eine plausible Erklärung, warum das so ist: Die Kinder sind nicht in der Lage, die auswendiggelernten „Zahlwortketten“ mit einem Sinn zu hinterlegen. Wenn eine Reihe dann eine Zeit lang nicht geübt wurde, gerät sie in Vergessenheit und kann wegen des fehlenden Verständnisses auch nicht neu erschlossen werden. Die Teilnehmer/-innen werden oftmals ähnliche Erfahrungen gemacht haben. Um ihnen die Angst vor einer Wiederholung dieser Erfahrungen zu nehmen, ist es hilfreich aufzuzeigen, dass ihr bisheriges Scheitern beim Erlernen des kleinen Einmaleins auch eine Folge einer falschen Lehr- bzw. Lernstrategie war.

Lernstrategien zur weiteren Festigung des kleinen Einmaleins

Nachdem die grundlegenden Ideen für die Erarbeitung des kleinen Einmaleins gemeinsam im Kurs thematisiert wurden, ist es sinnvoll, den Prozess der Routinisierung individuell zu gestalten. Dies kann zum Beispiel mithilfe einer Lernkartei geschehen. Je nach Ort im Lernprozess sollten die Karten dieser Kartei unterschiedlich gestaltet sein.

Zunächst geht es darum, die Kernaufgaben zu automatisieren. Dazu können die leichten Kernaufgaben $1 \cdot x$ und $10 \cdot x$ jeweils gemeinsam mit den anderen beiden Kernaufgaben auf eine Karteikarte geschrieben werden:

Vorderseite:	Rückseite:
$1 \cdot 7 =$ $2 \cdot 7 =$	$1 \cdot 7 = 7$ $2 \cdot 7 = 14$
$10 \cdot 7 =$ $5 \cdot 7 =$	$10 \cdot 7 = 70$ $5 \cdot 7 = 35$

Auf der Rückseite der Karteikärtchen sind dabei jeweils die Lösungen vermerkt.

Anschließend geht es darum, die Ableitungstechniken zu routinisieren. Dazu können die Aufgaben, die erschlossen werden sollen, zunächst gemeinsam mit den Kernaufgaben auf ein Kärtchen geschrieben werden. Dabei können ggf. auch unterschiedliche Kernaufgaben für eine Aufgabe verwendet werden:

Vorderseite:	Rückseite:
$2 \cdot 7 =$ $4 \cdot 7 =$	$2 \cdot 7 = 14$ $4 \cdot 7 = 28$
$5 \cdot 7 =$ $4 \cdot 7 =$	$5 \cdot 7 = 35$ $4 \cdot 7 = 28$

Zuletzt sollen die Aufgaben auch ohne den expliziten Hinweis auf eine geeignete Kernaufgabe gelöst werden. Auf der Vorderseite stehen daher nur noch die Aufgaben. Auf der Rückseite ist jeweils eine passende Kernaufgabe als Hinweis vermerkt. Hier dient die Rückseite also nicht der unmittelbaren Lösungskontrolle, sondern gibt nur einen Hinweis auf einen möglichen Weg, um die Lösung zu ermitteln.

Vorderseite:	Rückseite:
$4 \cdot 7 =$	$2 \cdot 7 = 14$ $5 \cdot 7 = 35$

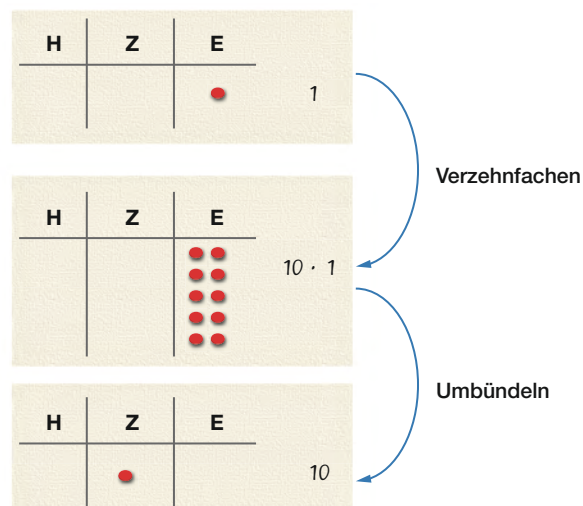
2.5.7 Multiplikation mehrstelliger Zahlen

Multiplikation mit Zehnerpotenzen

Im Dezimalsystem spielt die Multiplikation mit Zehnerpotenzen eine herausgehobene Rolle, weil sich die Multiplikation mehrstelliger Zahlen stets auf das kleine Einmaleins und die Multiplikation mit Zehnerpotenzen zurückführen lässt. So lässt sich eine Aufgabe wie zum Beispiel $8 \cdot 256$ zerlegen in die Teilrechnungen $8 \cdot 200$, $8 \cdot 50$ und $8 \cdot 6$. Die Berechnung dieser Teilergebnisse lässt sich wiederum auf das kleine Einmaleins und die Multiplikation mit Zehnerpotenzen zurückführen:
 $8 \cdot 200 = (8 \cdot 2) \cdot 100$ und $8 \cdot 50 = (8 \cdot 5) \cdot 10$.

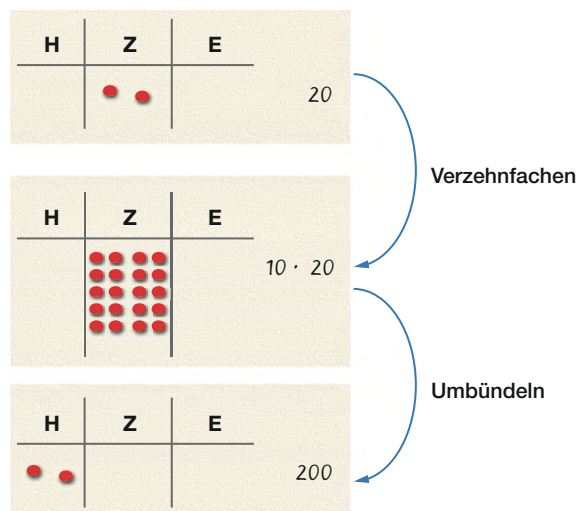
Auf der technischen Ebene ist die Multiplikation mit einer Zehnerpotenz besonders einfach durchzuführen. Das Ergebnis von $16 \cdot 100$ zum Beispiel werden wahrscheinlich auch viele der Teilnehmer/-innen richtig ermitteln können, indem sie an die 16 zwei Nullen anhängen. Es gilt dieses technische Wissen mit Verständnis zu unterfüttern: Aus welchem Grund reicht es bei der Multiplikation mit 100 aus, an den anderen Faktor zwei Nullen anzuhängen und was bedeutet dieses Anhängen der Nullen?

Eine Möglichkeit, die Zusammenhänge klarzumachen, ist es, sich die Situation an einer Stellenwerttafel zu verdeutlichen. Hat man zum Beispiel einen Einer und verzehnfacht diesen, so kann man die dann vorhandenen Einer zu einem Zehner umbündeln.



Aus dem Einer ist dann sozusagen ein Zehner geworden. Auf der Ebene der Zahlnotation bedeutet es, dass man eine „0“ an die „1“ anhängen muss, um den Stellenwert der „1“ von den Einern zu den Zehnern anzuheben.

Mit dem gleichen Grundgedanken kann man sich klarmachen, was geschieht, wenn man zum Beispiel eine beliebige Anzahl von Zehnern verzehnfacht: Aus jedem der verzehnfachten Zehner kann dann ein Hunderter gebündelt werden. Hat man zum Beispiel zwei Zehner und verzehnfacht diese, so kann man diese zu zwei Hundertern umbündeln. Auf der Ebene der Zahlsymbole wird an die „20“ eine „0“ angehängt, damit sich der Stellenwert der „2“ entsprechend erhöht.



Analoge Überlegungen führen zu der Einsicht, warum man bei einer Multiplikation mit 100 zwei Nullen anhängen muss, warum man bei einer Multiplikation mit 1000 drei Nullen anhängen muss usw.

Strategien zur Multiplikation mehrstelliger Zahlen

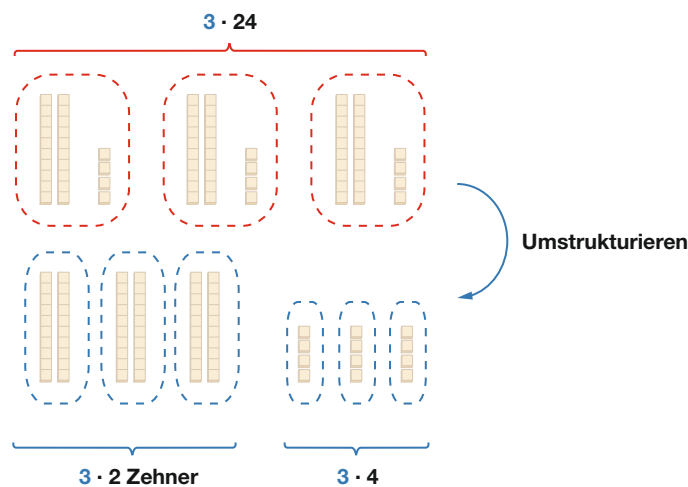
Aus den obigen Überlegungen ergeben sich verschiedene Möglichkeiten zur Multiplikation mehrstelliger Zahlen. Aufgrund der universellen Anwendbarkeit kommt der Strategie der Zerlegung eines Faktors in seine Stellenwerte dabei eine besondere Bedeutung zu.

Zerlegung eines Faktors in seine Stellenwerte

Aufgrund des Kommutativ- und Assoziativgesetzes und der Funktionsweise des Stellenwertsystems lassen sich Produkte mehrstelliger Zahlen auf das kleine Einmaleins und das Multiplizieren mit Zehnerpotenzen zurückführen, wie das folgende Beispiel verdeutlicht:

$$3 \cdot 24 = 3 \cdot (20 + 4) = 3 \cdot 20 + 3 \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot 10) + 3 \cdot 4 = (3 \cdot 2) \cdot 10 + 3 \cdot 4$$

Auf der Mengenebene wird unmittelbar einsichtig, warum man die Multiplikation in diese Teilrechnungen zerlegen kann: Man hat drei Portionen mit jeweils 24 Objekten, die man jeweils als zwei Zehner und drei Einer strukturieren kann. Insgesamt hat man also $3 \cdot 2$ Zehner und $3 \cdot 4$ Einer.



Dieses Vorgehen ist insofern von genereller Bedeutung, als sich beliebige Produkte, bei denen ein Faktor einstellig ist, auf diese Weise berechnen lassen. Es greift die Idee der Zerlegung eines Produkts in mehrere leichter zu berechnende Teilprodukte auf, die bereits bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins mithilfe der Kernaufgaben verwendet wurde.

In der Regel wird es nicht möglich sein, innerhalb von Stufe 2 zu erreichen, dass die Teilnehmer/-innen Produkte mit einem mehrstelligen Faktor im Kopf ausrechnen können. Zum einen ist für die Teilrechnungen eine sichere Abrufbarkeit des kleinen Einmaleins notwendig. Schon das wird innerhalb der begrenzten Zeit des Kurses nur in Ansätzen zu erreichen sein. Zum anderen müssen die Teilprodukte auch noch addiert werden. Inwieweit die Teilnehmer/-innen solche Rechnungen im Kopf ausführen können, wird auch davon abhängen, wie eingehend sie sich zuvor mit der Addition mehrstelliger Zahlen beschäftigt haben.

Was die Teilnehmer/-innen aber mit ihren Vorkenntnissen erreichen können, ist die Fähigkeit, solche Produkte im Sinne eines „gestützten Kopfrechnens“ zu berechnen. Dazu können zum Beispiel die einzelnen Teilrechnungen komplett oder auch nur die Zwischenergebnisse notiert werden. Mit dieser Stütze müssen die Teilergebnisse nicht im Kopf behalten werden, sodass sich die Teilnehmer/-innen ganz auf die nötigen Teilrechnungen konzentrieren können. Auf diese Weise reicht es dann auch aus, wenn die Teilnehmer/-innen die für die Teilrechnungen nötigen Ergebnisse des kleinen Einmaleins sicher aus den Kernaufgaben ableiten können. Auch die Addition der Zwischenergebnisse ist deutlich einfacher, wenn man sie vor Augen hat, als wenn man sie sich lediglich im Kopf merkt.

Die Fähigkeit zum gestützten Kopfrechnen dient hier nicht so sehr zur Schaffung einer Unabhängigkeit vom Taschenrechner. Sie dient eher einer Emanzipation gegenüber dem Rechner im Sinne von „Ich kann abschätzen, wo das Resultat liegen wird“ und „Notfalls kriege ich es auch ohne Rechner raus“.

Weitere Vorgehensweisen

Neben der Zerlegung in die Stellenwerte lassen sich auch andere Zerlegungen in leichtere Teilaufgaben finden. Welche Zerlegungen sich dabei anbieten, hängt sowohl von den jeweiligen Faktoren als auch vom individuellen Zahlbeziehungswissen ab. So lässt sich eine Aufgabe wie $8 \cdot 26$ zum Beispiel auch folgendermaßen lösen:

- $10 \cdot 26 = 260$ und $2 \cdot 26$ ist 52. Also ist $8 \cdot 26 = 260 - 52$
- $8 \cdot 25 = 200$. Also ist $8 \cdot 26 = 200 + 8$
- $2 \cdot 26 = 52$; $2 \cdot 52 = 104$ und $2 \cdot 104 = 208$. Also ist $8 \cdot 26 = 208$.
- $8 \cdot 26$ ist genau so viel wie $4 \cdot 52$. $4 \cdot 50 = 200$ und $4 \cdot 2 = 8$. Also ist $8 \cdot 26 = 208$.

All diesen Vorgehensweisen ist gemein, dass für ihre Anwendung ein gewisses Zahlbeziehungswissen und zum Teil ein Repertoire an auswendig abrufbaren Zahlensätzen nötig ist. Man spricht hier auch vom „Zahlenblick“. Inwieweit Sie auch solche Strategien im Kurs thematisieren wollen, sollten Sie wiederum von der Motivationslage Ihrer Teilnehmer/-innen abhängig machen. Unbedingt notwendig ist die Auseinandersetzung damit nicht, sie kann aber durchaus zu einem vertieften Verständnis der Multiplikation und der Förderung der Kopfrechenfähigkeiten beitragen.

2.6 Division

2.6.1 Lernziele

- Die Teilnehmer/-innen verstehen die Division sowohl im Sinne des Aufteilens als auch im Sinne des Verteilens.
- Die Teilnehmer/-innen verstehen den Zusammenhang zwischen Multiplikation und Divisionen.
- Die Teilnehmer/-innen können die Ergebnisse des kleinen Einsdurcheins aus dem Zusammenhang zum kleinen Einmaleins oder durch Bezüge zu bekannten Kernaufgaben bestimmen.

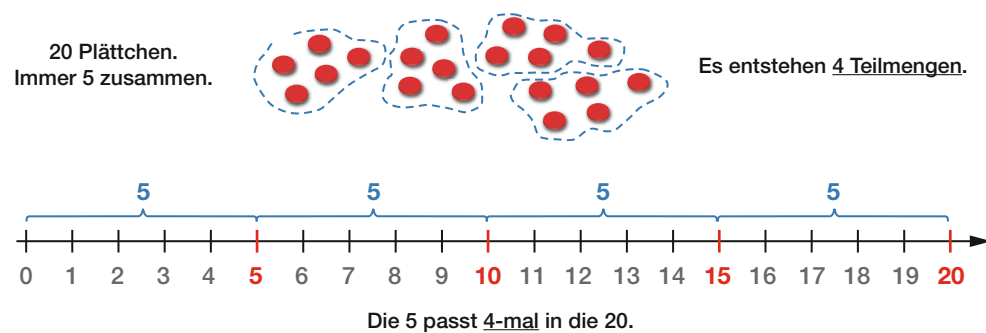
- Die Teilnehmer/-innen kennen ausgewählte Teilungen der 100 und nutzen diese zur Orientierung im Zahlraum. Sie können diese Strukturen entsprechend auf größere Zahlräume übertragen.

2.6.2 Operationslogiken der Division

Der Division können im Wesentlichen zwei Situationstypen zugrunde liegen: das Aufteilen und das Verteilen. Bis vor nicht allzu langer Zeit gab es für diese beiden Situationstypen sogar unterschiedliche Rechenzeichen. Das Aufteilen wurde durch ein „ $a \div b$ “ symbolisiert. Dieses Zeichen ist bei uns heute nur noch auf dem Taschenrechner üblich. Das Verteilen wurde durch einen Doppelpunkt symbolisiert „ $a : b$ “. Diese Darstellung ist heute in Deutschland üblich, um die Divisionen zu symbolisieren.

Aufteilen

$20 : 5$ kann verstanden werden als die Frage danach, in wie viele *Teilportionen mit je fünf Elementen* eine Menge mit 20 Elementen zerlegt werden kann. Werden zum Beispiel beim Training einer Mannschaft Fünfergruppen gebildet: Wie viele Gruppen entstehen dann, wenn es insgesamt 20 Spieler gibt? Allgemein wird also eine gegebene Menge in Teilmengen gleicher Größe aufgeteilt. Die Größe der Teilmengen ist vorgegeben. Die Frage ist, wie viele Teilmengen entstehen. Dabei kann natürlich auch die Situation vorkommen, dass sich die Menge nicht restlos aufteilen lässt, sodass nach dem Aufteilprozess einige Elemente übrig bleiben.



Man kann die Frage, die das Aufteilen stellt, auch so formulieren: Wie oft kann man jeweils fünf von 20 wegnehmen? Oder auch: Wie oft ist die fünf in der 20 enthalten?

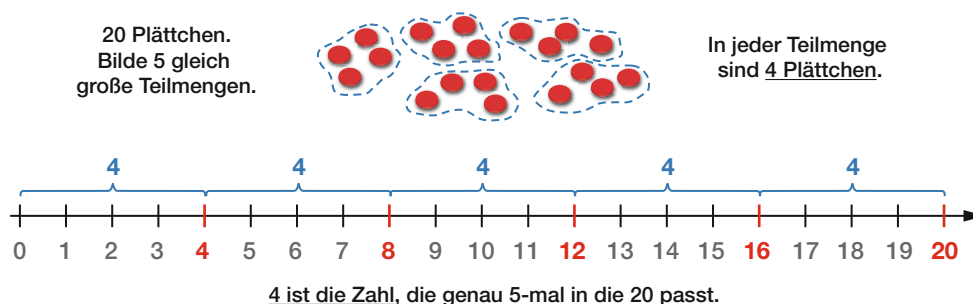
Die erste Formulierung verweist auf eine subtraktive Sicht auf das Aufteilen. Es werden sukzessive je fünf Elemente von den 20 weggenommen, bis keine Fünfer-Portionen mehr gebildet werden können. Diese subtraktive Sicht erschließt auch die Bedeutung des Minuszeichens zwischen den Divisionspunkten bei der Symbolisierung des Aufteilens mithilfe des früher üblichen Zeichens $\div$ (vgl. Gerster & Schultz 2004, S. 396).

Die zweite Formulierung verweist dagegen auf eine eher additive Sicht: Es werden so lange Fünfer zusammengefügt, bis die 20 erreicht ist. Mit dieser Sicht wird auch die enge Verbindung zwischen Division und Multiplikation deutlich, denn man kann das oben gestellte Problem der Aufteilung der 20 in Teilmengen zu je fünf auch multiplikativ formulieren: $__ \cdot 5 = 20$.

Beim Umgang mit Größen ist der Prozess des Messens im Prinzip ein Problem des Aufteilens. Bei der Längenmessung mit einem Zollstock zum Beispiel fragt man – grob gesprochen – wie oft das Standardmaß 1 cm in das zu messende Objekt passt.

Verteilen

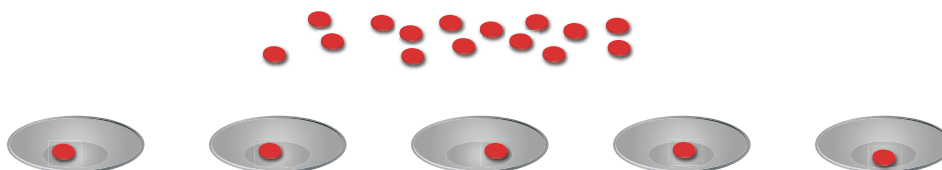
$20:5$ kann auch verstanden werden als die Frage danach, wie groß die Teilportionen werden, wenn die 20 in *fünf gleich große Teile* zerlegt wird. Es sollen also zum Beispiel 20€ Gewinn an fünf Mitspieler oder 20 Bonbons an 5 Kinder verteilt werden. Wie viel Geld bekommt dann jeder? Allgemein wird also eine gegebene Menge in gleich große Teilmengen zerlegt. Die Anzahl der Teilmengen ist vorgegeben. Die Frage ist, wie groß jede der Teilmengen dann ist.



Ebenso wie beim Aufteilen kann auch beim Verteilen das Problem auftreten, dass sich die Menge nicht komplett wie gefordert zerlegen lässt. Es kann dann nur ein Teil der gesamten Menge verteilt werden. Es bleibt also ein Rest übrig.

Anders formuliert stellt das Verteilen die Frage: Welche Anzahl kann man fünfmal von der 20 wegnehmen (sodass möglichst wenig übrig bleibt)? Oder auch: Welche Zahl ist genau fünfmal in der 20 enthalten?

Diese Formulierungen zeigen zum einen, dass der Zugriff über eine wiederholte Subtraktion bei einer Verteilsituation nicht so unmittelbar ist wie bei einer Aufteilsituation. Die wiederholte Subtraktion der fünf ist nur dann der Situation angemessen, wenn man dabei den Gedanken verfolgt, dass jede der Teilportionen sukzessive mit je genau einem Objekt aufgefüllt wird. Für jede „Runde“ des Verteilens benötigt man dann genau fünf Elemente.



Zum anderen zeigt sich, dass die Verbindung zur Multiplikation hier einer anderen Logik folgt als beim Aufteilen. Wenn die Frage ist, welche Zahl fünfmal in der 20 enthalten ist, dann bedeutet das multiplikativ formuliert: $5 \cdot \underline{\quad} = 20$. Aus der Logik der Situation heraus ergibt sich kein direkter Zugriff über die wiederholte Addition der fünf, denn es ist ja gerade gefragt, *welche* Zahl fünfmal addiert werden muss, damit man 20 erhält.

Auf der inhaltlichen Ebene stellen Aufteilen und Verteilen also verschiedene Fragen an Mengen oder Größen. Interpretiert man zum Beispiel $20:5$ als die Frage danach,

wie oft die fünf in der 20 enthalten ist (aufteilen), erhält man als Ergebnis: *vier Mal*. Interpretiert man $20:5$ als die Frage danach, welche Zahl fünfmal in der 20 enthalten ist (verteilen), so erhält man als Ergebnis *die vier*. Dennoch verwenden routinierte Rechner zur Lösung eines Divisionsproblems oftmals intuitiv die Sichtweise, die auf der Zahlenebene leichter zu lösen ist – unabhängig davon, ob es sich um ein Aufteil- oder Verteilproblem handelt. Das ist deshalb möglich, weil die aufteilende und die verteilende Sicht *auf der Zahlenebene* das gleiche Ergebnis liefern. Die Antwort auf beide Fragen wird durch die Gleichung $20:5 = 4$ erfasst.

Schon die Tatsache, dass es früher unterschiedliche Rechenzeichen für das Aufteilen und Verteilen gab, macht deutlich, dass es keineswegs unmittelbar einsichtig ist, warum dies für beliebige Divisionsprobleme der Fall ist. Manch ein/-e Teilnehmer/-in hat die Division deshalb nie verstanden, weil die Doppelgesichtigkeit der Division – völlig verschiedenen Problemstellungen wird dieselbe Gleichung zugeordnet – nie expliziert wurde.

Weitere Bedeutungen des Divisionszeichens

Eine Besonderheit des Divisionszeichens ist, dass es auch noch in anderen Kontexten verwendet wird. So werden zum Beispiel auch Verhältnisse mit diesem Zeichen dargestellt. Dabei gibt es aber keinen direkten Zusammenhang zum Aufteilen oder Verteilen. Werden bei einem Getränk zum Beispiel die Komponenten im Verhältnis 3:1 gemischt oder steht es in einem Fußballspiel 3:1, dann hat das nichts mit dem Aufteilen oder Verteilen von 3 Objekten zu tun.

Diese weiteren Bedeutungen des Divisionszeichens haben für die Arbeit im Kurs keine Bedeutung. Um Missverständnisse zu vermeiden, sollten sie aber angesprochen werden.

2.6.3 Strategien für die Divisionen

Zählgeführte Strategien

Die Zählstrategien der Division werden im Folgenden anhand der Aufgabe 14:3 erläutert, um auch den Fall eines Restes zu berücksichtigen. Dabei wird jeweils eine aufteilende Sicht eingenommen. Die Strategien lassen sich analog auf das Verteilen übertragen.

Modellieren und vollständiges Auszählen

Man zählt zunächst 14 Mengenelemente ab. Anschließend zählt man von diesen 14 Mengenelementen sukzessive drei ab. Um den Überblick zu behalten, ist es dabei hilfreich, die bereits gezählten jeweils auf separate Haufen zu legen. Dies setzt man fort, bis man keine weitere Dreier-Portion mehr erhalten kann. Anschließend zählt man die Anzahl der entstandenen Portionen und die übrigen Elemente ab.

Rhythmisches Zählen

Rückwärts: Ausgehend vom Dividenten wird die Zahlwortreihe rückwärts aufgesagt. Dabei wird jedes dritte Zahlwort betont: „14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1“. Ziel ist es also, zu bestimmen, wie oft man die drei von der 14 abziehen kann.

Um aus diesem Zählprozess das Ergebnis zu ermitteln, muss man drei parallel ablaufende Zählprozesse gleichzeitig im Auge behalten. Erstens muss man die Zahl-

wortreihe rückwärts aufsagen, zweitens muss man darauf achten, genau jedes dritte Zahlwort zu betonen, und drittens muss man festhalten, wie viele Zahlwörter man bereits betont gesprochen hat.

Als Hilfe kann man dabei zum Beispiel beim Aufsagen der Zahlwortreihe jeweils drei Finger der linken Hand aufklappen und mit den Fingern der rechten Hand festhalten, wie viele Zahlwörter man bereits betont gesprochen hat.

Eine weitere Schwierigkeit entsteht bei der Ermittlung des Rests. Verbindet man das Zählen mit einer Mengenvorstellung, so ist klar, dass man nur noch zwei Elemente übrig hat, wenn man bei der drei angekommen ist. Bewegt man sich lediglich auf der Zahlwortreihe zurück, so ist nicht klar, ob man evtl. auch noch die Null mitzählen muss.

Vorwärts: Auf ähnliche Weise kann man auch vorgehen, wenn man die Zahlwortreihe vorwärts aufsagt. Dann werden entsprechend die Zahlwörter bei eins beginnend in einem Dreier-Rhythmus aufgesagt: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14“.

Ziel dieses Zählprozesses ist es, zu ermitteln, wie oft die drei in die 14 passt. Die Schwierigkeiten sind ähnlich zu den oben beschriebenen. Allerdings kommt bei diesem Vorgehen zumindest nicht noch das Problem des Rückwärtszählens hinzu.

Zählen in Schritten

Vorwärts: Wenn man die Verbindung der Division zur Multiplikation verstanden hat, die Ergebnisse der Dreierreihe aber noch nicht beherrscht, kann man die Aufgabe auch lösen, indem man in Dreierschritten zählt und dabei mitzählt, wie viele Glieder der Zahlenfolge man bereits genannt hat: „3, 6, 9, 12“. Dieses Mitzählen kann wiederum durch Aufklappen von Fingern erfolgen.

Rückwärts: Ein solches Zählen in Schritten ist auch rückwärts möglich, allerdings kann man dabei nicht auf die vielleicht schon vertrauten Zahlen aus der Dreierreihe zurückgreifen: „11, 8, 5, 2.“

Rückführung auf die Subtraktion bzw. Addition

Wer die Division im Sinne einer wiederholten Subtraktion verstanden hat, kann die Aufgabe auch durch sukzessives Subtrahieren der drei lösen: $14 - 3 = 11$; $11 - 3 = 8$; $8 - 3 = 5$; $5 - 3 = 2$. Dieses Vorgehen ist insofern den Zählstrategien zuzuordnen, als zählend festgehalten werden muss, wie oft die drei subtrahiert wurde.

Mit Bezug auf die Verbindung zur Multiplikation kann man die Aufgabe auch lösen, indem man sukzessive drei addiert: $3 + 3 = 6$; $6 + 3 = 9$; $9 + 3 = 12$; $12 + 2 = 14$. Dabei muss man wiederum beachten, dass man bei der ersten Rechnung bereits zwei Dreien addiert hat. Eine weitere Schwierigkeit ist, dass die Bedeutung der Zwei als Rest nicht unmittelbar klar wird.

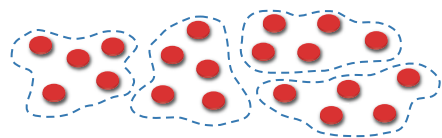
Ähnlich wie bei der Multiplikation mögen diese Zähltechniken bei kleinen Dividenden noch praktikabel sein, bei größeren Zahlen hingegen versagen sie. Darüber hinaus ist durch die wiederholte Anwendung solcher Zähltechniken kein Fortschritt im Sinne einer zunehmend automatisierten Abrufbarkeit zu erwarten. Zum einen nimmt die Durchführung der Zählprozeduren viel Aufmerksamkeit in Anspruch, und zum anderen werden kaum Beziehungen zwischen verschiedenen Aufgaben geknüpft. Wie im Kapitel zur Multiplikation erläutert, ist aber gerade diese Einordnung in ein Beziehungsgeflecht von entscheidender Bedeutung für die Verankerung im Langzeitgedächtnis.

2.6.4 Wege zur Beherrschung des kleinen Einsdurcheins

Mit dem kleinen Einsdurcheins werden die 110 Aufgaben von 0:1 bis 100:10 bezeichnet. Um zu einer Beherrschung des kleinen Einsdurcheins zu gelangen, bieten sich im Wesentlichen zwei Wege an. Beide knüpfen an den Zusammenhang zwischen Division und Multiplikation an. Es geht dabei nicht um ein Entweder-Oder, sondern um ein ergänzendes Nebeneinander beider Wege.

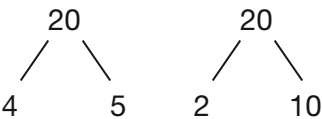
Kopplung des Einsdurcheins an das Einmaleins

Bereits bei der Darstellung der Operationslogiken der Division wurde der Zusammenhang zwischen Division und Multiplikation angedeutet. Dieser Zusammenhang wird nun weiter expliziert und für das Lernen des kleinen Einsdurcheins nutzbar gemacht. Auf der Mengenebene entspricht die Division einer Zerlegung einer Menge in mehrere gleich mächtige Teilmengen.



Die entstandene Situation kann man sowohl unter dem Blickwinkel der Division als auch unter dem Blickwinkel der Multiplikation betrachten. In der Sicht als Division sind es 20 Mengenelemente, die auf vier Portionen verteilt wurden ($20 : 4 = 5$) bzw. 20 Elemente, die in Portionen zu je fünf aufgeteilt wurden ($20 : 5 = 4$). In der multiplikativen Sicht sind es viermal fünf Elemente, also insgesamt 20 ($4 \cdot 5 = 20$). (Dass 20 Elemente sich auch aus fünfmal vier Elementen ($5 \cdot 4 = 20$) ergeben, erschließt sich aus der Situation in der Zeichnung nicht, sondern muss als multiplikativer Zusammenhang erarbeitet werden bzw. worden sein.)

Anschaulich gesprochen sind vier und fünf oder auch zwei und zehn „multiplikative Bausteine“ (Gerster & Schultz 2004, S. 407) der 20. In diese Bausteine kann die 20 aber auch wieder zerlegt werden. Dadurch ergibt sich, ähnlich wie bei der additiven Zahlzerlegung (vgl. DVV-Rahmencurriculum Rechnen Stufe 1, S. 32 ff.), ein Zahlen-tripel:



Aus diesen multiplikativen Zahlentripeln ergeben sich jeweils vier Zusammenhänge:

$$\begin{array}{ccc} & 20 & \\ / & & \backslash \\ 4 & & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \cdot 5 = 20 \\ 5 \cdot 4 = 20 \\ 20 : 4 = 5 \\ 20 : 5 = 4 \end{array}$$

Falls die Teilnehmer/-innen Teile des Kleinen Einmaleins bereits beherrschen und diese Zusammenhänge verstanden haben, können sie daraus die entsprechenden Ergebnisse des Kleinen Einsdurchs ableiten. Dabei zeigt sich eine gewisse Analogie zur Erarbeitung des Kleinen Einspluseins und Einsminuseins auf Stufe 1, bei der die additive Zerlegbarkeit von Zahlen eine wichtige Rolle spielte (vgl. *ebd.*).

Ableiten aus bereits bekannten Aufgaben

Für die Erarbeitung des Kleinen Einmaleins war die Idee des Ableitens aus bereits bekannten Aufgaben von zentraler Bedeutung. Diese Idee kann auch für das Kleine Einsdurchs wieder aufgegriffen werden.

Aus der Umkehrung der Kernaufgaben des Kleinen Einmaleins ergeben sich entsprechend der oben beschriebenen Idee der Zahlentripel Stützpunkte für das Ableiten von Divisionsaufgaben.

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 6 = 6 & \dashrightarrow 6 : 6 = 1 \\ 2 \cdot 6 = 12 & \dashrightarrow 12 : 6 = 2 \\ 5 \cdot 6 = 30 & \dashrightarrow 30 : 6 = 5 \\ 10 \cdot 6 = 60 & \dashrightarrow 60 : 6 = 10 \end{array}$$

Aus diesen „Kernaufgaben der Division“ lassen sich alle weiteren Ergebnisse einer Reihe des kleinen Einsdurchs ableiten, wie im Folgenden exemplarisch anhand der Division durch sechs verdeutlicht wird:

$$\begin{array}{lll} 18 : 6 & = & 12 : 6 + 6 : 6 \\ 24 : 6 & = & 30 : 6 - 6 : 6 \\ 24 : 6 & = & 12 : 6 + 12 : 6 \\ 36 : 6 & = & 30 : 6 + 6 : 6 \\ 42 : 6 & = & 30 : 6 + 12 : 6 \\ 48 : 6 & = & 60 : 6 - 12 : 6 \\ 54 : 6 & = & 60 : 6 - 6 : 6 \end{array}$$

Zum Ergebnis der Aufgabe $42 : 6$ kann man zum Beispiel durch folgende Überlegungen kommen: „ $30 : 6$ ist 5. 42 ist um 12 mehr als 30. $12 : 6$ ist 2. Also ist $42 : 6$ gleich 7.“ Dieses Vorgehen ergibt sich relativ ungezwungen aus den Grundvorstellungen zur Division. Die vorhandenen Objekte werden sukzessive aufgeteilt bzw. verteilt.

Die bekannte Aufgabe $30 : 6$ kann aber auch als Ausgangspunkt für die Ermittlung des Ergebnisses von $24 : 6$ dienen: „ $30 : 6$ ist 5. 24 ist um sechs weniger als 30. Also ist $24 : 6 = 4$.“ Dabei muss auf der Mengenebene sozusagen mit hypothetisch vorhandenen Objekten operiert werden: Wenn man 30 Objekte hätte, könnte man fünf Sechser-Portionen erstellen. Man hat aber tatsächlich sechs Objekte weniger

zur Verfügung. Daher kann man auch nur vier Sechser-Portionen erstellen (aufteilen). Oder verteilend gedacht: Wenn man 30 Objekte hätte und diese an sechs Personen verteilt, dann bekäme jeder fünf. Man hat aber tatsächlich sechs Objekte weniger. Daher bekommt jeder nur vier.

Ein anderer Weg, sich das Ergebnis von $24 : 6$ zu erschließen, könnte zum Beispiel über die Aufgabe $12 : 6$ gehen: „ $12 : 6$ ist zwei. 24 ist doppelt so viel wie 12. Also ist $24 : 6$ auch doppelt so viel wie zwei, nämlich vier.“

Lernstrategien zur weiteren Festigung des kleinen Einsdurch-eins

Zur Routinisierung der Ableitungsstrategien kann es auch beim kleinen Einsdurch-eins sinnvoll sein, die Lernprozesse innerhalb des Kurses durch die Arbeit mit einer Lernkartei zu ergänzen.

Für die Thematisierung des Zusammenhangs zwischen Multiplikation und Division sind zum Beispiel Kartenvarianten möglich, bei denen auf der Vorderseite ein multiplikatives Zahlentripel steht, aus dem dann die entsprechenden Multiplikations- und Divisionsaufgaben abgeleitet werden sollen.

Vorderseite:

30

56

Rückseite:

$5 \cdot 6 = 30$

$6 \cdot 5 = 30$

$30 : 6 = 5$

$30 : 5 = 6$

Die Automatisierung der Kernaufgaben der Division kann sowohl „operationsintern“ als auch über den Bezug zur Multiplikation erfolgen. Für die erste Variante können die Karten beispielsweise folgendermaßen gestaltet werden:

Vorderseite:

$6 : 6 =$

$12 : 6 =$

Rückseite:

$6 : 6 = 1$

$12 : 6 = 2$

Vorderseite:

$60 : 6 =$

$30 : 6 =$

Rückseite:

$60 : 6 = 10$

$30 : 6 = 5$

Der Bezug zu den Kernaufgaben der Multiplikation kann hergestellt werden, indem auf die Vorderseite eine der Kernaufgaben der Division und auf die Rückseite die entsprechende Kernaufgabe der Multiplikation als Hinweis geschrieben werden:

Vorderseite:

$30 : 6 =$

Rückseite:

$5 \cdot 6 = 30$

Die zweite Variante ist offensichtlich nur dann sinnvoll, wenn die entsprechenden Kernaufgaben der Multiplikation bereits sicher beherrscht werden.

Die Routinisierung der Ableitungstechniken kann ähnlich erfolgen wie bei der Multiplikation. Dazu werden die weiteren Divisionsaufgaben zunächst gemeinsam mit passenden Kernaufgaben auf eine Karteikarte geschrieben. Diese Kernaufgaben dienen dann als Stützpunktaufgaben für die Ableitung. Dabei können ggf. wiederum unterschiedliche Kernaufgaben als Stützpunkt dienen.

Vorderseite:	Rückseite:
$30 : 6 =$ $24 : 6 =$	$30 : 6 = 5$ $24 : 6 = 4$
$12 : 6 =$ $24 : 6 =$	$12 : 6 = 2$ $24 : 6 = 4$

Zuletzt sollen die Divisionsaufgaben ohne einen Hinweis auf geeignete Kernaufgaben gelöst werden. Auf der Vorderseite steht dann nur noch die zu lösende Divisionsaufgabe. Die Rückseite hat nur noch Hinweisfunktion. Auf ihr stehen passende Kernaufgaben, aus denen die Aufgabe auf der Vorderseite abgeleitet werden kann.

Vorderseite:	Rückseite:
$24 : 6 =$	$30 : 6 = 5$

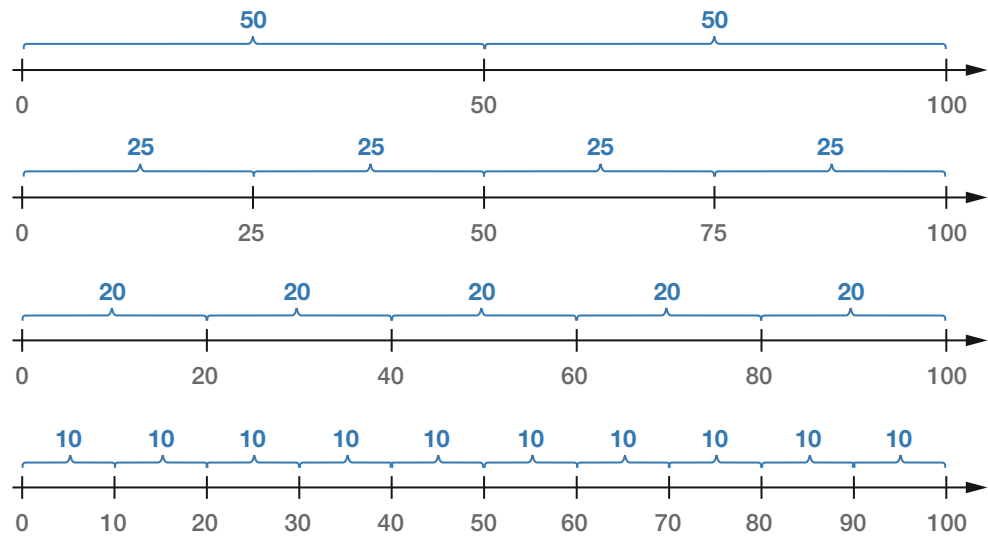
2.6.5 Kenntnis ausgewählter Teilungen der 100 und 1000 als Stütze für die Zahlraumorientierung

Im Hinblick auf die Zahlraumorientierung, aber auch für lebenspraktische Aspekte, wie zum Beispiel den Umgang mit Geld, ist es hilfreich, manche Teilungen der 100 und 1000 abrufbereit zu haben.

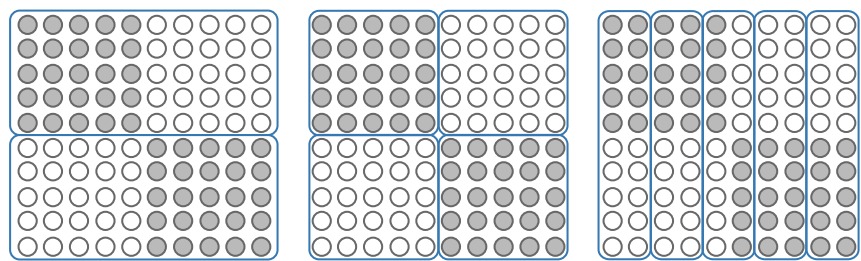
Zahlraumorientierung

Teilungen der 100

Hinsichtlich der Zahlraumorientierung bietet die Kenntnis der möglichen Teilungen der 100 über die 10er-Struktur hinaus eine weitere Orientierungshilfe. Hilfreich in dieser Hinsicht sind insbesondere die Zerlegungen eines Hunderters in 2, 4, 5 und eben in 10 Teile. Als Stütze für die Orientierung kann hier wiederum der Zahlenstrahl dienen ...



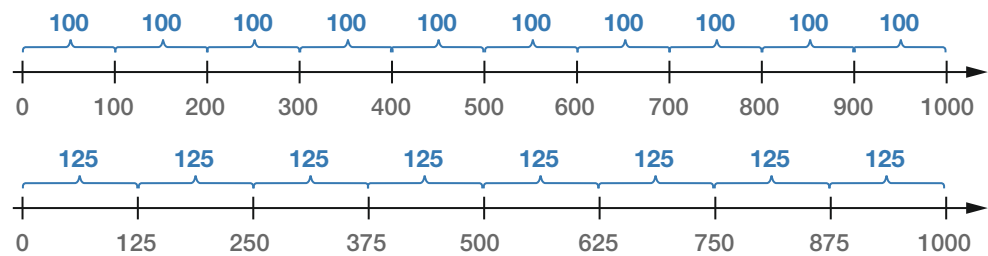
... oder das 100er-Punktefeld, auf dem die Beziehungen auf der Mengenebene deutlich werden.



Dieses Wissen um die gleichmäßige Zerlegbarkeit eines Hunderters lässt sich vielfach auch für die Strukturierung größerer Zahlen nutzen. Wenn man zum Beispiel weiß, dass ein Hunderter aus zwei Fünzigern besteht, kann man sich daraus ableiten, dass in drei Hundertern dreimal so viele, also sechs Fünziger enthalten sind.

Teilungen der 1000

Analog zum Hunderter kann auch ein Tausender in 2, 4, 5 oder 10 Teile eingeteilt werden. Als weiterer nützlicher Stützpunkt kommt hier noch die Einteilung in 8 Teile zu je 125 hinzu:



Die Strukturierungen des Hunderters und des Tausenders bieten aufgrund der überlagerten 1000er-Struktur des Dezimalsystems auch eine Stütze für die Orientierung in größeren Zahlräumen. So kann man zum Beispiel aus der Kenntnis, dass sich ein 100er in fünf Teile zu je 20 zerlegen lässt, ableiten, dass sich 100.000 in fünf Teile zu je 20.000 zerlegen lassen.

Umgang mit Geld

Auch hinsichtlich des Umgangs mit Geld ist die Kenntnis wichtiger Teilungen von 100 und 1000 von Bedeutung. Manche der Teilnehmer/-innen werden gerade deshalb in den Kurs gekommen sein, weil ihnen der Umgang mit dem monatlich verfügbaren Geld schwerfällt. Dies mag bei manchem auch der Tatsache geschuldet sein, dass er zum Beispiel bisher schlicht keine Vorstellung davon hatte, wie viel seine 400€ Miete oder seine 50€ Telefonkosten im Verhältnis zu den 1000€ sind, die er im Monat zur Verfügung hat.

Ein Problem dabei ist, dass man üblicherweise Beträge solcher Größenordnung nicht auf einmal vor Augen hat. Wenn man dann nicht über eine abstrakte Vorstellung der Größenordnung von Zahlen verfügt, hat man kaum eine Möglichkeit, sich klar zu machen, wie sich die einzelnen Ausgaben auf das verfügbare Budget auswirken. Im Kurs haben Sie die Gelegenheit, mithilfe von Rechengeld solche Beträge (be-)greifbar zu machen. Beträge wie 100€ oder 1000€ bilden dabei wichtige Bezugspunkte. Auf diese Weise kann man sich zum Beispiel veranschaulichen, über wie viele 50er man verfügt, wenn man 1000€ hat, und wie viele dieser 50er bereits für die laufenden Kosten verwendet werden müssen. Das kann man an der Tafel oder auf einem Poster auch konkret mit Geldscheinen „legen“. Ein anderes Beispiel wäre zu schauen, wie viele 20€-Scheine einem 100€-Schein entsprechen oder welche Stückelungen von 100€ noch möglich sind und welche Gegenwerte diesen 100€ entsprechen.

Solche Überlegungen sollten dabei auch an die Veranschaulichung am Zahlenstrahl angekoppelt werden, damit die Teilnehmer/-innen Gelegenheiten erhalten, die verschiedenen Darstellungsformen der Zahlen zu verknüpfen.

LITERATURVERZEICHNIS STUFE 2

FUSON, KAREN C. (1990):

Issues in Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction Learning and Teaching.
In: Journal for Research in Mathematics Education 21 (4), S. 273–280.

GERSTER, HANS-DIETER; SCHULTZ, RITA (2004):

Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht.
Bericht zum Forschungsprojekt „Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen“. Hg. v. Pädagogische Hochschule Freiburg. Online verfügbar unter www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397/. Zuletzt abgerufen am 22.05.2017.

GRAY, EDDIE; PITTA DEMETRA; TALL, DAVID (2000):

Objects, Actions and Images: A Perspective on Early Number Development. In:
Journal of Mathematics Behavior 18 (4), S. 401–413.

KLUGE, FRIEDRICH; SEEBOLD ELMAR (2002):

Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache. 24. Aufl. Berlin.

LANDERL, KARIN; KAUFMANN, LIANE (2008):

Dyskalkulie. München.

MEYERHÖFER, WOLFRAM (2012):

Didaktik der Arithmetik 1–3, Teil 2. Addition/Subtraktion: Operationsverständnis und Routinisierung. Vorlesungsskript. Universität Paderborn.

MÜLLER GERHARD N.; WITTMANN, ERICH CH. (1994):

Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1 – Vom Einspluseins zum Einmaleins.
2. Aufl. Stuttgart.

PADBERG, FRIEDHELM (1994):

Schriftliche Subtraktion – Änderungen erforderlich! In: Mathematische
Unterrichtspraxis 15 (2), S. 24–34.

PADBERG, FRIEDHELM; BENZ, CHRISTIANE (2011):

Didaktik der Arithmetik. 4. Aufl. Heidelberg.

Rahmencurriculum Rechnen

Stufe 3

Thomas Jahnke
unter Mitarbeit von
Wolfram Meyerhöfer

3. DVV-RAHMENCURRICULUM RECHNEN STUFE 3

3.1 Ziele und Prinzipien

3.1.1 Mathematische Bildung – Funktionalität in und für Lebenssituationen und Teilhabe an der menschlichen Kultur

Es liegt nahe, Menschen mit geringen mathematischen Kenntnissen nur oder vorrangig eine funktionale, lebensstaugliche Mathematik zu lehren. Eine solche Beschränkung nimmt sie aber in ihrer Bildsamkeit nicht ernst und spricht ihnen das Recht auf Bildung ab. Mathematische Bildung sollte stets und für alle Menschen in einer ausgewogenen Balance und Verbindung von Funktionalität in Lebenssituationen und persönlicher Teilhabe an der menschlichen Kultur (Enkulturation) sein. Lebensorientierung und Kulturorientierung mathematischer Bildung sollten nicht als sich ausschließende, kontradiktorische Pole, sondern als sich gegenseitig durchdringende und bereichernde Aspekte betrachtet werden. Mathematik als Weltzugang eigener Art, als Modus der Weltbegegnung ist untrennbar verbunden mit einer Mathematik in und für Lebenssituationen, die ohne ein Reflexionswissen über Mathematik und die Charakteristik ihres Denkens nur eine Anhäufung von unverbundenen Faustregeln darstellt und einem unverstandenen Formelgehorsam unterworfen ist.

3.1.2 Entscheiden und Urteilen

Ein Ziel des Kurses ist, die Teilnehmer/-innen zu befähigen, in mathematikhaltigen Situationen mit Rechnungen, mathematischen und außermathematischen Abwägungen und Argumenten zu sinnvollen, vernünftigen und für sie zufriedenstellenden Entscheidungen zu kommen. Dies betrifft zunächst ihren individuellen Lebensbereich, in dem zuweilen mathematische Aktivitäten erforderlich sind. Hier stehen die Bewältigung, Bearbeitung und Gestaltung von mathematikhaltigen Lebenssituationen im Vordergrund. Zumeist begegnet man aber Situationen, deren mathematischer Gehalt bereits bearbeitet ist, z. B. an der Supermarktkasse oder bei Miet-, Energie- oder Lohnabrechnungen. Hier geht es darum, dass man nachrechnen und beurteilen kann, ob die mathematische Bearbeitung richtig und der Sachsituation angemessen ist, dass man sie nachvollziehen, befragen und auch anzweifeln kann. Diese Urteilsfähigkeit ist ein zentraler Bestandteil einer alltagstauglichen mathematischen Bildung und sollte im Kurs angestrebt und systematisch entwickelt werden.

3.1.3 Abgrenzung von der Schulmathematik

Lernen von Mathematik wird im Kern mit schulischem Lernen von Mathematik in eins gesetzt, und es ist nicht einfach, sich von dieser Kopplung gedanklich, pädagogisch und inhaltlich zu lösen. Auch wenn viele Inhalte dieses Kurses sich mit solchen aus den Jahrgangsstufen 4 bis 7 überschneiden, ist eine klare Abgrenzung von der Schulmathematik und ihrer Ausrichtung erforderlich. Der Kurs verfolgt eine deutlich andere Zielsetzung. Während schulisches Lernen auf einem langfristigen, in Teilen redundanten und spiralg angelegten Curriculum beruht und auch ein Vorratslernen

beinhaltet, ist das Lernen in diesem Kurs auf unmittelbare Ziele gerichtet. Während Schüler/-innen in der Einrichtung Schule nur langsam zunehmend die Verantwortung für ihr Lernen übernehmen, entscheiden Erwachsene von vornherein selbst, was und wie viel sie von dem angebotenen Stoff annehmen und aufnehmen. Nur ein solcher Angebotscharakter nimmt sie in ihrer Lebenssituation ernst und ermöglicht ihnen souveränes, selbstbestimmtes und selbsttätiges Lernen. Die Abgrenzung von der Schulmathematik sollte auch den Teilnehmern und Teilnehmerinnen des Kurses bewusst werden.

Die Teilnehmer/-innen waren in der Schule in der Regel nicht affin zum Fach Mathematik. Ein wesentlicher Grund dafür lag in der technischen Orientierung des Mathematikunterrichts. Damit ist gemeint, dass das Abarbeiten von Techniken des Rechnens, des Umformens, der Bestimmung von Koeffizienten usw. im Zentrum steht. Viele Lehrer/-innen glauben, dass „schlechte“ Schüler/-innen erst einmal Techniken üben müssten und dass nur die „Guten“ verstehen könnten, warum die Verfahren funktionieren. Man kann aber genau umgekehrt auf das Feld schauen: Die schwachen Schüler/-innen können (nur?) rechnen lernen, wenn sie verstehen, warum ein Verfahren funktioniert. Rechentechniken ohne Verständnis abarbeiten kann man hingegen nur bis zu einer bestimmten Komplexitätsstufe. Da die Verfahren im Verlauf der Schulzeit immer komplexer werden, bröckeln peu à peu immer mehr Schüler/-innen weg. Daraus ergibt sich für diesen Kurs folgende Orientierung:

In Teil 3.1 treten formalisierte Rechentechniken nur auf, wenn sie von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern eingebracht werden oder wenn sie dabei helfen, die von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern eingebrachten Lösungswege vertiefend zu diskutieren. In Teil 3.2 werden Rechentechniken nur vorsichtig formalisiert, soweit dies beim Verstehen hilfreich ist. Eine Mechanisierung von Rechentechniken wird nicht angestrebt. Wenn Techniken thematisiert werden, dann steht im Zentrum die Frage, wie sich diese Technik in die Lösungswege der Teilnehmer/-innen einordnet und warum die Technik funktioniert. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern sollte möglichst bewusst werden, warum sie die Technik früher nicht verstanden haben bzw. nicht routinisieren konnten.

Schulmathematische Aufgabenstellungen folgen nicht nur oftmals dieser technischen Orientierung. Wenn sie *reale Probleme* in den Blick nehmen, dann verabsolutieren sie in der Regel in unbewusster und nicht hinterfragter Selbstverständlichkeit die mathematische Perspektive. Anwendungen in Textaufgaben dienen häufig vorrangig oder sogar ausschließlich dazu, die gelernten mathematischen Inhalte und Verfahren zu üben, und nicht dazu, sich mit der gestellten Frage oder Situation tatsächlich auseinanderzusetzen.

Mathematik kann nur mathematische Probleme lösen. Problem- und Lebenssituationen, Fragen, die sich im Leben stellen, können aber mathematikhaltig sein, mathematische Perspektiven enthalten. Mathematik kann dann dazu beitragen, sie zu bearbeiten, aber immer nur als ein Teil, als ein Ansatz, als ein Zugang von mehreren möglichen, der vielen Teilnehmerinnen und Teilnehmern bislang eher verschlossen war. Letztlich ist aber das Gesamturteil niemals nur auf Mathematik gegründet, und wenn dies einmal so sein sollte, dann hat der Urteilende realitätsfremd entschieden, andere Perspektiven zurückzustellen. Ziel des Kurses ist einerseits, die Teilnehmer/-innen zu bereichern und zu befähigen, einen mathematischen Blick auf Situationen werfen zu können, andererseits aber auch die Grenzen dieses Blickes im

Auge zu behalten, wenn Entscheidungen in mathemathikhaltigen Situationen zu fällen sind. Schulzentriertes Wissen hat einen grundsätzlich anderen Charakter als lebensorientiertes Wissen, das darauf zielt, sich in Lebenssituationen selbstbestimmt und souverän zu bewegen und sie zu gestalten oder mitzugestalten.

Schulmathematik hat die Tendenz, zum traditionellen Ritual zu werden und ihre Zwecke nur in sich selbst und möglicherweise in einer bildungsmäßigen Selektion und der Zuteilung von Lebens- und Berufschancen zu sehen, ohne dass sie für sich beanspruchen kann, tatsächlich der Lebensvorbereitung zu dienen. Vor allem im ersten Teil des Kurses sollte die Mathematik hingegen den Anwendungen dienen und nicht die Anwendungen der Mathematik.

3.1.4 Lebensbereicherung statt Lebensvorbereitung

Lebensvorbereitung ist der falsche Terminus für erwachsene Kursteilnehmer/-innen, die auch vor dem Kurs ihr Leben organisiert, gestaltet und gemeistert haben und danach meistern werden. Ein Mensch mit geringen mathematischen Kenntnissen ist in gewissem Sinne und in stark abgeschwächter Form mit einem Menschen vergleichbar, der sich längere Zeit in einem Land aufhält, ohne die Landessprache zu beherrschen. Sein Handlungsspielraum und seine Mitwirkungs- und Gestaltungsmöglichkeiten sind eingeschränkt. Ohne eine lebensstaugliche mathematische Bildung ist man darauf verwiesen, in mathemathikhaltigen Situationen anderen zu ver- oder misstrauen, Entscheidungen anderen zu überlassen, sie zufällig und zum eigenen Nachteil zu fällen oder sie nach Möglichkeit gänzlich zu meiden. Solchen Einschränkungen entgegenzuwirken, ist ein zentrales Ziel des Kurses. Er soll die Teilnehmer/-innen stark machen und ihnen ein selbstbestimmtes Handeln, Entscheiden, Gestalten und Leben in solchen Situationen und auch darüber hinaus ermöglichen.

3.1.5 Ich-Stärke

Mathematische Bildung sollte wie alle Bildung die Teilnehmer/-innen stärken. Gegen diesen Grundsatz wird im schulischen Mathematikunterricht häufig verstoßen. Er erzeugt zuweilen eher eine falsche Hochachtung und Ängste vor diesem Metier und Minderwertigkeitsgefühle. Solche mathematische Sozialisation führt zu Unterwerfung und Anpassung und nicht zur Stärkung des individuellen Denkens. Mathematische Bildung sollte niemals nur als Kulturtechnik im affirmativen Sinne, sondern als Erweiterung und Gestaltungsmöglichkeit des eigenen Lebens- und Gedankenraumes gelehrt, gelernt, erworben, aufgebaut und sich zu eigen gemacht werden. Das Vertrauen in die eigene Person und die eigenen Fähigkeiten innerhalb und außerhalb der Mathematik zu stärken, ist ein zentrales Ziel dieses Kurses. Dazu müssen die Teilnehmer/-innen selbst tätig werden, diskutieren, Situationen untersuchen und erschließen. Es sollte sich also nicht um Unterricht im klassischen Sinne, sondern um Anleitung zum Selbstlernen, Denken und Arbeiten handeln, das von den Lehrpersonen zurückhaltend und ermutigend, aber nicht belehrend moderiert wird.

3.1.6 Didaktische Prämissen und Prinzipien

Mathematik im Kontext dient gleichermaßen der Erschließung der Welt wie der Erschließung der Mathematik. Elementarmathematik, ihre Begriffsbildungen und Argumente können und sollen aus Lebenssituationen, aus der erlebten Wirklichkeit emergieren, sich aus ihrer Beschreibung und Bearbeitung entwickeln, sich ergeben und entstehen. Das wurzelt sie in unser allgemeines Denken ein, lässt sie verständlich werden, macht sie zugänglich und öffnet sie. Im Kurs sollte das mathematische Denken zunächst nicht dem allgemeinen Denken trennend gegenübergestellt werden, sondern aus diesem und der Lebenserfahrung erwachsen, sie erweitern und in sie eingebettet werden. Prämissen und Prinzipien sind dabei:

- Muße
- Selbsttätigkeit
- Variation und Lösungsvielfalt
- Reichhaltigkeit
- Beziehungshaltigkeit
- Veranschaulichungen – Wechsel von Darstellungsarten
- einsichtige Begründungen und Formulierungen
- Kommunikation
- individuelles und dialogisches Lernen

Zur **Muße** gehört, dass man sich auf einen Gegenstand oder eine Fragestellung einlässt. Eine Frage verstehen, heißt sie sich stellen. So wird aus der Frage eine eigene, individuelle oder gemeinsame Frage, an deren Antwort man interessiert ist und arbeitet. In den Kurssitzungen sollte in der Regel nicht mehr als ein Themenfeld bearbeitet werden, um in Ruhe bei einem Sachzusammenhang zu verweilen, ihn gründlich zu erörtern. Ein Weiterschreiten setzt voraus, dass alle Kursteilnehmer/-innen mit der Fragestellung und ihrer Bearbeitung ausreichend vertraut sind und sich einen Fortgang wünschen.

Die **Selbsttätigkeit** ist eine grundlegende Voraussetzung für jedes Lernen. Man lernt nicht durch Mitteilungen und Anweisungen, sondern indem man selbst über die Dinge – häufig auch unter Anleitung und durch Anstöße – nachdenkt.

Bei der Bearbeitung einer mathematikhaltigen Sachsituation sind die **Vielfalt** von Lösungen und die **Variation** der Problemstellung von ausschlaggebender Bedeutung. Eine Lösung kann man nur finden und recht verstehen, wenn man unterschiedliche Wege einschlägt, wenn man eine zweite und dritte Lösung sieht, die das Problem gleichsam umkreisen und aus verschiedenen Blickwinkeln erscheinen lassen. Mehrere Lösungswege bieten zudem die Sicherheit, kohärent gedacht und gerechnet zu haben. Ein „Das geht doch so!“ hilft nicht zu verstehen, sondern drängt sich nur auf und drückt die eigenen Gedanken, ohne die ein eigenes Verstehen gar nicht möglich ist, weg. Man muss sich die Sache schließlich selbst klar machen. Mit fremdgedachten Lösungswegen sind die Teilnehmer/-innen oft genug gescheitert.

Aufgabenstellungen wie

*In einem Laden kostet eine Packung mit 30 Brausetabletten 6 Euro,
ein anderer Laden verkauft eine Packung mit 50 Brausetabletten für 8 Euro.
In welchem Laden sollte man die Tabletten kaufen?*

lassen vielfältige Bearbeitungswege zu:

Man überlegt,

1. wie viele Tabletten jeweils 1 Euro kosten.
2. wie viele Tabletten jeweils 2 Euro kosten.
3. wie viel 10 Tabletten jeweils kosten.
4. wie teuer eine Tablette jeweils ist.
5. dass 5 Packungen aus dem einen Laden so viele Tabletten enthalten wie 3 Packungen aus dem anderen Laden.
6. wie viele Tabletten man jeweils für 24 Euro erhält.
7. wie viel 100 Tabletten jeweils kosten.
8. wie viel man in dem ersten Laden für 50 Tabletten zahlt.
9. wie viel man im dem zweiten Laden für 30 Tabletten zahlt.
10. dass eineinhalb Packungen aus dem ersten Laden weniger Tabletten enthalten als eine Packung aus dem anderen, aber teurer als diese sind.

Auch die Berechnung, wie viel 30 % von 600 sind, lässt ganz unterschiedliche Rechenwege zu, die nicht durch einen Normansatz ersetzt oder standardisiert werden sollten.

Die **Variation** der Daten in Sachsituationen und Aufgaben macht diese durchsichtiger, schafft eine Vorstellung von den zu erwartenden Größenverhältnissen und bestätigt den Sinn der Rechnung.

Alltagsnahe mathematische Problemstellungen sind in der Regel komplex und lassen ganz unterschiedliche Fragestellungen und Perspektiven zu. Diese **Reichhaltigkeit** sollte im Kurs nicht eliminiert, sondern gepflegt werden. Anders als bei Schulaufgaben geht es bei Fragen, ‚die das Leben stellt‘, um verschiedene mögliche, sinnvolle Antworten und nicht um genormte Lösungswege, die einzuüben und zu memorieren sind. Vor allem Vergleichssituationen können reichhaltig sein und variantenreich bearbeitet werden.

Der Begriff **Beziehungshaltigkeit** geht auf den Mathematikdidaktiker Hans Freudenthal zurück. Er schreibt dazu:

„Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muss man nicht in erster Linie die Zusammenhänge direkt suchen; man muss sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das – ich meine die Wirklichkeit – ist das Skelett, an der sich die Mathematik festsetzt. [...] Wenn ich über beziehungshaltige Mathematik spreche, so lege ich den Nachdruck auf Beziehungen zu erlebter Wirklichkeit, nicht zu einer eigens zu diesem Zwecke konstruierten toten Scheinwirklichkeit, wie sie etwa im Rechenunterricht häufig heraufbeschworen wird.“ (Freudenthal 1997, S. 77 und 79)

Veranschaulichungen und der Wechsel von Darstellungsarten helfen in grundlegender Weise, eine Problemstellung zu verstehen und Ideen für ihre Bearbeitung zu entwickeln. Skizzen, Grafiken und Diagramme – wie vorläufig und zunächst unvollständig auch immer – führen (auch einfache) Sachsituationen vor Augen, machen sie sichtbar, übersichtlich und einsichtig; an ihnen kann sich ein Bearbeitungsplan und schließlich eine Lösung entwickeln.

Einsichtige Begründungen und Formulierungen sind für das Verstehen mathematischer Problembearbeitungen grundlegend und verhindern ein gedankenloses Anwenden oder undurchdachtes Übernehmen von Faustregeln, Verfahren und Formeln. Ihnen ist besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Die Argumentation ist – soweit möglich – an der Sache zu entwickeln und nicht mit oder innerhalb mathematischer Sprech- oder Schreibweisen.

Die **Kommunikation** über Sachverhalte und ihre mathemathikhaltigen Lösungen sollte nicht nur schriftlich – in unkommentierten Zeichenreihen – sondern auch mündlich erfolgen. Die schriftliche und mündliche Versprachlichung dient in gleicher Weise dem eigenen Verstehen wie dem Lernen und Verstehen anderer Kursteilnehmer/-innen: Lernen durch Dialog, gemeinsames Klären und gegenseitiges Erläutern. Zur Kommunikationsfähigkeit gehört nicht zuletzt, dass man in der Lage ist, ein Problem, mit dem man selbst nicht zurechtkommt, anderen darzustellen, wenn man sie um ihre Hilfe bitten will, und ebenso, dass man die Lösungen anderer befragen kann.

Individuelles und dialogisches Lernen statt Dozieren oder Erklären durch die Lehrperson sind die Richtschnur für den Kurs. Man muss sich zunächst eine Problemstellung selbst zu eigen machen, bevor man in den Dialog mit anderen tritt. Lernen und Verstehen sind individuell, der Austausch mit Partnern kann sie in Gang setzen und beflügeln, aber nicht ersetzen.

3.1.7 Gliederung der Stufe 3

Stufe 3 ist in zwei Teile gegliedert:

- Im Teil 3.2 „Mathematik im Leben“ werden mathematikhaltige Sachsituationen besprochen, befragt und bearbeitet.
- Im Teil 3.3 „Mathematik fürs Leben“ werden die mathematischen Erfahrungen und Erkenntnisse aus dem ersten Teil systematisiert und zu einer alltagstauglichen und lebenskundlichen mathematischen Bildung verbunden und verdichtet, die in den behandelten Sachsituationen erarbeitet wurde und sich nun auch in anderen Bereichen anwenden lässt.

3.2 Mathematik im Leben

Im ersten Teil des Kurses soll von konkreten Problemstellungen ausgehend Mathematik im Kontext gesehen und betrieben werden. Dies dient einerseits dem Kennenlernen des mathematischen Wissens und Könnens sowie der Problemlösestrategien der Teilnehmer/-innen, die ernst zu nehmen, auszubauen und nicht als defizitär zu betrachten sind, und andererseits einer ersten sanften und sorgfältigen Bearbeitung mathematikhaltiger Situationen. Die Tiefe der Behandlung wird zunächst im Wesentlichen durch das Vorwissen und Vermögen der Teilnehmer/-innen und deren Austausch bestimmt. Die Lehrperson soll hier gezielt Anstöße geben und Angebote machen, insbesondere solche, die nachgefragt werden, aber nicht Modelllösungen vorexerzieren oder ein festgelegtes Pensum abarbeiten.

Grundlage zur Erkundung und Behandlung der unten genannten Themenfelder sollten stets Materialien wie Kopien aus Kochbüchern, Kataloge von Reiseunternehmen, Fahrpläne, Prospektmaterial, Zeitschriftenartikel u. Ä. sein. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer werden selbst Fragen zu dem Material entwickeln, moderiert und ergänzt von der Lehrperson. Das Begreifen ist – wo möglich – auch wörtlich zu verstehen.

Eine Auswahl für die Inhalte von Kursteil 3.2

- Kochrezepte¹⁴
- Reisen
- Bankgeschäfte
- Einkaufen
- Mieten und Wohnen
- Energieverbrauch
- Löhne, Gehälter, Hartz IV
- Zahlen, Daten und Graphiken aus Zeitungen

Nicht alle diese Themenfelder sollen bearbeitet werden. Die Kursteilnehmer/-innen können hier über die Auswahl und Reihenfolge mitentscheiden, andere Vorschläge machen und auch aufgefordert werden, Material zu einem Themenfeld zu sammeln und mitzubringen.

Im Themenfeld „**Kochrezepte**“ kann man zunächst die Maßeinheiten klären, verschiedene Rezepte zum gleichen Gericht miteinander vergleichen und sie auf eine andere Personenzahl (z. B. 6 statt 4) umrechnen.

Im Themenfeld „**Reisen**“ kann man Fahrpläne studieren, Routen zusammenstellen, Reisezeiten und -kosten (Bahn, Auto, Flugzeug, Fähre) abschätzen, berechnen und vergleichen. Auch Pauschalreisen und die Buchung von Hotels und Ferienwohnungen geben Anlass zu Berechnungen und Vergleichen.

Im Themenfeld „**Bankgeschäfte**“ kann man sich mit den Kontoständen vor und nach Einzahlungen/Auszahlungen befassen, die Einträge in Sparbüchern klären und einen ersten Blick auf Zinsen werfen.

¹⁴⁾ Denkbar wäre, dass zum persönlichen Kennenlernen ein Essen nach einem dieser Rezepte gemeinsam gekocht und verzehrt wird.

Im Themenfeld „**Einkaufen**“ kann es um die Planung von kleineren und größeren Anschaffungen gehen, um den Vergleich von Angeboten und um Rabatte. Auch die Führung eines Ausgabenheftes kann hier besprochen werden.

Im Themenfeld „**Mieten und Wohnen**“ kann man Mieten vergleichen, sie aufschlüsseln (Kaltmiete/Warmmiete/Nebenabgaben/weitere feste Kosten) und anspruchsvoller die Wohnflächen in Beziehung zu den Miethöhen setzen.

Zum Themenfeld „**häuslicher Energieverbrauch**“ bietet sich die Durchführung eines Projekts zur Messung des Stromverbrauchs von Elektrogeräten an – mit Messgeräten, die vielerorts von den Stadtwerken oder lokalen Stromanbietern verliehen werden. Dies führt in naheliegender Weise zur Besprechung der auftretenden Größen, zur Anlage von Tabellen, zu Vergleichen, Hochrechnungen und Kalkulationen.

Im Themenfeld „**Löhne und Hartz IV**“ kann man Abrechnungen lesen und detailliert untersuchen, Stunden- und Monatslöhne in Beziehung setzen, Mindestlöhne (nach Branchen) und Hartz-IV-Zahlungen vergleichen.

Im Themenfeld „Zahlen, Daten und **Graphiken aus Zeitungen**“ geht es um das mediale Auftreten und den medialen Einsatz von Zahlen, Rechnungen und Mathematik. Ist dieser stimmig? Ist er durchsichtig und angemessen? Sind die hier getroffenen Aussagen, Folgerungen und Wertungen verständlich und nachvollziehbar? Sind Graphiken sinnvoll angelegt? Was besagen sie?

Weitere Themenfelder sind je nach der Interessenlage der Kursteilnehmer/-innen denkbar:

- Im Themenfeld „Nähen und Werken“ kann man Stückpläne aufstellen, den Materialverbrauch, die zugehörigen Kosten und den Zeitaufwand ermitteln und vergleichen.
- Im Themenfeld „Sport“ kann man Tabellen lesen, Ergebnisse aus verschiedenen Sportarten und Jahren untersuchen und vergleichen.
- Im Themenfeld „Spiele und Chancen“ kann man Würfel- und Glücksspiele untersuchen, Strategien und Gewinnchancen erörtern.

Die in den genannten Themenfeldern eingesetzte Mathematik soll den Situationen und Problemstellungen angemessen sein; Über-Mathematisierungen und Formalisierungen sind zu vermeiden. Will man z. B. ermitteln, ob es günstiger ist, einen Handyvertrag inklusive eines Handys für 24 Monate abzuschließen oder ein Handy zu kaufen und den Vertrag separat abzuschließen, ist es nicht erforderlich, eine Funktion aufzustellen, die die jeweiligen Kosten in Abhängigkeit von der Zahl der Monate erfasst, sondern es genügt, für beide Alternativen die Kosten für 24 Monate zu berechnen. Auch die Aufstellung von Gleichungen mit Variablen ist zur Beschreibung einfacher Sachsituationen meist nicht erforderlich. Wenn man etwa errechnen will, wie viele Personen an einem Ausflug mit einem für 500 € gemieteten Bus teilnehmen müssen, damit der Fahrpreis für den Einzelnen nicht höher als 12,50 € ausfällt, bietet es sich an, eine kleine Divisions- oder Multiplikationstabelle anzulegen, aus der das Ergebnis nicht nur ersichtlich, sondern auch durchschaubar ist.

Mathematische Begriffe und Verfahren sollen nicht um ihrer selbst willen benutzt und entwickelt werden, sondern in der Regel nur so weit, wie es die Problemstellung erfordert. Soweit das möglich ist, sollten sie in der Bearbeitung von Sachsituationen als nützliche und notwendige Werkzeuge entstehen. Andererseits sind mathematisch falsche Ausdrucks- und Schreibweisen, auch wenn sie zu richtigen Ergebnissen führen, wie zum Beispiel in der sukzessiven, dem Rechnen im Kopf nachgebildeten Addition $28 + 17 = 28 + 10 = 38 + 7 = 45$, sanft und nachvollziehbar zu korrigieren. Insgesamt sollen also sowohl die jeweilige Sache als auch das mathematische Handwerkszeug und ihre Nutzer/-innen ernst genommen werden.

Wichtige Tätigkeiten für Mathematik im Leben sind

- Überschlagen,
- Schätzen,
- Größenordnungen überblicken und
- Umgehen mit Taschenrechnern und Computern (z.B. Tabellenkalkulationssoftware).

Sie sollten im Kurs durchgehend gepflegt und geübt werden.

Manche der Teilnehmer/-innen (z.B. Hausmeister) sehen sich zunehmend mit der beruflichen Anforderung konfrontiert, Tabellenkalkulationssoftware zu verwenden. Der Kurs kann ihnen zeigen, dass diese Programme ihnen Rechenarbeit abnehmen können – weshalb sie anfangs auch als „elektronische Rechenblätter“ bezeichnet wurden. Sind solche Programme verfügbar, dann können damit Tabellen angelegt und Daten in Balken- und Kreisdiagrammen veranschaulicht werden. An solchen elektronischen Rechenblättern kann man auch anhand der Verknüpfung der Felder einen ersten sinnvollen und inhaltlichen Zugang zum Funktionsbegriff gewinnen, der in diesem Kurs nicht explizit benannt und diskutiert werden soll.

Das Überschlagen sollte nahezu jeder Rechnung vorausgehen. In vielen Situationen ist es wichtiger und nützlicher als eine genaue Rechnung. Es schafft Sicherheit beim Rechnen und ermöglicht, ein eigenes oder fremdes Rechenergebnis auf seine Stimmigkeit zu prüfen.

- Stimmt eine Restaurantrechnung von 47 € in etwa, wenn vier Personen je eine Pizza und ein Getränk bestellt hatten?
- Was kostet eine Pauschalreise für 572 € ungefähr, wenn ein Frühbucherrabatt von 35 % eingeräumt wird?
- Was wird mein Einkauf in einem Lebensmittelladen in etwa kosten?
- Wie viel kosten Straßenbahn- und Busfahrten einer 4-köpfigen Familie im Monat? Werden 100 € dafür ausreichen?
- Reichen zehn Euro, um Brot, Butter, Wurst, Käse, Zahnpasta und Briefmarken zu kaufen?
- Wie viel kostet ein Auto monatlich?
- Wie viele Flaschen Wasser, Bier und Wein sollte man für eine Einladung von 12 bis 14 Personen bereitstellen?

- Wie viel Pfand werde ich für eine Einkaufstasche voller Glas- und Plastikflaschen erhalten? Oder irrt der Automat?

Beim **Schätzen** geht es darum, in Situationen, in denen man weder Werte noch Näherungswerte für Größen kennt, vernünftige Werte zu schätzen und Argumente für diese Schätzungen vorzubringen.

Das **Überblicken von Größenordnungen** ist für das Überschlagen und Schätzen grundlegend, und man übt das eine mit dem anderen und umgekehrt.

Der verständige **Umgang mit Taschenrechnern**, wie sie zum Beispiel in mobilen Telefongeräten eingebaut sind, **und Computern** (z. B. Tabellenkalkulationssoftware) erleichtert und stützt das eigene Rechnen. Ohne ein sinnvolles und der Situation angemessenes Runden kommt man hier leicht zu übergenauen oder unsinnigen Ergebnissen.

3.3 Mathematik fürs Leben

Im zweiten Teil des Kurses sollen die im ersten Teil in Problemsituationen verwendeten mathematischen Begriffe, Argumentationen und Verfahren systematisiert, verbunden und zueinander in Beziehung gesetzt werden. Ausgangspunkt sind nun jeweils mathematische Themenfelder, bei denen man auf die Beispiele aus Kursteil 3.2. zurückgreifen oder weitere entwickeln kann. Auch hier sollen also die mathematischen Inhalte ihre Korrespondenz in der erfahrenen Wirklichkeit finden.

Inhalte von Kurs 3.3

- Zahlen
 - Größen und Maßeinheiten
-
- Prozentrechnung
 - Statistik – einfache Begriffe und Maße
 - Tabellen und Grafiken
-
- Proportionalität und Antiproportionalität
 - Dreisatz
 - Lineare Gleichungen und Funktionen
-
- Flächen und Körper
-
- Chancen

Die ersten drei Blöcke umfassen Inhalte, die auch als „Bürgerliches Rechnen“ bezeichnet und im täglichen Leben als unverzichtbar betrachtet werden. Sie sind obligatorisch. Die Reihenfolge der Themen innerhalb der Blöcke ist nicht festgelegt. Zumeist wird es sich anbieten, diese Themen nicht nacheinander, sondern gleichzeitig und miteinander zu bearbeiten.

Themenfeld „Zahlen/Maßeinheiten“

In diesem Themenfeld ist das Folgende zu behandeln:

Das Rechnen mit mehrstelligen natürlichen Zahlen

Hier geht es ums Prinzip, bei der Multiplikation etwa um das Vervielfachen mit 10, um das Verdoppeln und Halbieren und an Beispielen um den distributiven Charakter der Multiplikation. Die Rechnungen werden dann mit einem Taschenrechner durchgeführt. In diesem Zusammenhang können auch die Notation und die Bezeichnungen von großen Zahlen behandelt werden.

Dezimalzahlen

Anknüpfend an reale Situationen können hier zunächst Geldbeträge, Temperaturen, Längen und Zeiten im Leistungssport und Benzinpreise wie 154,9 Cent betrachtet und erläutert werden. Dann erfolgt eine Erweiterung der Stellenwerttafel (vgl. Stufe 2) auf Zehntel, Hundertstel und Tausendstel.

Runden und Näherungswerte

Bei Rechnungen mit Dezimalzahlen mit dem Taschenrechner ist ein vernünftiges Runden zu besprechen.

Einfache Bruchzahlen

Einfache Bruchzahlen wie $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ können in Anwendungssituationen als Maßzahlen von Größen behandelt werden. Es sollten hier nur Beispiele betrachtet werden, die in natürlicher Weise auf Bruchzahlen führen, wie etwa Aufteilung eines Erbes (an den Ehepartner, drei Kinder und zwei Enkel). Ein elaboriertes Beispiel ist ein amerikanisches 16-teiliges Mauschlüssel-Set, das in aufsteigender Größe, wie folgt, beschriftet ist:

$1/4'' - 5/16'' - 3/8'' - 7/16'' - 1/2'' - 9/16'' - 5/8'' - 11/16'' - 3/4'' - 13/16'' - 7/8'' - 15/16'' - 1'' - 1.1/16'' - 1.1/8'' - 1.1/4''$.

Wie lässt sich diese Beschriftung und Ordnung erklären?

Gängige Maßeinheiten

Gängige Maßeinheiten gelten für Gewichte, Entfernungen, Zeiten u. Ä.

Das Umrechnen von Maßeinheiten

Das Umrechnen von Maßeinheiten erfolgt auch in größere und kleinere der gleichen Art. Anspruchsvoller kann man zum Beispiel fragen, mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit in km/h ein 100-m-Läufer diese Strecke zurücklegt oder wie viele Meter man bei einer Autofahrt mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h, 120 km/h oder 130 km/h in einer Sekunde zurücklegt.

Themenfeld „Prozentrechnung/Statistik/Tabellen und Grafiken“

Hier ist die Prozentrechnung ohne begrifflichen Aufwand wie Grundwert, Prozentwert, Prozentsatz etc. zu behandeln. Es genügt ein Prozentbegriff auf der Grundlage von $p\% = \frac{p}{100}$. Formeln, wie sie die gängigen Schulbücher anbieten, sind zu vermeiden. Sie verstellen nur das inhaltliche Begreifen durch formales Operieren und durch das überflüssige Kodieren und Dekodieren von Formvariablen und Parametern. Im Dezimalsystem ist es einfach, 1 % einer Größe oder Zahl zu bestimmen, aber es ist

bei vielen Fragestellungen nicht erforderlich oder angebracht, in einer Art Dreisatz-
manier stets zunächst 1 % zu ermitteln: 15 % von 600 kann man auch in naheliegen-
der Weise ermitteln, in dem man die Zahlen 60 (als 10 % von 600) und 30 (als die
Hälfte der ermittelten 10 %) addiert.

Eine multiplikative Auffassung des Prozentbegriffs (35 % von 600 erhält man durch
die Rechnung $600 \cdot 0,35 = 210$) vereinfacht die Prozentrechnungen auf schlichte
Multiplikations- und Divisionsaufgaben, sollte aber erst nach einer nachvollziehba-
ren Grundlegung des Prozentbegriffs („50 % von“ bedeutet die „Hälfte von“, „25 %“
bedeutet „ein Viertel“, „10 %“ sind „ein Zehntel“ usw.) eingeführt werden, damit das
Rechnerisch-Formale nicht das inhaltliche Verständnis überlagert und in den Hinter-
grund drängt.

Eine Analyse von Tankquittungen, bei der auffällt,
dass der ausgewiesene Mehrwertsteuerbetrag
nicht 19 % des Gesamtbetrages sind, kann hier
einen Abschluss darstellen.

TANKQUITTUNG	
Diesel	42,56 Liter
	1,419 €/Liter
Gesamtbetrag	60,39 €
Netto	50,75 €
Mwst. 19 %	9,64 €
Brutto	60,39 €

Im Rahmen der Prozentrechnung ist auch das Thema „Zinsen“ anzusprechen und
in seinen Grundzügen zu bearbeiten: Guthabenzinsen bei Sparbüchern und Schuld-
zinsen bei Konsumentenkrediten und deren Rückzahlung. Die Behandlung der
Dynamik von Zinseszinsentwicklungen, die nicht nur bei Bankgeschäften, sondern
auch bei der elementaren Modellierung von Wachstumsprozessen eine charakte-
risierende Rolle spielt, könnte hier einen allgemeinbildenden Schlusspunkt setzen
(vgl. Kirsch 1977).

In der Statistik sind anknüpfend an das Themenfeld „Graphiken“ aus Zeitungen
und anderen Quellen aus Teil 3.2 an inhaltlichen Beispielen in natürlicher Weise die
Begriffe „Maximum“, „Minimum“, „arithmetisches Mittel“ und „Medien“ einzuführen.
Einfacher kann man auch vom größten und vom kleinsten Wert, vom „Durchschnitt“
und vom „mittleren Wert“ sprechen. In diesem Zusammenhang sind Stab- und Kreis-
diagramme zu besprechen. Die Anlage und Beschriftung solcher Diagramme sollte
an einfachen, inhaltlich sinnvollen und für die Kursteilnehmer/-innen überschaubaren
und aussagekräftigen Beispielen thematisiert werden. Denkbar ist hier auch die Ein-
beziehung von Computersoftware zur Erstellung solcher Diagramme. Ebenso wichtig
ist die Sichtung von Grafiken aus Zeitungen und anderen Quellen, ihre Interpretation,
die Überprüfung ihrer Aussage und Angemessenheit.

Das Erstellen von Tabellen ist ein probates und häufig unterschätztes Mittel, ein Pro-
blem zu verstehen, aufzubereiten und zu bearbeiten. In vielen Fällen sind sie geeig-
net, eine Formelschreibweise zu vermeiden und sich stattdessen schrittweise einen
Überblick zu verschaffen und an der Sache selbst zu arbeiten.

Themenfeld „Proportionalität und Antiproportionalität/Dreisatz“

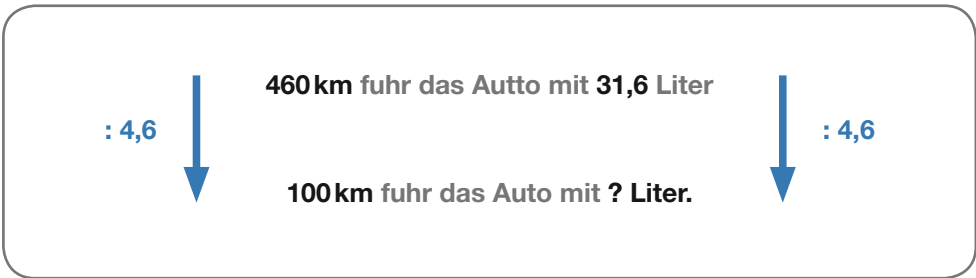
Die Begriffe „Proportionalität“ und „Antiproportionalität“ sind an geeigneten Sachsituationen zu entwickeln. Auch hier geht es nicht um ein Erlernen von Begriffen, sondern ein Erfassen von proportionalen Situationen: dem Vielfachen (Doppelten, Dreifachen, Vierfachen usw.) einer Größe entspricht das gleiche Vielfache (Doppeltes, Dreifaches, Vierfaches usw.) einer anderen Größe, was sich durch Tabellen entwickeln und erschließen sowie durch Pfeilbilder veranschaulichen lässt. Wichtig ist eine sprachliche und verständliche Fassung und nicht eine formelmäßige Darstellung. Gleiches gilt für Situationen, denen eine antiproportionale Zuordnung von Größen zugrunde liegt: dem Doppelten, Dreifachen, Vierfachen, Fünffachen usw. der einen Größe entspricht die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel, ein Fünftel usw. der anderen Größe.

Der sogenannte „Dreisatz“ ist eine Möglichkeit, bei proportionalen und bei antiproportionalen Entsprechungen von Größen Schlüsse zu ziehen. Er sollte aber nicht standardisiert, formalisiert oder als mathematisches Verfahren expliziert und herausgestellt, sondern inhaltsbezogen und zumeist in ganzen deutschen Sätzen vollzogen werden. Man kann dann auch zur Abkürzung zu einer Pfeilschreibweise übergehen, wenn sich das anbietet und der Sache und dem Verständnis der Kursteilnehmer/-innen dient. Vielfach ist das mechanische „Über-die-Einheit-Gehen“ beim Dreisatz nicht erforderlich und eher inhaltsfern: Wenn man zum Beispiel weiß, dass 4 Brötchen 1,20€ kosten, dann ergibt sich daraus unmittelbar, wie viel 2 oder 8 oder 6 oder 10 Brötchen kosten, ohne dass man den Preis eines Brötchens als Zwischenergebnis errechnen müsste.

Problemstellungen, denen eine Proportionalität oder Antiproportionalität zugrunde liegt, lassen sich stets auf ganz verschiedene Weisen mit einem Dreisatz bearbeiten; ein inhaltliches Beispiel zeigt die skizzierte Bearbeitung der Aufgabenstellung auf Seite 133. Zunächst ist in Sachsituationen stets zu prüfen, ob sie durch eine proportionale oder antiproportionale Entsprechung von Größen erfasst werden können oder ob dies nicht der Fall ist. Ein Höhepunkt, was die Komplexität anlangt, kann möglicherweise in einer Aufgabenstellung der folgenden Art erreicht werden:

Frau Meyer stellt beim Tanken fest, dass ihr Auto auf einer 460km langen Fahrt 31,6 Liter Diesel verbraucht hat. Wie viele Liter Diesel verbraucht das Auto durchschnittlich auf 100km?

Wenn man durchschaut hat, dass 460km das 4,6-fache von 100km sind und damit 100km der 4,6-te Teil von 460km,



führt die Aufgabe auf die schlichte Division $31,6 : 4,6 \approx 6,9$, die man mit einem Taschenrechner ausführen und mit dem Überschlag $32 : 5 = 6,4$ oder $32 : 4 = 8$ oder $30 : 5 = 6$ überprüfen kann.

Bei der Auswahl der Aufgabeninhalte ist die Lebenssituation der Teilnehmer/-innen zu berücksichtigen. Diese vorstehende Aufgabe wird man also nur stellen, wenn wenigstens einige der Kursteilnehmer/-innen über ein Auto verfügen, ein solches Gefährt also überhaupt im Rahmen ihrer Lebensinteressen auftaucht.

Lineare Gleichungen und Funktionen

Lineare Gleichungen und Funktionen sollten in dem Kurs nur angesprochen werden, wenn dafür Zeit und Muße bleiben und die davor stehenden Inhalte ausreichend und zufriedenstellend bearbeitet wurden. Mit linearen Funktionen kann man Sachsituationen mathematisch erfassen, in denen zum Beispiel ein Grund- und ein Einheitenpreis vorliegen, wie etwa bei der Kostenberechnung des Strom- oder Gasverbrauchs.

Es ist aber daran zu erinnern, dass auch die Fragestellung, welcher Tarif welches Energieanbieters bei welchem Verbrauch günstiger ist, durch das Anlegen einer Tabelle zufriedenstellend und einsichtig beantwortet werden kann. Den Steigungsbegriff einzuführen, hat in dem Kurs nur einen Sinn, wenn er zur Bearbeitung lebensnaher Problemstellungen nützlich und Gewinn bringend ist. Hier kann man etwa die Verkehrsschilder für Steigung und Gefälle besprechen und die Frage aufwerfen, ob es Steigungen mit mehr als 100 % geben kann.



Themenfeld „Flächen und Körper“

Hier können einfache Umfangs- und Inhaltsberechnungen von Flächen und einfache Oberflächen- und Volumenberechnungen von Körpern stattfinden. Einschränkend ist allerdings zu sagen, dass viele Aufgabenstellungen hier eher künstlich sind. Will man etwa aus dem Quadratmeterpreis einer Teppichware die Kosten für die Auslegung eines 3,5 Meter mal 4 Meter großen Wohnzimmers ermitteln, dann sind nicht nur die Größe, dessen Bodenfläche und mögliche Versprünge und Erker zu berücksichtigen, sondern auch, wie breit die Bahnen sind, in denen die Teppichware angeboten wird. Auch beim Kauf eines Aquariums ist man auf den Erwerb von Normgrößen angewiesen. Man könnte aber verschiedene Aquariengrößen vergleichen und berechnen, wie viel Liter Wasser sie fassen und welche Kosten mit ihrer Füllung verbunden sind. Ebene Koordinaten können anhand von Spielen (wie Schach und Schiffe-Versenken) oder Landkarten angesprochen werden. Eine Abfolge von Zeichnungen zum Zusammenbau von Möbeln kann raumgeometrisches Denken anregen, bedarf aber kaum schulmathematischer Begrifflichkeiten. Die Planung einer Küche mit entsprechender Software schult das Vorstellungsvermögen.

Optionales Themenfeld „Chancen“

Dieses Themenfeld kann Wahrscheinlichkeiten, die zum Beispiel in Würfel- und Kartenspielen und in Lotterien auftreten, ermitteln, vergleichen und der Teilnahme an Automaten- und Lottospielen sowie der damit verbundenen Geldausgabe entgegenwirken. Das für die Kursteilnehmer/-innen bildende Erlebnis kann darüber hinaus darin bestehen, dass sie erkennen, dass man auch Zufallssituationen mathematisch erfassen kann.

LITERATURVERZEICHNIS STUFE 3

FREUDENTHAL, HANS (1977):

Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd 1. Stuttgart 1977.

KIRSCH, ARNOLD (1977):

Zur Behandlung von Wachstumsprozessen, unter: <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1977%20Band%201%20Salzburg/Kirsch1977.pdf>, zuletzt abgerufen am 22.05.2017.

Rahmencurriculum Rechnen

Geometrie

Bernd Wollring

4. DVV-RAHMENCURRICULUM RECHNEN GEOMETRIE

4.1 Rahmen

Das folgend vorgestellte *Curriculum zur Geometrie* für Belange der Erwachsenenbildung soll eine Grundlage schaffen, auf der Erwachsene die geometrischen Kompetenzen des Grundschulabschlusses erwerben können und eine Basis für die Kompetenzen in der weiterführenden Schule bis hin zum achten Schuljahr gewinnen.

Ein solches Curriculum ist ohne Kenntnis der spezifischen Situation der Lernenden und Lehrenden schwierig zu formulieren. Es muss aufgrund der Unterschiedlichkeiten der zu erwartenden Voraussetzungen *adaptive Strukturen* tragen. Die Realisierung von Kursen und Lernangeboten ist daher im hohen Maße von der Lernkompetenz der Lernenden und der Strukturierungskompetenz der Lehrenden abhängig.

4.2 Von „Geometrie“ zu „Raum und Form“

Als inhaltsbestimmende Quellen für das zu entwerfende Curriculum lassen sich u. a. Texte zu Kompetenzmodellen nutzen, insbesondere die *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK) im Fach Mathematik für den Primarbereich* (KMK 2005 a), die *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss* (KMK 2005 b) und der Text *Basiskompetenzen Mathematik* (Drücke-Noé 2011). In diesen Texten sind die Inhalte, die man unter Geometrie subsumiert, auf drei Inhaltsbereiche verteilt, schwerpunktmäßig auf den Inhaltsbereich *Raum und Form*, aber wesentlich auch auf die Inhaltsbereiche *Größen und Messen* und *Muster und Strukturen*. Gelegentlich erwecken diese Inhaltsbereiche den Eindruck, voneinander getrennte Sachgebiete darzustellen. Tatsächlich aber sind sie eng miteinander verbunden, sodass ein *Curriculum zur Geometrie* in jedem Fall diese drei Bereiche erfassen muss.

Als Inhaltsbereiche, die den Kern der Mathematikbildung für den Primarbereich ausmachen, werden gemeinhin die basalen Bereiche *Zahlen und Operationen* und *Raum und Form* angesehen. Sie sind zwar eng aufeinander bezogen, tragen jedoch auch deutlich voneinander unterscheidbare Strukturen. In dem klassischen Modell zum Intelligenzbegriff von Thurstone (Thurstone 1938) sind zwei der sieben Intelligenzfaktoren *Zahlensinn* und *Raumvorstellung*, wobei die Begriffe jeweils die Kernidee dieser Inhaltsbereiche charakterisieren. Von den sieben primären Intelligenzfaktoren nach Thurstone (alphabetisch gelistet)

1. **Argumentieren (reasoning)**
2. Auffassungsgabe (perceptual speed)
3. Beherrschen der Sprache (verbal comprehension)
4. Flüssige verbale Ausdrucksfähigkeit (word fluency)
5. Gedächtnis (memory)
6. **Raumvorstellung (space)**
7. **Zahlensinn (number)**

betreffen alle zu einem gewissen Grade die Mathematik und die drei letztgenannten unmittelbar die Geometrie und das Messen. Thurstone kennzeichnet seine Intelligenzfaktoren zwar als unabhängig, aber zumindest im hier betroffenen Bereich der Mathematik für die basale Bildung ist davon auszugehen, dass diese drei in engem Zusammenhang stehen.

Der Deutsche Volkshochschul-Verband (DVV) ist in der Gestaltung seiner Curricula nicht darauf verwiesen, sich nach den von den Kultusministerien herausgegebenen Lehrplänen zu richten. Eine über die einzelnen Bundesländer hinausgehende Sichtweise gewinnt man durch Aufnahmen des gemeinsamen Kerns, auf den all diese Lehrpläne sich korrekter Weise beziehen sollten. Diese sieht der Autor in den *Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich* (KMK 2005 a) und den entsprechenden *Bildungsstandards zur Mathematik für den Hauptschulabschluss* (KMK 2005 b). Diese Bildungsstandards sind nach Auffassung des Autors, der sie aus der Perspektive des Mathematikers und Mathematikdidaktikers sieht, ein Text, der auch derzeit (2016) ein angemessener Bezugspunkt zur Konstruktion von Curricula ist. Aus diesem Grund, und nicht aus Gründen politischer Passung, werden die Bildungsstandards daher auch hier als Bezugspunkt für das vorliegende Curriculum herangezogen. Auch wenn sie in konkreten Kursen nicht immer in vollem Umfang zu erfüllen sind, so bilden sie doch eine sehr nützliche und zudem konsensfähige stoffliche Orientierung.

Weit wesentlicher aber als diese Orientierung an einzelnen Inhalten ist das in den Bildungsstandards implementierte zentrale Konzept, das der Autor dieses Textes aus seiner Sicht in verdichteter Form etwa wie folgt kennzeichnet: „Mathematik ist mehr als Fertigkeiten und Mathematik ist mehr als Rechnen.“ Diese eher negative Formulierung wird hier zum Positiven gewendet und zu folgendem Statement erweitert:

**Mathematik ist inhaltlich mehr als Rechnen,
sie ist wesentlich auch das Befassen mit Gestalten und Räumen.
Mathematik ist vom Tun her mehr als Fertigkeit,
sie ist wesentlich auch das Nutzen und Entwerfen von Strategien zum
Problemlösen.**

Diese beiden zentralen Aspekte sind auf allen Bildungsebenen zu verwirklichen, sowohl im Kleinen, etwa im Kindergarten, ebenso wie im Großen, etwa bei der Konzeption von Studienprogrammen für Lehrer/-innen und Ingenieure/-innen. Der Autor dieses Textes sieht sie daher auch als angemessenen Orientierungsrahmen für ein den Anliegen des DVV nützliches Curriculum.

Insbesondere der Inhaltsbereich *Raum und Form* erscheint in den Bildungsstandards besonders gelungen und wird daher hier direkt zur Kennzeichnung des Curriculums genutzt.

4.3 Programmatischer Leitbegriff „Raumvorstellung“

Raumvorstellung – programmatischer Leitbegriff zur Kompetenzbeschreibung bei Raum und Form.

Beim Konzipieren von Kursen für spezifische Lerngruppen sind vielfältige Anforderungen zu beachten; die curricularen und situationsspezifischen Entscheidungen hängen von vielfältigen Gestaltungsansprüchen und von spezifischen situativen Gegebenheiten ab. Es erscheint daher sinnvoll, oberhalb einer detailreichen Kennzeichnung des Curriculums zur Geometrie einen zentralen programmatischen Leitbegriff zu installieren und zu entfalten, der jederzeit beim Konzipieren spezifischer Arbeitssituationen und dem Design eigener Lehrgangsteile Orientierung und Information bietet. Dazu gewählt wird hier der Begriff „**Raumvorstellung**“, der im Folgenden für den hier vorgesehenen Praxisgebrauch entfaltet wird und dessen Kenntnis das zentrale Orientierungswissen bietet.

**Das Kriterium zum Beurteilen von Arbeitssituationen
in den geplanten Kursen oder Lehrgangsteilen zur Geometrie lautet stets:
Trägt die aktuelle Arbeitssituation dazu bei,
Raumvorstellung zu entwickeln und zu fördern?
Gilt dies, so ist die Lernumgebung angemessen oder gut,
gilt dies nicht, so ist sie für die Geometrie von untergeordnetem Nutzen.**

Realisierungen des Inhaltsbereichs *Zahlen und Operationen* in Form von Curricula, gleich ob in der Erwachsenenbildung oder in der Schule für Heranwachsende, haben stets als zentrale Programmatik das *Loslösen vom zählenden Rechnen*, das zudem an Gegenstände gebunden sein kann, und das *Erwerben eines strukturierten Zahlbegriffs*, mit dem sich Rechenstrategien auch unabhängig von sie betreffenden Gegenständen durchführen lassen. Die schlussendlich angestrebte Kompetenz besteht wesentlich darin, das strategische Rechnen mit dezimalstrukturierten Zahlen auf symbolischer Ebene zu beherrschen. Um diese Kernidee herum lassen sich sämtliche curricularen Konzepte zu *Zahlen und Operationen* kennzeichnen (vgl. Meyerhöfer, W.; Hartmann, C.; Jahnke, T.; Wollring, B.: DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e.V. Bonn 2017, Seite 11–114).

Realisierungen des Inhaltsbereichs *Raum und Form* erfordern dagegen eine andere Schwerpunktsetzung. Zunächst fällt auf, dass geometrische Gegenstände (was immer man darunter versteht) konkreter aufzufassen sind als Zahlen. Es gibt auch keine dem dezimalen Stellenwertsystem entsprechende globale Struktur, und es gibt keine den Normalverfahren des schriftlichen Rechnens entsprechenden Standardverfahren bei geometrischen Operationen. Dies führt bisweilen bei in der Mathematik weniger erfahrenen Lehrenden zu der Auffassung „Geometrie gehöre gar nicht zur Mathematik“. Das trifft so nicht zu, die Anforderungen und Kompetenzen sind lediglich anders strukturiert.

Ähnlich wie der Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen* global durch den Kompetenzfaktor Zahlensinn zu charakterisieren ist, lässt sich das mit diesem Inhaltsbereich verbundene Ziel im Kern zusammenfassen durch die Kompetenz „**Raumvorstellung erwerben und ausbauen**“.

Wir sprechen weniger von *Geometrie*, sondern eher von *Raum und Form*. Damit sind zwei Intentionen verbunden: Zunächst assoziiert man mit dem Wort „Raum“ unmittelbar den „dreidimensionalen“ 3-D-Raum. Gemeint sind jedoch sowohl zweidimensionale Ebene (2-D-) als auch dreidimensionale räumliche (3-D-) Objekte. Das ist jedoch nicht die einzige Intention. Bedeutsamer ist, dass in den einzelnen Inhaltsbereichen,

- sich im Raum orientieren,
- elementare Figuren kennen und herstellen können,
- elementare Abbildungen kennen und herstellen können und
- Strategien zur Flächen- und Rauminhaltsbestimmung kennen,

der dritte Inhaltsbereich besondere Anforderungen stellt. Denn dabei geht es nach Auffassung des Autors nicht nur um die Gegenstände, sondern um *Zusammenhänge* von Gegenständen und um *Prozesse*, die man auf diese Gegenstände anwendet.

Es geht, kursorisch gesprochen, um das Umgehen mit Figuren im Raum.

Raumvorstellung – Piagets Kennzeichnung und Erweiterungen.

Zum begrifflichen Fassen von Raumvorstellung kann man aktuelle psychologische Definitionen aufnehmen. Diese zerlegen den Begriff meist in „Faktoren“ (vgl. Rost 1977), haben aber alle einen gemeinsamen Kern, der bereits bei Piaget beschrieben ist (vgl. Piaget & Inhelder 1971). Hier wird Raumvorstellung in enger Anlehnung an Piaget gekennzeichnet. Piaget verwendet dabei den Begriff „verinnerlicht“. Er spricht vom „verinnerlichten Sehen“ und meint damit eine Vorstellung, die nicht durch materielle Gegenstände realisiert ist. Eine entsprechende Kennzeichnung ist zunächst diese:

Raumvorstellung nach Piaget (1)

Raumvorstellung ist die Fähigkeit, räumliche Gegenstände

1) verinnerlicht sehen zu können.

Das bedeutet das Abstrahieren davon, dass der Gegenstand materiell vorliegt: „Man kann ihn sehen, auch wenn er nicht da ist.“ Aber wesentlich kommt bei Piaget eine Verfügbarkeit des verinnerlicht Gesehenen hinzu, etwas, das man mental mit ihm tun kann:

Raumvorstellung nach Piaget (2)

Raumvorstellung ist die Fähigkeit, räumliche Gegenstände

1) verinnerlicht sehen zu können und

2) verinnerlicht bewegen zu können.

Für den Gebrauch in den hier vorgesehenen Kursen wird dieser Begriff nun weiter entfaltet. Das genannte Bewegen muss sich nicht immer auf einen Gegenstand als Ganzes beziehen. Häufig betrifft es nur Teile davon. Entsprechend wird der Begriff erweitert:

Raumvorstellung in Anlehnung an Piaget (3)

Raumvorstellung ist die Fähigkeit, räumliche Gegenstände

1) verinnerlicht sehen zu können,

2) verinnerlicht bewegen zu können und

3) verinnerlicht zerlegen und zusammenbauen zu können.

Diese Kompetenz kann man „mentales Bauen“ oder „konkrete Raumvorstellung“ nennen, weil man auf konkrete reale Erfahrungen zurückgreifen kann.

Beispiel: „Fröbel-Würfel“

Gegeben sind viele gleich große Holzwürfel. Einer sei auf den Tisch gestellt.

Wie viele benötigt man, um daneben den nächstgrößeren Würfel zu bauen?

Lösung: Dazu benötigt man 8 Würfel

Dieses Beispiel ist Gegenstand der „dritten Gabe“ von Friedrich Fröbel (vgl. Fröbel 1840), mit der junge Kinder aus acht gleichen Würfeln spielend als „Erkenntnis-Form“, wie er es nennt, einen neuen Würfel mit doppelter Kantenlänge, vierfacher Oberfläche und achtfachem Rauminhalt bauen.

Über dieses mentale Bauen hinausgehend und anspruchsvoller ist die Art Raumvorstellung, die in den folgenden beiden Aufgaben gefordert wird, die aus der PISA-Studie bekannte „Sektkelch-Aufgabe“ und die anschließende „Kugel-Aufgabe“:

Beispiel: „Sektkelch-Aufgabe“

Ein bis zur halben Höhe gefüllter kegelförmiger Sektkelch kostet 50 Eurocent, ohne das Glas.

Wie viel kostet der Sekt im bis zur vollen Höhe gefüllten Sektkelch?

Die seinerzeit erwartete korrekte Lösung war:

Der Sekt in dem vollen Glas kostet 4 Euro, 8-mal so viel.

Beispiel: „Kugel-Aufgabe“

Eine Kugel mit 10 cm Durchmesser steckt in einem Würfel mit 10 cm Kantenlänge. Das Volumen des Würfels ist 1 Liter, das Volumen der Kugel darin ist etwa halb so groß, also etwa ein halber Liter.

Wie groß ist etwa das Volumen einer Kugel mit 20 cm Durchmesser?

Lösung: Etwa 4 Liter, 8-mal so viel.

Die hier erforderliche Raumvorstellung geht über das mentale Bauen hinaus. Man muss sich entgegen der realen Erfahrung vorstellen können, „wie der Sekt sich ausdehnt“ oder wie die Kugel sich in und mit dem Würfel ausdehnt. Diese dynamische Raumvorstellung führt zu folgender Kennzeichnung:

Raumvorstellung in Anlehnung an Piaget (4)

Raumvorstellung ist die Fähigkeit, räumliche Gegenstände

- 1) *verinnerlicht sehen zu können,*
- 2) *verinnerlicht bewegen zu können,*
- 3) *verinnerlicht zerlegen und zusammenbauen zu können und*
- 4) *verinnerlicht ausdehnen und komprimieren zu können.***

Diese in 2, 3 und 4 benannten mentalen Aktivitäten werden im folgenden Curriculum (und in den Bildungsstandards der KMK) mit „elementaren Abbildungen“ bezeichnet. Es geht demnach in der Grundbildung zur Geometrie um nicht mehr und nicht weniger, als soweit wie möglich Raumvorstellung in diesem erweiterten Sinn zu entwickeln.

Für ein effizientes Managen von Lernsituationen ist es nützlich, diese Kompetenzen so zu beschreiben, dass man ihr Vorhandensein beobachten kann. Zunächst beziehen wir das Handeln als Äußern der Raumvorstellung ein:

Raumvorstellung H

Raumvorstellung ist die Fähigkeit, räumliche Gegenstände

- 1) *verinnerlicht sehen zu können,*
- 2) *verinnerlicht bewegen zu können,*
- 3) *verinnerlicht zerlegen und zusammenbauen zu können,*
- 4) *verinnerlicht ausdehnen und komprimieren zu können und*
- H) *diese Fähigkeit durch Handlungen an Material äußern zu können.***

Ein wesentlicher Kompetenzzuwachs ist darüber hinaus erreicht, wenn es den Lernenden gelingt, die mentalen oder die an Material gebundenen Handlungen zunächst in *gesprochene*, dann in *verschriftlichte Sprache* zu fassen:

Raumvorstellung HS

Raumvorstellung ist die Fähigkeit, räumliche Gegenstände

- 1) *verinnerlicht sehen zu können,*
- 2) *verinnerlicht bewegen zu können,*
- 3) *verinnerlicht zerlegen und zusammenbauen zu können,*
- 4) *verinnerlicht ausdehnen und komprimieren zu können,*
- H) *diese Fähigkeit durch Handlungen an Material äußern zu können und***
- S) *diese Fähigkeit in Sprache fassen zu können.***

Zum Entwickeln von Raumvorstellung in diesem Sinne gehört sowohl das Trainieren der mentalen Verfügbarkeiten als auch das Entwickeln und Fördern der darauf bezogenen Sprache. Man bezeichnet die zusätzliche Kompetenz, die Dinge im Sinne von H und S ausdrücken und darstellen zu können, im Angelsächsischen als *Literacy*, hier wird es mit *Literalität* übersetzt (vgl. Abschnitt 4.4, 4.6 und 4.10).

Raumvorstellung und Explosionszeichnungen.

Man kann Erwachsenen, aber auch Schulkindern, die Bedeutung von Raumvorstellung mithilfe eines im Alltag vielfach gegenwärtigen Phänomens deutlich machen:

Raumvorstellung ist die Kompetenz, Explosionszeichnungen lesen zu können.

Explosionszeichnung am **Beispiel „Zerlegte Fahrradnabe“:**

Man denke sich eine Fahrradnabe mit einer Gangschaltung, die man neugierig aufschraubt, um das Innere zu erforschen. Nach Lösen der letzten Schraube springen die Teile plötzlich auseinander. Der Zusammenbau will zunächst nicht gelingen. Fachleuten gelingt er sehr wohl. Die haben natürlich Erfahrung, aber ihr wesentliches Hilfsmittel ist eine Explosionszeichnung.

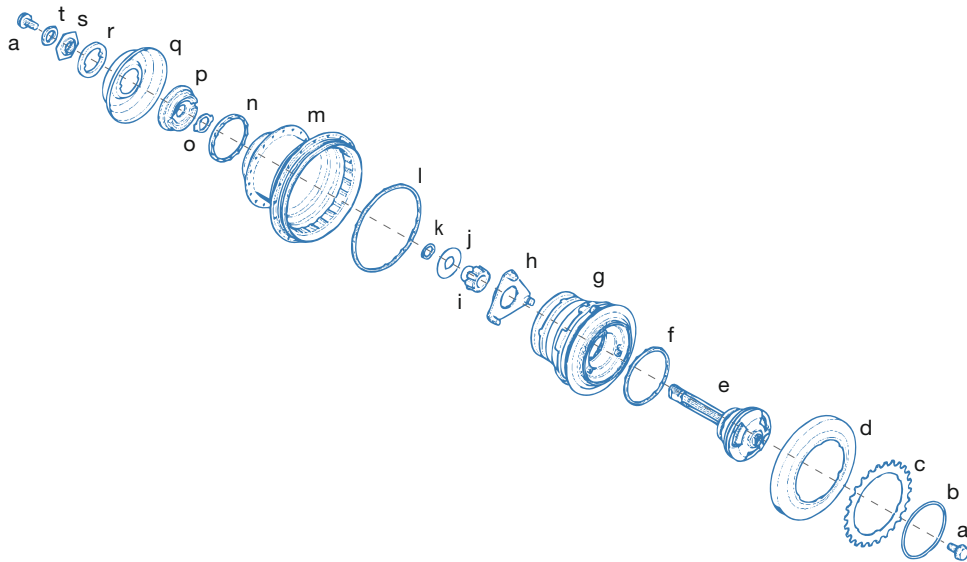
Konzept einer Explosionszeichnung: „Auseinander, Stopp und wieder zusammen.“

Um eine Explosionszeichnung zu beschreiben, benötigt man mehr als „mentales Bauen“ oder „konkrete Raumvorstellung“ und mehr als „elementare Abbildungen“, man benötigt „magisches“ Vorstellungsvermögen: Im Raum schwebt ein noch zusammengebautes Fahrradgetriebe. Die Schrauben werden gelöst, es fällt aber nicht auseinander. Vielmehr „explodiert“ es kontrolliert wie in Zeitlupe, und die Teile fliegen geordnet ganz langsam schwerelos auseinander. Sobald sie alle voneinander gelöst sind, stoppt die Explosion und alle Teile schweben unbewegt im Raum. Diese Situation wird in einem Bild festgehalten, das ist eine „Explosionszeichnung“. Um sie zu nutzen, muss man sich nun vorstellen, dass „der Film rückwärtsläuft“ und die Teile sich dabei alle wieder korrekt ineinanderfügen. Genau diese Vorstellung hilft, die Teile auch materiell wieder zusammenzubauen.

Zwei Kompetenzen benötigt man hier: Zum einen die Vorstellung der sich bewegenden Teile, darüber hinaus aber die Vorstellung einer Bewegung, die man vorher in der Realität nie gesehen hat, also ein **Vorstellungsvermögen über die Realitätserfahrung hinaus**.

Das ist typisch für Mathematik, insbesondere ist es typisch für Geometrie. Explosionszeichnungen verdeutlichen somit eine zentrale Charakteristik der Geometrie, die auch in ihrem Namen zum Ausdruck kommt, der ja schlicht „Erdvermessung“ bedeutet: **Geometrie besteht darin, Pläne von Gestalten zu erstellen und Pläne von Gestalten lesen zu können.**

Explosionszeichnungen verwendete schon Leonardo da Vinci, sie finden sich heute in vielen Werkstätten, in denen Ersatzteile für Geräte zu bestimmen sind, bis hin zu den Bauanleitungen für Möbel und für Bauwerke in den Baukästen für Kinder.



Beispiel einer Explosionszeichnung zu einer Fahrradnabe

Explosionszeichnungen zeigen noch etwas, das für die hier angesprochenen Lernenden bedeutsam ist: Sie repräsentieren Darstellungen, die komplexe geometrische Objekte und darauf bezogene Prozesse *mit ikonischen Mitteln ohne Verwenden der Schriftsprache* verdeutlichen können.

4.4 Curriculare Planungskonzepte

Konsequenzen für das Konzipieren von Curricula zur Geometrie. Im schulischen Mathematikunterricht begegnet man häufig der Tendenz, dass dem Entwickeln formaler Fähigkeiten, etwa in der Arithmetik und Algebra, deutlich mehr Aufmerksamkeit gewidmet wird als dem systematischen Fördern und Trainieren von Raumvorstellung. Die in diesem Begriff implementierte prozessbezogene Kompetenz erfordert spezifische unterrichtliche Angebote und Anforderungen, die oft nicht in wünschenswertem Umfang bereitgestellt werden. Das führt bei der Konzeption eines Curriculums für die Belange des DVV auf ein spezifisches Problem:

Raumvorstellung kann man bewusst oder unbewusst entwickeln und trainieren, auch ohne des Lesens und Schreibens mächtig zu sein. Erwachsene mit Problemen im Lesen und Schreiben weisen möglicherweise auch im Bereich der Raumvorstellung einen geringen Entwicklungsstand auf. Es ist aber ebenfalls denkbar, dass sie aus natürlicher Begabung oder aus den Gewohnheiten und Anforderungen ihres Alltags heraus sehr wohl imstande sind, geometrische Probleme im weitesten Sinne zu bewältigen. Es ist durchaus möglich, dass sie etwa bei *Problemen des Transportierens*, bei *Problemen des Portionierens* oder bei Problemen des Sichorientierens Kompetenzen entwickeln, die wesentliche Bestandteile auch jener Kompetenzen sind, die wir als Kompetenzen zur Geometrie betrachten. Ganz ähnlich wie es im Bereich der Arithmetik den Begriff des „Theorems in Aktion“ (Vergnaud 1982) gibt, kann man auch in der Geometrie von „Theorem in Aktion“ und „Strategie in Aktion“ sprechen, wenn man auf die Kompetenz stößt, dass Erwachsene bestimmte geometrische Probleme in bestimmten Kontexten situativ sehr wohl mit elementaren oder auch fortgeschrittenen Strategien zu lösen imstande sind, ohne diese Lösungen

formal beschreiben zu können. In diesem Fall bleibt die Frage, ob und inwieweit sie imstande sind, diese Kompetenzen auch losgelöst von den sie tragenden Gegenständen und Kontexten zu äußern und für andere in einer wirksamen oder in einer auf bestimmte Art vorgeschriebenen Darstellung zu äußern. Kurzum, man muss unterscheiden zwischen *geometrischen Kompetenzen* und *geometrischer Literalität*. Dieser Gedanke wird weiter unten bei der Konzeption der Aufgabenlinien wiederaufgenommen (s. Abschnitt 4.10).

Ausgehen von vertrauten Kontexten. Diese zu erwartende Situation stellt jeden Lehrenden, der sich im Rahmen eines Grundbildungsprogramms mit Erwachsenen geometrischen Inhalten zuwenden will, vor das Problem, sich die Lernausgangslage seiner Lernenden differenziert zu vergegenwärtigen, um adaptiv einen passenden situativen Kursplan zu erstellen. Die Grundlinie wird darin bestehen, ein im Folgenden skizziertes curriculares Programm zunächst in Kontexte eingebunden zu erarbeiten und dann, soweit dies möglich ist, behutsam aus diesen Kontexten zu lösen und abstrakt tragfähig zu machen.

Voraussetzungen adaptiv nutzen. Dies ist notwendig, weil möglicherweise davon auszugehen ist, dass die Klientel solcher Kurse sowohl im Alltagsleben als auch, soweit vorhanden, in der beruflichen Praxis Alltagserfahrungen erworben hat, die geometrische Kompetenzen in beachtlichem Umfang einschließen. Diese können etwa darin bestehen, dass die Personen bestimmte Teile nach gegebenen Mustern zusammenstellen können (etwa beim Tischdecken), bestimmte Teile zerlegen und wieder zusammensetzen können, bestimmte Teile montieren können oder räumlich-geometrische Hinweise geben können, etwa in Form einer Wegbeschreibung.

4.5 Artikulationsebenen

Das Problem besteht nun darin, dass diese Kompetenzen auf den verschiedenen *Äußerungsebenen (Artikulationsebenen)* unterschiedlich ausgeprägt sein können. Unterscheidet man als Artikulationsebenen

- Handeln,
- Sprechen,
- Schreiben,

so ist nach aktuellem wissenschaftlichen Konsens davon auszugehen, dass sich mathematische Kompetenzen zunächst auf der Ebene des Handelns bilden, sich erst daran anschließend auf der Ebene der Sprache ausprägen und schließlich schriftlich darstellbar werden.

Beispiel: Papierfaltfigur „Himmel und Hölle“

Die Papierfaltfigur „Himmel und Hölle“ ist in unserem Kulturkreis vielen Kindern in Kindergärten und Grundschulen und vielen Erwachsenen geläufig. Das bedeutet, dass sie dieses Objekt herstellen können, wenngleich es in der Klassifizierung der Origami-Objekte keineswegs als elementar, sondern bereits als fortgeschritten gilt („mehrfache Gegenbrüche am unteren Punkt“). Kaum ein Kind und kaum ein Erwachsener sind dagegen in der Lage, das Herstellen dieses Objektes allein in Worten zu beschreiben, ohne die Hände für Gesten zu Hilfe zu nehmen. Und es ist eine anspruchsvolle Aufgabe für Lernende und Erwachsene, einen schriftlichen Anleitungstext zu verfassen, der keine Bilder einschließt.

Der Kompetenzunterschied in Bezug auf die Artikulationsebenen Handeln, Sprechen und Schreiben kann bei Kindern je nach Bildungsbiografie und Gegenstand mehrere Jahre betragen. „Durchführen können“ und „erläutern können“ sind unterschiedliche Kompetenzen.

Für das hier in Rede stehende Curriculum bedeutet dies, dass je nach vorhandener Ausprägung der Kompetenzen sowohl in Bezug auf die geometrischen Gegenstände und damit zusammenhängende prozessbezogene Kompetenzen (Problemlösen, Darstellen, Argumentieren, Kommunizieren und Modellieren) als auch in Bezug auf die sprachlichen und schriftsprachlichen Kompetenzen der Teilnehmer/-innen differenziert zu planen ist.

Voraussichtlich ist ein Kurs ohne eine auf diese Kompetenzausprägungen zielende *Eingangsdiagnostik* nur schwer zu planen, da sich die Heterogenität auf ganz unterschiedlichen Feldern darstellt. Betrachten wir als Beispiel zwei Fälle.

Beispiel: Bildungsangebot 1

Herr H. (36 Jahre) arbeitet seit einigen Jahren in einem Reparaturbetrieb für Fahrräder. Er kann einfache bis mittelschwere Arbeiten erledigen, die darin bestehen, bestimmte Bauteile oder Baugruppen zu zerlegen, schadhafte Teile auszutauschen und die Baugruppen funktionierend wieder zusammenzufügen. Er hat erhebliche Schwierigkeiten beim Schreiben von Texten oder dem schriftlichen Festhalten, etwa von Rechnungen.

Ein passendes Bildungsangebot für Herrn H. kann darin bestehen, ihn dabei zu unterstützen, dass er die Fähigkeiten, die er händisch bereits aufweist, nunmehr sprachlich und schriftsprachlich äußern kann.

Wir nennen diesen Bedarf *Literarisierung vorhandener geometrischer Kenntnisse*.

Beispiel: Bildungsangebot 2

Frau S. (36 Jahre) arbeitet seit einigen Jahren in der Küche einer Kindertagesstätte oder einem Pflegeheim. Sie beherrscht händisch Kochvorgänge und die damit verbundenen Portionierungen so weit, dass sie Zutatenlisten abschreiben oder ändern kann. Sie ist auch imstande, kürzere Texte in Form von Hinweisen oder kleinen Briefbotschaften zu verfassen. Sie ist aber nicht imstande, bestimmte räumliche Probleme zu lösen, etwa eine Wegbeschreibung zu geben oder ein zum Reinigen zerlegtes Küchengerät wieder zusammenzusetzen.

Ein passendes Bildungsangebot für Frau S. kann darin bestehen, ihre Kompetenzen für geometrische Zusammenhänge, insbesondere in Bezug auf räumliches Vorstellungsvermögen, zu entwickeln, aufzubauen und zu stärken. Falls dies gelingt, kann Frau S. möglicherweise die erworbenen Kenntnisse von sich aus über die Handlung hinaus sprachlich oder sogar schriftsprachlich äußern.

Wir nennen diesen Bedarf *Basierung inhaltlicher geometrischer Kompetenzen*.

Die Beispiele sollen zeigen, dass ein passendes Bildungsangebot für derart unterschiedliche Personen in einer gemeinsamen Lerngruppe nur durch ein differenziertes Lernarrangement zu organisieren ist. In jedem Fall muss eine Kursleitung über die verschiedenen Ausgangslagen informiert sein, damit sich die Angesprochenen nicht in bestimmten Bereichen unterfordert und in anderen Bereichen überfordert fühlen.

Das folgende Curriculum ist daher zweistufig aufgebaut:

- **L1:** Das erste Paket beschreibt die geometrischen **Basis-Kompetenzen**, also minimale Kompetenzen, die denen am Ende einer vierjährigen Grundschulzeit entsprechen, jedoch in den Beispielen und Anwendungsfeldern auf die Erfahrungswelt der lernenden Erwachsenen bezogen sind. Im tabellarischen Plan zum Curriculum ist dies links notiert und mit „**Level L1**“ gekennzeichnet (s. Abschnitt 4.8).
- **L2:** Das zweite Paket beschreibt die geometrischen **Regel-Kompetenzen**, also durchschnittliche Kompetenzen, die denen am Ende einer vierjährigen Grundschulzeit entsprechen, jedoch in den Beispielen und Anwendungsfeldern auf die Erfahrungswelt der lernenden Erwachsenen bezogen sind. Im tabellarischen Plan zum Curriculum ist dies rechts notiert und mit „**Level L2**“ gekennzeichnet.

In den Bildungsstandards für Regelschulen ist die Dimension der Artikulationsebenen nicht expliziert. Implizit aber wird bei Regelschulen davon ausgegangen, dass die Schüler/-innen imstande sind, ihre Ergebnisse schriftlich darzustellen.

Ein Planungsvorschlag: HMM und HMS

HMM (Hauptschulabschluss Mathematik mündlich) meint, dass die mathematischen Kompetenzen dem Grundschulabschluss oder dem Hauptschulabschluss entsprechend mündlich geäußert werden können.

HMS (Hauptschulabschluss Mathematik schriftlich) dagegen meint, dass die mathematischen Kompetenzen auf Grundschulniveau oder auf Hauptschulniveau auch schriftlich geäußert werden können, so wie das in Regelschulen der Fall ist.

Selbst wenn eine solche Unterscheidung keinen formalen Charakter im Sinne der offiziellen Abschlüsse trägt, so liefert sie doch eine nutzbare Information zur Unterscheidung der tatsächlichen Kompetenz der betreffenden Personen.

Ein Kursplan, der diese Unterscheidung aufnimmt, ist daher in einer zweiten Dimension zweigeteilt zu denken. Zum einen beschreibt er Kompetenzen und im Zusammenhang damit Lernumgebungen, bei denen lediglich die händische und mündliche Artikulation als hinreichend angesehen werden kann, dafür aber die volle inhaltliche Breite erfasst ist. Des Weiteren umfasst er Aufgabenstellungen, welche die schriftliche Artikulation der Befunde und Ergebnisse einschließen.

4.6 Sprachräume und Kontexträume

Für die Organisation der Kurse ist zu erwarten, dass möglicherweise ein Teil des Lehraufwandes und des Arbeitsaufwandes der Lernenden dem Erwerb der geometrischen Kompetenzen, insbesondere der Raumvorstellung, gewidmet ist und ein weiterer nicht unerheblicher Teil der *Literarisierung* eben dieser Kenntnisse. Dabei ist von Bedeutung, dass hier auch ein besonderer Aspekt der gesprochenen und geschriebenen Sprache zum Tragen kommt, der möglicherweise im Sprachunterricht nicht die Hauptrolle spielt:

**In der Mathematik geht es stets um „deutungssichere Sprache“,
das ist eine Sprache, die Tatsachen, Objekte und Prozesse
so eindeutig beschreibt,
dass Mehrdeutigkeiten und Missverständnisse möglichst
ausgeschlossen sind.**

Eine solche Sprache erfordert in besonderem Maße das *Vereinbaren von Bedeutungen* durch diejenigen, die sich über die entsprechenden Dinge verständigen.

In der Fachsprache der Mathematik geschieht dies durch das Setzen von Bezeichnungen und Definitionen, mit denen ein funktionssicherer Verständigungsrahmen geschaffen wird. In diesem Sinne ist eine Unterrichtseinheit zur Geometrie für die hier in Rede stehende Klientel zu einem erheblichen Anteil Sprachunterricht.

Nicht einfacher, sondern anspruchsvoller wird die Situation zudem dadurch, dass man sinnvoller Weise mehrere „Sprachräume“ unterscheiden sollte, in denen Mathematik formuliert wird:

- Die *Fachsprache* der Mathematik zur Geometrie,
- Die *Alltagssprache* zur Mathematik im öffentlichen und privaten Leben,
- Die *spezifische Sprache* zur Mathematik *in bestimmten Kontexten*, etwa denen der Arbeitswelt.

Die Unterscheidung weist darauf hin, dass es jeweils um *situative Sprache* geht, gedacht für einen bestimmten Kreis von Beteiligten, der jeweils dadurch gekennzeichnet ist, dass er die für diesen Kreis üblichen und gültigen Sprachvereinbarungen kennt. Das Problem nicht nur für die hier in Rede stehende Klientel, sondern auch für andere, besteht darin, bei Bedarf zwischen diesen Sprachebenen flexibel wechseln zu können, entsprechende Bedeutungen und Zusammenhänge aufeinander

zu beziehen, allgemeine Kenntnisse auf Spezialfälle zu übertragen und in speziellen Situationen allgemeine Zusammenhänge zu sehen.

Die Fachsprache der Mathematik ist dadurch gekennzeichnet, dass sie sich von konkreten Kontexten weitgehend distanziert. Das verschafft ihr die Allgemeingültigkeit.

Das Verdeutlichen mathematischer Zusammenhänge wird durch das Einbinden von Beispielen gefördert, diese aber sind meist durch ihre spezifische Situation und durch die an diese Situation gebundene situative Sprache gekennzeichnet. Eine der Kompetenzanforderungen, möglicherweise eine wesentliche, besteht daher darin, bei geometrischen Inhalten zwischen diesen Sprachebenen hin- und hergehen zu können. Entsprechend lassen sich auch geometrische Kompetenzen möglicherweise unterschiedlich nachweisen oder erwerben, je nachdem, ob sie an Kontexte gebunden sind und bleiben, oder ob sie sich von den Kontexten lösen und abstrakte Kenntnisse sind.

4.7 Curriculare Bündelung in den Aufgaben

Wie angegeben umfasst das Geometriecurriculum die Inhaltsbereiche *Raum und Form* und *Größen und Messen* in jedem Fall, darüber hinaus auch Anteile am Inhaltsbereich *Muster und Strukturen*. Die Zentrierung des Curriculums um den Inhalt *Raumvorstellung erwerben und ausbauen* verweist auf einen sinnvollen Verbund der Inhaltsbereiche *Größen und Messen* und *Raum und Form*.

Der folgende Katalog der Inhalte und der darauf bezogenen Kompetenzen ist differenziert entfaltet. Die beispielhaften Aufgaben, welche im Anschluss an den Katalog angegeben sind, betreffen in der Regel mehrere Punkte dieses Katalogs zugleich. In solchen Aufgaben sind mehrere Inhaltsbereiche oder Teile davon gebündelt. Das führt für Lehrende auf das Problem, dass das vorgestellte Curriculum auf eine Art angeordnet ist, die nicht mit einer einzigen begleitenden Aufgabenserie allein abzuarbeiten ist. Vielmehr entsteht in Kursen die Anforderung, zum einen Aufgaben mit sehr eindeutig verorteten Kompetenzen zu bearbeiten, zum anderen solche, die mehrere Bereiche oder Gebiete der Kompetenzstruktur betreffen.

Insbesondere Aufgaben, die, um den Zugang zu erleichtern, gezielt aus beruflichen oder alltäglichen Kontexten entwickelt sind, welche den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der jeweils spezifischen Lerngruppe persönlich vertraut sind, werden in der Regel mehrere der genannten Inhalte und Kompetenzen bündeln. In diesem Sinne beschreibt das Curriculum keinen sequenziell abzuarbeitenden Arbeitsplan, sondern eher eine Checkliste, die in einer vor Ort entschiedenen Reihenfolge oder Systematik im jeweiligen Lehrgang abzuarbeiten ist.

4.8 Curriculum Geometrie: Raum und Form

Das folgende Curriculum listet die angestrebten Kompetenzen zusammen mit den Inhalten auf, an denen sie erworben werden. Auf den ersten Blick wirkt das Curriculum umfangreich, zu bedenken ist jedoch, dass in konkreten Aufgabenstellungen zu- meist mehrere der hier genannten Kompetenzen und Inhalte zugleich angesprochen

werden. Zudem scheint das Curriculum in dieser Form auf den ersten Blick kaum zu der Klientel zu passen, für die es im hier gedachten Rahmen vorgesehen ist. Das liegt daran, dass es in *mathematischer Fachsprache* formuliert ist und in der jeweiligen Arbeitssituation in Aufgaben und Lernumgebungen einzufügen ist, die dort auch in situativer Sprache dargestellt sind, und dabei insbesondere die Erfahrungsräume und die darauf bezogenen Sprachkompetenzen der Lernenden berücksichtigen.

Kein Defizit ist darin zu sehen, dass dieses Curriculum den Curricula der Bundesländer für Grundschulen stark ähnelt, denn diese basieren sämtlich auf den Bildungsstandards zur Mathematik. Die Substanz ist dieselbe, zu ändern und anzupassen sind die Kontexte, die bei Erwachsenen anders strukturiert sein sollten als bei Grundschulkindern.

Strukturiert ist das Curriculum den Bildungsstandards folgend in vier Hauptabschnitte und einen ergänzenden Abschnitt. Es ist zudem in Anlehnung an einen Lehrplan zur Mathematik für Grundschulen konzipiert, bei dessen Erstellen der Autor als wissenschaftlicher Berater beteiligt war (Ministerium für Bildung Rheinland-Pfalz, 2014).

Zur Deutung leerer Felder in den Tabellen: Die Level L1 und L2 sind so gemeint, dass die Kompetenzen auf Level 2 diejenigen auf Level 1 einschließen.

Die hier dargestellte Reihenfolge der Inhalte ist nicht als Modell für deren Reihenfolge in Kursen zu sehen, sie gibt dazu lediglich Anhaltspunkte. Aufgaben und Problemstellungen in Kursen berühren meist mehrere dieser Inhalte (s. Abschnitt 4.7). Zu beachten ist allerdings, welche der Inhalte aufeinander aufbauen und miteinander zusammenhängen.

4.8.1 Sich in der Ebene und im Raum orientieren

In diesem Teilbereich 1 geht es darum, die genannten Begriffe *oben*, *unten* etc. nicht nur zur Kennzeichnung von Gegenständen als Ortsbestimmungen zu verwenden, sondern auch zur Kennzeichnung von Prozessen als Bestimmungen von Richtungen, also „nach oben“, „nach unten“ etc.

Glücklicherweise sind diese Begriffe universell in fast allen Sprachbereichen üblich, erfordern aber einen Bezugsrahmen oder, wie es hier benannt ist, ein *Bezugssystem*, konkret gesagt, eine Antwort auf die Frage „Von wo aus gesehen?“.

Diese Begriffe lassen sich zunehmend im Sinne des Messens anreichern mit Maßzahlen und Einheiten, die allgemein sein können oder situativ, beispielsweise „drei Schritte nach rechts“, „10 cm über ...“ etc. Die Hauptanstrengung von Übungen in diesem Bereich wird der Klärung dieser Bezugssysteme und ihrer sprachlichen Kennzeichnung gewidmet sein müssen.

Sich mithilfe von Richtungen und Lagebeziehungen von einem Ort aus in der Ebene und im Raum orientieren

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
Lagebeziehungen in der Ebene und im Raum		eine Orientierung (Perspektive) in der Ebene selbst festlegen und mit den Worten <i>links, rechts, oben, unten</i> (etwa bei senkrechter Arbeitsfläche) oder mit den Worten <i>links, rechts, vorn, hinten</i> (etwa bei auf dem Tisch liegender Arbeitsfläche) beschreiben
	bei gegebener Orientierung (Perspektive) und gegebenem Bezugsobjekt die Lage eines anderen Objektes in der Ebene oder im Raum mit den Worten <i>vor, hinter, links neben, rechts neben, über, auf, unter</i> kennzeichnen	bei selbst festgelegter Orientierung (Perspektive) und gegebenem Bezugsobjekt die Lage eines anderen Objektes in der Ebene oder im Raum mit den Worten <i>vor, hinter, links neben, rechts neben, über, auf, unter</i> kennzeichnen
mit Lagebeziehungen verbundene Ortsbezeichnungen in der Ebene und im Raum	an einer Figur in gegebener Lage in der Ebene Orte bezeichnen, etwa die Ecken eines Rechtecks mit den Worten <i>oben rechts</i> oder <i>unten links</i>	an einer Figur in gegebener Lage im Raum Orte bezeichnen, etwa die Ecken eines Quaders mit den Worten <i>hinten oben rechts</i> oder <i>vorne unten links</i>
Bewegungsrichtungen in der Ebene und im Raum	bei gegebener Orientierung (Perspektive) die Richtung von Bewegungen eines Objektes in der Ebene mit den Worten <i>nach vorn, nach hinten, nach links, nach rechts</i> kennzeichnen	bei gegebener Orientierung (Perspektive) die Richtung von Bewegungen eines Objektes in der Ebene oder im Raum mit den Worten <i>nach vorn, nach hinten, nach links, nach rechts, nach oben, nach unten</i> kennzeichnen

Sich beim Bewegen in der Ebene und im Raum orientieren

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
bewegen von Objekten	in der Ebene ausgewählte einfache Bewegungen eines Objektes mit Richtung und Entfernung beschreiben	in der Ebene und im Raum ausgewählte einfache Bewegungen eines Objektes mit Richtung und Entfernung beschreiben
neue Orientierung nach Bewegung		in beweglichen Bezugssystemen (bei wechselnder Perspektive) Lagen, Orte und Richtungen benennen können, etwa aus der Sicht einer gehenden Person, die beim Gehen ihren Ort und ihre Sichtrichtung wechselt

4.8.2 Elementare geometrische Figuren kennen und herstellen

In diesem Teilbereich 2 geht es um das Kennzeichnen von Gestalten durch Gesten und durch Sprache, sowohl von ebenen Gestalten (2D) als auch von räumlichen Gestalten (3D). Ferner geht es zum einen darum, diese Figuren deutungsfrei zu beschreiben. Zum anderen geht es darum, diese Figuren als Teile komplexerer Figuren

zu erkennen und beschreiben zu können, wie eine komplexere Figur aus elementaren zusammengesetzt ist.

Als unerlässlich sehen wir die basalen Gestalten *Kreis*, *Quadrat*, *Rechteck*, *Dreieck*, *Kugel*, *Würfel*, *Quader*. Die Kennzeichnung weiterer Gestalten sehen wir als optional, weil deren Namen primär im Rahmen mathematischer Fachsprache verwendet werden und in der Umgangssprache nicht in allen Erfahrungsbereichen gleich geläufig sind.

Neben der Kompetenz, diese Gestalten zu benennen, geht es wesentlich darum, diese Gestalten als Teile konkret gegebener Gestalten zu identifizieren und darüber hinaus komplexe Gestalten dadurch zu charakterisieren, wie man sie aus solchen elementaren Gestalten zusammensetzt. Dabei kann es sein, dass Worte zum Kennzeichnen solcher Gestalten zunächst aus der Erfahrungswelt gewonnen werden, bevor die Benennung im Sinne einer in der Mathematik üblichen Vokabel erfolgt.

Beispiel: „Zwei Situationen – zwei Wortwahlen“

Situation 1: Die Begriffe *Quader* und *Pyramide* sind bekannt. Ein Kirchturm ist zu beschreiben, möglich wäre: „Der Turm besteht aus einem Quader mit darauf gesetzter Pyramide.“ Differenziertere Beschreibungen sind möglich.

Situation 2: Die Begriffe *Quader* und *Pyramide* sind nicht geläufig, wohl aber ist die Gestalt eines bestimmten Kirchturms bekannt. Dann könnte man formulieren: „Der Turm besteht aus einem Klotz und einer schrägen Spitze darauf.“ Die Bezeichnungen „Klotz“ und „schräge Spitze“ sind zu präzisieren. Anstelle eines Klotzes tritt der Name *Quader*, anstelle der schrägen Spitze tritt das Wort *Pyramide*.

Die angestrebte Kompetenz besteht somit zum einen darin, die gegenstandsbeschreibenden Begriffe aus verschiedenen Welten miteinander zu verbinden, zum anderen darin, komplexere Gestalten mithilfe der basalen elementaren Gestalten strukturiert zu erfassen und strukturiert zu kennzeichnen.

Der Figurenkatalog erscheint umfangreich. Mit **Fettdruck** sind im Sinne eines „Kerncurriculums“ diejenigen Figuren gekennzeichnet, die in jedem Fall bearbeitet werden sollten. Die anderen können je nach verfügbarer Zeit in den Kursen hinzugenommen werden.

Sich mithilfe von Richtungen und Lagebeziehungen von einem Ort aus in der Ebene und im Raum orientieren

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
Punkte, Strecken, Geraden	• Punkte und Strecken identifizieren und benennen	• Geraden identifizieren und benennen
Ecken, Seiten, Kanten	• Ecken und Seiten (im Sinne von Strecken) an ebenen Figuren ansprechen	• Ecken, Kanten und Seiten (im Sinne von Flächen) an räumlichen Figuren ansprechen

senkrecht, waagerecht, parallel	• Lagebeziehungen bei Gegenständen der Umwelt mit eigenen Worten beschreiben	• <i>senkrecht, waagerecht, parallel</i> als Lagebezeichnung bei Gegenständen der Umwelt identifizieren und benennen • <i>senkrecht</i> als Lagebeziehung bei Strecken und Geraden identifizieren und benennen • <i>parallel</i> als Lagebeziehung bei Strecken und Geraden identifizieren und benennen • parallele ebene Flächen als <i>parallel</i> identifizieren und beschreiben
rechter Winkel		• einen rechten Winkel zwischen zwei Strecken identifizieren und als solchen benennen
Ebene	• eine ebene Fläche von einer gekrümmten Fläche mit eigenen Worten unterscheiden	

2D-Figuren (ebene Figuren) kennen und kennzeichnen

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
Dreieck, Viereck	• Dreiecke und Vierecke identifizieren, beschreiben, zeichnen	
Rechteck, Quadrat	• Rechtecke und Quadrate identifizieren und beschreiben • Rechtecke von nicht rechteckigen Vielecken unterscheiden	• Rechtecke und Quadrate durch Zeichnen und eine andere Technik (etwa Legen oder Falten) herstellen • Quadrate von nicht quadratischen Rechtecken und von nicht quadratischen Vielecken unterscheiden
Parallelogramm, Raute		• Parallelogramme und Rauten identifizieren, beschreiben und benennen • Parallelogramme und Rauten durch Zeichnen und eine andere Technik (etwa Legen oder Falten) herstellen
Vielecke in der Ebene	• Vielecke identifizieren und mithilfe der Eckenzahl beschreiben	
regelmäßige Vielecke	• regelmäßige Vielecke mit eigenen Worten als regelmäßig kennzeichnen	• regelmäßige Vielecke mit Hilfsmitteln (etwa mit einer „Zeichenuhr“, mit Kreispapier oder mit einem Zirkel) herstellen oder zeichnen: 4, 8, 3, 6 und 12 (ggf. 5 und 10)
Kreis	• Kreise in der Umwelt und in Figuren identifizieren und mit eigenen Worten beschreiben	• Kreise mit Hilfsmitteln zeichnen • strukturierte Kreismuster beschreiben, mit Hilfsmitteln zeichnen oder aus geeignetem Material herstellen

3D-Figuren (räumliche Figuren) kennen und kennzeichnen

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
Quader, Würfel	• Quader und Würfel identifizieren und beschreiben • Würfel von nicht würfelförmigen Quadern und anderen Körpern unterscheiden	• Quader von nicht quaderförmigen Körpern unterscheiden • Quader und Würfel beschreiben, etwa mit Rechtecken, Eckpunkten, Kanten, Flächen etc. • Netze zu Würfeln und Quadern kennen, zeichnen und aus gegebenen Teilen herstellen • Quader und Würfel aus Netzen herstellen
Zylinder, Pyramide, Kegel		• Zylinder, Pyramiden und Kegel mit eigenen Worten beschreiben
Kugel	• Kugel identifizieren und mit eigenen Worten beschreiben	• Kugel aus Knetmasse näherungsweise herstellen und diesen Vorgang beschreiben
3D-Figuren	• Würfel und Quader in der Umwelt identifizieren	• Würfel, Quader, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel in der Umwelt identifizieren
	• Bauwerke aus Würfeln mit verschiedenen ebenen Ansichten in Verbindung bringen	• Bauwerke aus Würfeln, Quadern, Zylindern, Pyramiden, Kegeln und Kugeln mit verschiedenen ebenen Ansichten in Verbindung bringen • Würfel, Quader, Zylinder, Pyramiden, Kegel, Kugeln und Bauwerke daraus beschreiben

4.8.3 Elementare geometrische Abbildungen erkennen, kennzeichnen und nutzen

Abbildungen“ meint hier im Sinne des Sprachgebrauchs in der Mathematik die Kongruenzabbildungen *Drehen*, *Verschieben* und *Spiegeln (an einer Achse)* und ihre Zusammensetzungen, dazu als Ähnlichkeitsabbildung die *zentrische Streckung*. Symmetriebetrachtungen, so wird hier vorgeschlagen, werden auf ebene Figuren beschränkt.

In diesem Teilbereich 3 geht es um den Kern dessen, was die Geometrie in der Elementarbildung ausmacht. Es geht darum, materiell und mental Prozesse mit Figuren zu bewältigen, im Wesentlichen durch die Vorstellungen des Zerlegens, des Herstellens und des Änderns.

In einem ersten Schritt sollte man sich hier mit konkreten Änderungen befassen, d. h. die Änderungen der Figuren durch Drehen, Schieben, Spiegeln und das Strecken von Figuren oder Teilfiguren händisch verfügbar zu machen und dann zunehmend darauf hinarbeiten, diese Prozesse mental verfügbar zu machen, zu internalisieren, ohne dass das Material konkret zur Verfügung steht. Dieser Übergang bedeutet für viele Menschen eine Schwelle in der Schwierigkeit und benötigt voraussichtlich den meisten Aufwand in den Kursen.

Die „Bewegungen“, also die Kongruenzabbildungen, lassen sich durch das physikalische Bewegen von Objekten darstellen, welche die Figuren repräsentieren, etwa Plättchen oder Papierteile oder Bauteile oder anderes geeignetes Material. Zentrische Streckungen sind schwieriger darzustellen: Entweder man baut zu einem gegebenen Objekt ein größeres oder kleineres, das geht materiell, oder man stellt sich vor, wie das gegebene Objekt sich ausdehnt oder zusammenzieht. Dabei wird die anspruchsvollere Version der Raumvorstellung eingefordert.

Deckungsgleiche ebene Figuren betrachten und herstellen
(Kongruenzabbildungen)

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
deckungsgleiche ebene Figuren	deckungsgleiche Dreiecke und Quadrate identifizieren und mit eigenen Worten beschreiben	zu einfachen Figuren deckungsgleiche Figuren in einer gegebenen Lage mit Material legen oder mit Hilfsmitteln zeichnen, etwa im Gitternetz, mit Schablonen oder durch „Transparentkopieren“
	zu einfachen Figuren deckungsgleiche Figuren mit Material legen oder mit Hilfsmitteln zeichnen, etwa im Gitternetz, mit Schablonen oder durch „Transparentkopieren“	deckungsgleiche ebene Figuren identifizieren und beschreiben

Symmetrische ebene Figuren betrachten und herstellen

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
achsensymmetrische und drehsymmetrische ebene Figuren	achsensymmetrische ebene Figuren mit eigenen Worten beschreiben und mit geeigneten Techniken herstellen, durch Zeichnen im Gitter oder durch „Transparentkopieren“	achsensymmetrische und drehsymmetrische ebene Figuren beschreiben und mit geeigneten Techniken herstellen, etwa mit Falt-Schneiden, durch Zeichnen im Gitter oder durch „Transparentkopieren“
	achsensymmetrische Figuren in der Umwelt identifizieren und beschreiben	achsensymmetrische und drehsymmetrische Figuren in der Umwelt identifizieren und beschreiben

Deckungsgleichheit und Symmetrie

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
symmetrische Figuren aus deckungsgleichen Teilfiguren	• zwei deckungsgleiche Figuren so zeichnen, dass eine achsensymmetrische Figur entsteht	• zwei deckungsgleiche Figuren so zeichnen, dass eine drehsymmetrische Figur entsteht
	• aus einfachen Figuren, etwa Buchstaben oder Zahlzeichen, durch mehrfaches Kopieren achsensymmetrische Figuren zusammensetzen	• aus einfachen ebenen Figuren durch mehrfaches Kopieren Figuren zusammensetzen, die achsensymmetrisch oder drehsymmetrisch sind • Bandornamente oder Parkette durch Legen oder Zeichnen herstellen

Vergrößern und Verkleinern von Figuren (Ähnlichkeitsabbildungen)

Vorsicht: Das Wort „ähnlich“ ist in dieser Tabelle im Sinne der Fachsprache verwendet. Das meint, dass zwei Figuren als einander ähnlich bezeichnet werden, wenn sie durch *zentrische Streckungen* ineinander überführt werden können. Im Alltag wird dieses Wort anders genutzt. Je nach Lernsituation ist daher zu erwägen und zu entscheiden, ob man die Vokabel „ähnlich“ verwendet oder weglässt.

Zentrische Streckung. Diese Abbildung der Ebene in sich, die dem intuitiven Verständnis von Vergrößern und Verkleinern entspricht, wird in den Kursen erklärungsbedürftig sein. Man kann es mit der mathematischen Charakterisierung versuchen: *Festgelegt sind ein Zentrum Z und eine Zahl k. Zu jedem Punkt P der Ebene entsteht sein Bildpunkt Q auf dem Strahl ZP, indem die Länge ZP stets mit demselben Faktor k zu ZQ vervielfacht wird.* Diese punktweise Charakterisierung liefert jedoch möglicherweise keine ganzheitliche Vorstellung davon, wie Figuren sich bei zentrischem Strecken ändern. Sinnvoll erscheinen Charakterisierungen, die an vorhandene Erfahrungen der Lernenden anknüpfen.

Beispiel: „Zentrische Streckung“ situativ erklärt

Angenommen sei, dass die angesprochenen Kursteilnehmer/-innen mit dem Schreiben von Texten in einem Textprogramm und mit dem Einfügen von Bildern in einen solchen Text Erfahrung haben. Sie mögen sich ein solches in einen Text eingefügtes Bild vorstellen, etwa ein Gesicht. Beim Anklicken erscheinen die üblichen 8 Punkte am Rand. Zieht man das Bild am Punkt „Mitte-Rechts“, so wird das Bild breiter, aber nicht höher. Das ist keine zentrische Streckung. Zieht man das Bild am Punkt „Oben-Rechts“, so wird es in alle Richtungen vergrößert. Das ist eine zentrische Streckung, das Zentrum ist der Punkt „Unten-Links“. Im zweiten Fall bleibt das Gesicht hübsch, es wird lediglich größer oder kleiner. Im ersten Fall wird das Gesicht in die Breite verzerrt.

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
zueinander ähnliche ebene Figuren	• zueinander ähnliche „vergrößerte“ oder „verkleinerte“ einfache ebene Figuren identifizieren und mit eigenen Worten beschreiben	• zueinander ähnliche ebene Figuren identifizieren und beschreiben
	• zu einfachen gegebenen Figuren ähnliche Figuren mit Lege-Material herstellen, etwa mit ähnlichen Dreiecken oder mit ähnlichen Tangrams	• zu einfachen gegebenen Figuren ähnliche Figuren mit Hilfsmitteln herstellen, etwa durch Legen oder durch Zeichnen in Gittern
zueinander ähnliche räumliche Figuren		• zueinander ähnliche räumliche Figuren aus Würfeln bauen und vergleichend beschreiben • zueinander ähnliche „vergrößerte und verkleinerte“ ebene und räumliche Figuren an Beispielen, auch in der Umwelt, identifizieren und beschreiben, (Pläne, Modellfahrzeuge etc.)
Maßstäbe		• mit einzelnen Maßstäben maßstabsgerecht vergrößern und verkleinern und rechnen

4.8.4 Verfahren zum Messen und Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Rauminhalten anwenden

In diesem Teilbereich 4 geht es um Strategien des Messens, wobei das Messen als Prozess sowohl die *Anpassungshandlung* umfasst als auch das *Rechnen mit Größen und deren Einheiten*. Das Ziel ist das Dokumentieren des zu messenden Objektes durch gemessene Größen.

Bei der *Anpassungshandlung* geht es darum, ein Messinstrument, wie immer es gestaltet sein mag, mit dem zu messenden Objekt zur Passung zu bringen, also etwa ein Lineal an eine Strecke anzulegen, oder eine Rechteckfigur mit Einheitsquadraten auszulegen.

Beim *Rechnen mit Größen und deren Einheiten* geht es darum, die ermittelte abgelesene oder berechnete Größe in angemessenen oder jeweils geforderten Einheiten darzustellen. Dies ist die Schnittstelle zur Arithmetik, das am besten dazu geeignete Instrument ist nach Auffassung des Autors das Arbeiten mit Tabellen.

In Abschnitt 4.9 wird ausgeführt, dass je nach Komplexität der Gestalt des zu messenden Gegenstandes auch die Anpassungshandlung unterschiedlich komplex sein kann. Hinzu kommt, dass bei komplexen Gestalten oft ein im mathematischen Sinne genaues Messen nicht möglich ist, sondern stattdessen nur eine Schätzung geleistet werden kann: *Schätzen sehen wir als strategisch bestimmtes mentales Messen mit begrenzter Genauigkeit*.

Längenmaße bestimmen

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
direktes Vergleichen von Längen	Längen von Gegenständen bis etwa 1 m direkt vergleichen	
indirektes Vergleichen von Längen	Längen von Gegenständen bis etwa 1 m mithilfe eines Werkzeuges (Schnur, Stab) indirekt vergleichen	Längen von Gegenständen bis etwa 10 m mithilfe eines Werkzeuges (Schnur, Stab) indirekt vergleichen
messen von Längen	Längen von Gegenständen bis etwa 1 m mithilfe eines skalierten Lineals oder Maßbandes nach Maßzahl und Einheit bestimmen	Längen von Gegenständen bis etwa 10 m mithilfe eines skalierten Lineals oder Maßbandes nach Maßzahl und Einheit bestimmen

Umfang ebener Figuren bestimmen

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
messen von Umfängen ebener Figuren	messen von Umfängen bei Figuren im Kästchengitter durch Abzählen	messen von Umfängen bei geradlinig begrenzten Figuren mit einem skalierten Lineal
Umfang und Flächeninhalt		Figuren aus Quadraten umbauen, vergrößern und verkleinern und Änderungen von Umfang und Flächeninhalt vergleichen

Flächeninhalte bestimmen

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
schätzen, Messen und Vergleichen von Flächeninhalten	Flächeninhalt ebener Figuren aus Quadraten durch Auszählen der Quadrate bestimmen	- Flächeninhalt geeigneter ebener Figuren durch Auslegen mit Quadraten und Auszählen bestimmen - Flächeninhalte geeigneter ebener Figuren durch Zerlegen und Ergänzen vergleichen und in Einzelfällen bestimmen - geeignete ebene Figuren, etwa Arrangements aus Quadraten, vergrößern und verkleinern und Umfänge und Flächeninhalte vergleichen - schätzen von krummlinig begrenzten Flächen durch Annähern der Gestalt mit Quadraten, etwa mit Kästchenpapier

Rauminhalte bestimmen

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
Volumenmaß als Würfelzahl	Rauminhalt von Würfelbauwerken durch Zählen der Würfel bestimmen	Rauminhalte geeigneter (Hohl-)Körper durch Auslegen mit Würfeln bestimmen
Volumenmaß als „Hohlmaß“		Rauminhalt von Hohlkörpern durch Schüttversuche vergleichen und bestimmen
Oberfläche und Rauminhalt		Würfelbauwerke umbauen, vergrößern und verkleinern und Änderungen von Oberfläche und Rauminhalt vergleichen

4.8.5 Elementare Brüche in Figuren darstellen

In diesem Teilbereich 5 meint „elementare Brüche“: die Hälfte, das Viertel, das Achtel, das Drittel, das Sechstel und das Zehntel

Fortgesetztes Halbieren –
Halbes, Viertel und Achtel in verschiedenen Figuren darstellen

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
elementare Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ikonische und geometrische Darstellungen	in konkreten Darstellungen identifizieren und beschreiben	- in passenden diskreten Darstellungen (Kästchen, Stückzahlen) identifizieren und herstellen - in Streckeneinteilungen identifizieren und herstellen - in Kreiseinteilungen identifizieren und herstellen

Drittel, Sechstel und Zehntel in verschiedenen Figuren darstellen

Inhalte zum Erwerb der Kompetenzen	Kompetenzerwartung auf Level L1	Kompetenzerwartung auf Level L2
elementare Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ ikonische und geometrische Darstellungen, elementare und näherungsweise Konstruktionen	in konkreten Darstellungen identifizieren und beschreiben	- in passenden diskreten Darstellungen (Kästchen, Stückzahlen) identifizieren und herstellen - in Streckeneinteilungen identifizieren und herstellen („Streifenteilungstechnik“) - in Kreiseinteilungen (etwa Kreisdiagrammen, „Stundenuhr“ oder „Minutenuhr“) identifizieren und (ggf. näherungsweise) herstellen

4.9 Raum und Form ist Voraussetzung für Größen und Messen

Verbundene Inhaltsbereiche. In den Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sind die Inhaltsbereiche *Raum und Form* und *Größen und Messen* durch einen bestimmten Teilbereich (hier bezeichnet als Teilbereich 4: Verfahren zum Messen und Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Rauminhalten anwenden [s. Abschnitt 4.8.4]) miteinander verbunden. In diesem Teilbereich geht es um Strategien zum Messen von Flächeninhalten und Volumina. Dies ist insofern bemerkenswert, als in klassischen Curricula Größen und Messen vor der Geometrie behandelt sind, was darauf verweist, dass es dabei offensichtlich vorrangig um das Rechnen mit Größen, insbesondere um das Umrechnen von Größen, geht.

Hier wird dagegen die Auffassung vertreten, dass der Inhaltsbereich *Größen und Messen*, insbesondere für Flächen und Rauminhalte, primär dadurch bestimmt ist, dass man die zu messenden Objekte strukturiert. Diese Strukturierung ist nicht in erster Linie arithmetischer Natur, sondern vorrangig geometrischer Natur und setzt daher Kompetenzen zu *Raum und Form* voraus. Das Messen von Flächeninhalten und Rauminhalten umfasst somit im Wesentlichen zwei Arbeitsfelder:

- das Strukturieren von Flächen, etwa im Sinne von Zerlegen, Ergänzen, Vergrößern und Annähern.
- das ggf. erforderliche Umrechnen von Maßzahlen und Einheiten, etwa Quadratdezimeter in Quadratmeter, Kubikdezimeter in Kubikmeter.

Der zweite Punkt sollte insbesondere durch qualitative geometrische Vorstellungen unterstützt sein, sodass die entsprechenden Rechnungen eine semantische Basis haben, denn Rechenfehler in diesem Bereich, wie sie durch rein syntaktisches Rechnen begünstigt werden, haben in der Regel besonders fatale Auswirkungen.

Probleme beim Messen von Längen. Überraschenderweise zeigt sich, dass das Bestimmen von Längen in seiner Schwierigkeit schlagartig steigt, wenn man anstelle von Strecken und Streckenzügen versucht, die Längen gekrümmter Linien zu bestimmen. Im ersten Ansatz versucht man stets, dies dadurch zu erreichen, dass man die gekrümmten Linien näherungsweise durch Streckenzüge beschreibt. Dies aber ist nur dann zielführend, wenn die betrachteten krummen Linien „nicht allzu krumm“ sind.

Messen von Flächen- und Rauminhalten. Ein wenig einfacher, wenn auch nicht weniger komplex, stellt sich die Lage beim Messen von Flächeninhalten und Rauminhalten dar. Zwar gibt es auch hier Schwierigkeiten, sobald die zu messenden Objekte krummlinig begrenzt sind, aber die mathematischen Strategien und technischen Möglichkeiten sind hier etwas leichter zu veranschaulichen.

Eine technische Stufenfolge beim Messen von Flächeninhalten. In älterer Literatur findet man für das Bestimmen von Flächeninhalten „Stufenfolgen“. Diese werden häufig so dargestellt, als handele es sich um Entwicklungsstufen mathematischer Erkenntnis bei Lernenden. Vielmehr bedeuten aber die „Stufen“, dass der Begriff des Flächeninhaltes und die Verfahren zu seiner Bestimmung zunächst von hinreichend einfachen ebenen Figuren ausgehen, Quadraten und Rechtecken, und dann auf zunehmend komplexere Figuren ausgedehnt werden. Eine Stufenfolge liegt also insofern vor, als die betrachteten Objekte zunehmend komplexer werden. Hier ein Beispiel einer solchen Stufenfolge zum Bestimmen von Flächeninhalten:

- **Objekte 1:** Quadrate und Rechtecke mit ganzzahligen Randlängen. Messverfahren: auslegen mit Einheitsquadraten. Idee und Hilfsmittel: Kongruenz.
- **Objekte 2:** Quadrate und Rechtecke mit nicht ganzzahligen Randlängen. Messverfahren: Quadrate zerlegen und zusammenlegen. Idee und Hilfsmittel: Kongruenz und Bruchrechnung, Arbeiten mit verschiedenen Einheiten.

Beispiel: „Fliesenboden“

Ein Zimmerboden ist rechteckig. Die Seitenlängen sind 2,80 Meter und 5 Meter. Verfügbar sind Fliesen mit den Maßen 50 cm × 50 cm.

Wie viele Fliesen werden benötigt?

- **Objekte 3:** Gradlinig begrenzte Figuren, insbesondere Dreiecke, Vierecke und Vielecke. Messverfahren: Zerlegen und Ergänzen. Idee und Hilfsmittel: Kongruente Teilflächen haben dieselben Maße.

Beispiel: „L-förmiges Grundstück“

Wie kann man ein L-förmiges Grundstück zerlegen, um sein Flächenmaß zu bestimmen?

- **Objekte 4:** Ebene Figuren allgemein. Messverfahren: Vergrößern und Verkleinern, dabei Umrechnen des Flächeninhaltes. Idee und Hilfsmittel: Flächenänderung bei Ähnlichkeitsabbildungen.

Beispiel: „Werbefläche“

Auf einem Foto ist ein Bekannter von Ihnen vor einem Lieferwagen mit Kasten-aufbau festgehalten. Sie wissen, Ihr Bekannter ist 1,80 m groß. Die rechteckige Seite des Kastenaufbaus ist eine Werbefläche. Können Sie deren Größe anhand des Fotos schätzen?

- **Objekte 5:** Ebene Figuren allgemein, insbesondere krummlinig begrenzte. Messverfahren: Annähern durch Einpassen in Quadratgitter und Abschätzen. Idee und Hilfsmittel: Zusammenhang von Flächeninhalten bei Figuren, die man „ineinander platzieren kann“.

Beispiel: „See mit Buchten“

Gezeichnet ist ein See mit unregelmäßigem Ufer mit vielen Buchten. Zeichnen Sie darüber ein Rechteck, das möglichst den gleichen Flächeninhalt haben soll. Wie geht man dabei vor?

- **Objekte 6:** Ebene Figuren allgemein. Messverfahren und Hilfsmittel: technischer Art, etwa durch Wiegen von Papierstücken oder Stücken aus anderem Material, Benutzen spezieller technischer Hilfsmittel, Schüttversuche, Umordnen von Material, etwa von runden Plättchen. Hands-on-Versuche, etwa Bestimmen einer Kugeloberfläche durch Schalen einer Apfelsine o. Ä.

Beispiel: „Oberfläche einer Apfelsine“

Bestimmen Sie näherungsweise die Oberfläche einer Apfelsine. Schälen Sie dazu die Apfelsine und legen Sie die Schalenstückchen zu einem Rechteck oder zu einem Quadrat.

Stufenfolgen bei Volumina. Eine analoge Stufenfolge lässt sich für Volumina aufstellen. Allerdings erscheint dort die Gewichtung der Bedeutungen anders. Obwohl das Auslegen mit Einheitswürfeln auch hier die entsprechende Basisidee darstellt, sind doch Schüttversuche, also technische Verfahren, hier von besonderer Bedeutung. Beim Abschätzen und Bestimmen von Volumina wird in besonderer Weise Raumvorstellung beansprucht.

Zum Verhältnis vom Schätzen und Messen. Die genannte Stufung kann man auffassen als Beschreibung von zunehmend komplexen Messverfahren. Aber bereits die Objekte 5 zeigen, dass Messen und Schätzen hier dicht beieinanderliegen. Abgesehen von einigen idealtypischen Objekten betrifft das Messen in der Realität meist eher eine Schätzung, d. h. die Angabe einer gemessenen Größe und dazugehörend die Angabe, als wie genau diese Messung anzusehen ist. Ist diese Genauigkeit als Teil der Aufgabenstellung vorgegeben, so ist eine „Messung im Sinne eines Überschlags“ gefragt und diese beruht in den meisten Fällen hauptsächlich auf der Kompetenz zum räumlichen Strukturieren oder Umstrukturieren der gemessenen Objekte.

Das Verhältnis von Schätzen und Messen ist komplexer als es auf den ersten Blick erscheint. Entscheidend ist, ob es sich beim Schätzen mehr oder weniger um ein spontanes Raten handelt oder ob bewusst mehr oder weniger aufwändige mentale Strategien eingesetzt werden. Dies hängt auch davon ab, welche Genauigkeit von der Schätzung verlangt wird. Ebenso ist auch beim Messen zu beachten, dass der für die Messung betriebene Aufwand sowohl technisch als auch intellektuell selbstverständlich davon abhängt, welcher Genauigkeitsanspruch an das Messergebnis gestellt wird. Damit werden die Grenzen zwischen Schätzen und Messen fließend.

In unserem Konzept jedoch besteht das Messen nicht nur in der zweifachen Anforderung, zum einen in der geometrischen Anpassungshandlung von Werkstück und Messwerkzeug, zum anderen im arithmetischen Umgehen mit den Größen, sondern es wird das **Schätzen im Sinne der Raumvorstellung als ein strategisch basiertes mentales Messen** gesehen, bei dem die Vorgänge, die beim Messen materiell oder händisch vollzogen werden, nunmehr in die Vorstellung verlagert sind.

Beispiel: „Bahnsteiglänge“

Wie lang etwa ist der Bahnsteig des ICE-Bahnhofs in Kassel? Bei oberflächlichem Raten kann man mit dem geschätzten Wert stark daneben liegen. Weiß man aber, dass der europäische Personenwaggon für Schnellzüge gut 25 Meter lang ist und die ICE-Triebköpfe knapp 20 Meter lang, dann mag man sich aufgrund seiner Reiseerfahrungen einen Zug vorstellen und bedenken, dass er in voller Länge an den Bahnsteig passen muss. Man kann Züge beobachten, die 14 Waggonen und 2 Triebköpfe besitzen, solche Züge sind 390 Meter lang. Mindestens so lang ist auch der Bahnsteig. Entscheidend bei diesem Beispiel ist nicht so sehr das Vervielfachen und Addieren der Längen, sondern vielmehr die Fähigkeit, sich vorzustellen, wie der Zug an den Bahnsteig passt, ihn mental dorthin zu bewegen.

Man kann daraus die Konsequenz ziehen, und das wird hier vorgeschlagen, das Schätzen begleitend zum Messen oder im Anschluss an das Messen zu bearbeiten und nicht davor, damit hinreichende Raumvorstellung und Erfahrung für die reale oder mentale geometrische Passungshandlung vorliegt.

4.10 Zielgruppenorientierte „adaptive“ Planung von Lehreinheiten

Die hier angesprochene Zielgruppe der Lernenden unterscheidet sich von regulären Schülerinnen und Schülern durch einige Punkte, die bei der Konzeption der Curricula für die Kurse von Bedeutung sind.

Spezifische Erfahrungsräume und „Aufgabenlinien“. Bei (jungen) Erwachsenen ist davon auszugehen, dass sie aufgrund ihrer Teilleistungsschwäche nicht daran gehindert sind, in der Umwelt, der eigenen Lebenswelt und ihrer Berufswelt fundierte Erfahrungen zu sammeln und Probleme zu lösen, die eine aktive und bewusste Auseinandersetzung mit der Situation erfordern. Diese „spezifischen Erfahrungsräume Erwachsener“ sollten nach Möglichkeit in die Kurse einbezogen werden. Wir gehen davon aus, dass auf jeden Fall der Erfahrungsbereich „Nahrung und Speisen“ von allen geteilt wird und bei einigen sogar Gegenstand der beruflichen Tätigkeit ist. Beim Design von Aufgaben ist daher eine Aufgabenlinie, die **„Aufgabenlinie N“**, ganz diesem Erfahrungsbereich gewidmet, denn wir gehen davon aus, dass dieser Erfahrungsbereich in jedem Fall von allen Beteiligten eines Kurses geteilt wird, egal welchen Berufsgruppen oder gesellschaftlichen Gruppen sie ansonsten angehören. In diesem Erfahrungsbereich müssen daher keine Kontexte und kein kontextgebundenes Vokabular zusätzlich in den Kursen installiert werden.

Ein weiterer Erfahrungsbereich wird gekennzeichnet mit **„Aufgabenlinie B“**. Gemeint ist der jeweilige berufsspezifische Erfahrungsbereich, sofern ein solcher vorliegt. Die Dozenten der Kurse müssten sich mit diesen berufsbezogenen Erfahrungen ihrer Teilnehmer/-innen auseinandersetzen und prüfen, ob und inwieweit diese Kontexte zur gemeinsamen Bearbeitung in den Kursen geeignet sind. Wenngleich die berufsbezogenen Erfahrungsbereiche ganz unterschiedlich sein können, so ist doch davon auszugehen, dass es Aufgabenstellungen gibt, die über diesen Berufsbereich hinweg

strukturgleich oder strukturähnlich sind. Solche Aufgaben zu identifizieren und zu konzipieren, wird eine der Kernaufgaben der Dozenten sein, um die Lerngruppe im Argumentieren und Kommunizieren zu unterstützen. Behutsam zu installieren ist die „**Aufgabenlinie A**“ mit abstrakten Aufgaben, die nicht direkt im Kontext eines Erfahrungsbereiches formuliert sind, sondern, soweit möglich, in der üblichen mathematischen Fachsprache gefasst sind. Hier sind Bezeichnungen und Begriffe einzuführen und mit Objekten und Phänomenen aus den anderen beiden Erfahrungsbereichen sprachlich zu verbinden.

Literalität. Es erscheint sinnvoll, bei dem speziellen Handicap der erwachsenen Lernenden mathematische Performanzen (beobachtbare gezeigte Leistungen) zunächst mündlich und in bekannte Erfahrungssituationen eingebettet zu bearbeiten und einzufordern. Mit geeigneten Darstellungsmitteln ist es durchaus möglich, Leistungen, die in ihren Ansprüchen dem Grundschulabschluss oder dem Stand von Klasse 8 entsprechen, im Bereich der *Geometrie* und *Raum und Form* so einzufordern, dass man dabei nicht schreiben und wenig zeichnen muss.

Zunächst vorrangig auszubauen ist die Kompetenz, Figuren und darauf bezogene Prozesse darstellen und argumentativ begleiten zu können. Keinerlei Qualitätsminderung ist darin zu sehen, dass dabei zunächst Legematerial oder Baumaterial verwendet wird. Sinnvoll, falls möglich, erscheint ein frühes Einbeziehen geeigneter Software, um Konstruktionen flexibel handhaben zu können.

Erst wenn dazu eine gewisse materialbezogene Kompetenz aufgebaut ist, kann man dazu übergehen, diese Kompetenzen zu literalisieren. Dabei bilden den ersten Schritt selbst gewählte Markierungen von Objekten und Prozessen in gegebenen Darstellungen und bestimmte Arrangements von Figuren mit begleitenden mündlichen Prozessbeschreibungen. Bereits mit diesem Artikulationsumfang lassen sich alle im Curriculum ausgewiesenen inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen darstellen.

Den nächsten Schritt bildet die behutsame textliche Anreicherung dieser Performanzen, die allerdings insgesamt nicht Gegenstand allein der Kurse zur Mathematik sein kann, sondern von Kursen zum Schriftspracherwerb begleitet sein muss. Wie oben erwähnt, wird daher vorgeschlagen, jedwedes Prüfungsverfahren für diese Klientel so zu zerlegen, dass in einer ersten Stufe situative schriftliche und mündliche Artikulationen zugelassen sind und erst in einer zweiten Stufe schriftliche Textfähigkeit zur Darstellung der mathematischen Kompetenzen eingefordert wird.

Konsequenzen im Aufgabendesign. Beim Design eigener Aufgaben ist darauf zu achten, dass die Anforderung, letztlich auf den Grundschulabschluss oder später den Abschluss der Klasse 8 hinzuarbeiten, nicht dazu führt, dass die entsprechenden Aufgabenstellungen bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern den Eindruck erwecken, als seien sie für Kinder gemacht. Dies betrifft sowohl die Kontexte als auch die Textformen. Beides sollte so gestaltet sein, dass sich die Teilnehmer/-innen der Kurse als Erwachsene ernst genommen fühlen.

Dies ist verbunden mit der Anforderung, Erfolge, auch Teilerfolge, auf keinen Fall so zu charakterisieren als würde man sie mit bestimmten Stufen oder gar Altersstufen der kindlichen Entwicklung verbinden. Es liegt eine völlig andere Situation vor, die auch andere adäquate Formen der Würdigung und der Anerkennung erfordert.

Konsens mit den Lernenden. Ein spezifischer Unterschied zwischen den Teilnehmerinnen und Teilnehmern solcher Kurse und Schülerinnen und Schülern einer Grundschule oder Hauptschule wird darin gesehen, dass es möglich und wünschenswert ist, mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern über Zielvorstellungen der Kurse zu sprechen und formelle oder informelle Zielvereinbarungen zu treffen. Das schließt ein, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Gelegenheit bekommen, über Schwerpunktsetzungen innerhalb des Curriculums mitzubestimmen. Dies nicht nur aus Vorlieben heraus, sondern auch im Zusammenhang damit, dass die Teilnehmer/-innen zunehmend lernen, ihre eigenen Schwächen und Defizite so genau zu beschreiben, dass das Konzept des Lehrganges tatsächlich wie eine gezielte Unterstützung empfunden wird.

4.11 Aufgabenbeispiele

Die hier genannten Aufgabenbeispiele sind weitgehend in mathematischer Fachsprache formuliert. Sie umfassen Fragen und Experimente. Alle Grafiken sind bewusst sehr einfach gehalten und weitgehend auf Kästchenpapier dargestellt, sodass sie von den Kursleiterinnen und Kursleitern sowie den Kursteilnehmerinnen und Kursteilnehmern leicht reproduziert und nach eigenen Erfahrungen und eigenem Ermessen geändert werden können.

Die meisten Bilder sind als austauschbare Vorlagen gedacht, sodass de facto nicht Aufgaben, sondern **flexible Aufgabenformate** dargestellt sind.

Je nach Kurssituation kann es sinnvoll sein, die Aufgaben in einen konkreten Kontext zu überführen und in situative Sprache zu fassen. Zuerst sollte eine mündliche Bearbeitung angestrebt und die passende Sprache gesucht werden, erst später – wenn überhaupt – sollte eine schriftliche Bearbeitung folgen. Bei Zeichnungen kommt es nicht vorrangig auf die technische Genauigkeit an, wichtiger ist, dass die Zeichnungen ausweisen, dass die Lernenden das Richtige meinen. Vorrangig geht es um die **Strategien zum Lösen der Aufgaben**.

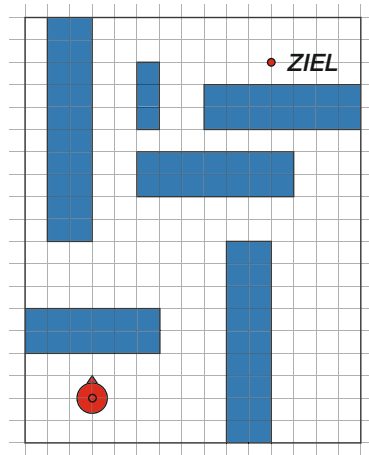
Erst wenn diese geklärt sind, kann man zum Optimieren der technischen Genauigkeit übergehen.

Dies ist eine Aufgabensammlung zum Start, die aufgrund von Erfahrungen in den Kursen auszubauen ist.

4.11.1 Sich in der Ebene und im Raum orientieren

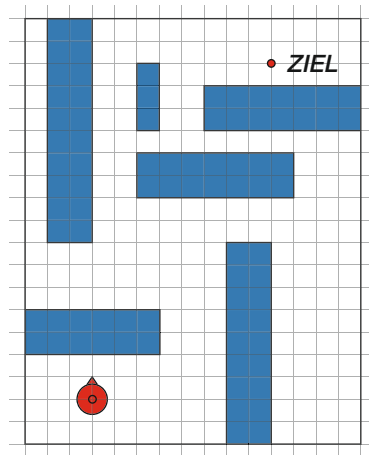
Aufgabe 1: „Wege führen, Person schaut stets in die gleiche Richtung“

Die Person in diesem Bild kann vorwärts und rückwärts gehen. Sie kann auch seitwärts nach links und rechts gehen, dreht sich dabei aber nicht. Beschreiben Sie ihr den Weg vom Start zum Ziel an den Hindernissen vorbei. Nutzen Sie zum Angeben von Entfernungen das Quadratgitter.



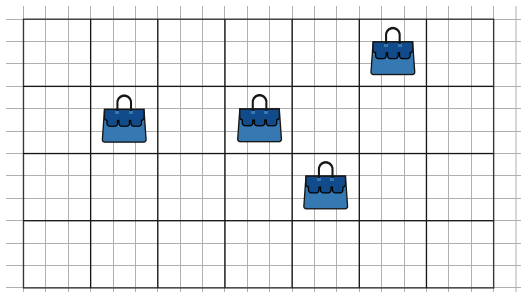
Aufgabe 2: „Wege führen, Person kann sich vor dem Weitergehen drehen“

Die Person in diesem Bild kann nur vorwärts gehen. Sie kann sich aber auch vor dem Weitergehen nach links oder rechts drehen und geht dann vorwärts in die neue Richtung. Beschreiben Sie ihr einen Weg vom Start zum Ziel an den Hindernissen vorbei. Nutzen Sie zum Angeben von Entfernungen das Quadratgitter.



Aufgabe 3: „Wo stehen die Taschen?“

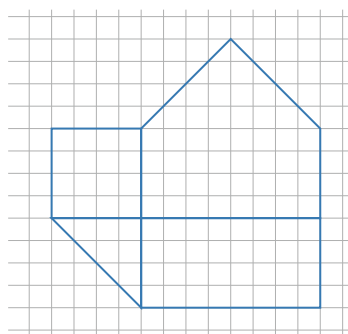
In ein Regal mit Schließfächern werden vier Taschen gestellt. Alle Fächer werden mit Türen verschlossen. Beschreiben Sie, in welchen Fächern die Taschen stehen.



4.11.2 Elementare geometrische Figuren kennen und herstellen

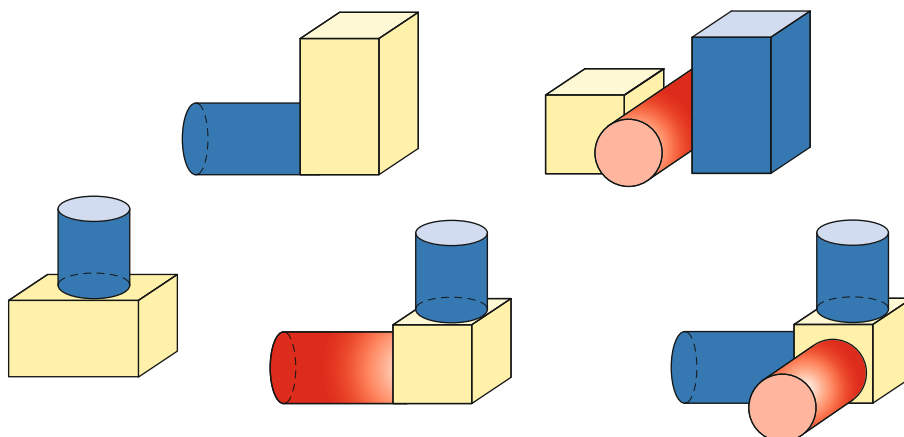
Aufgabe 4: „Ebene Figurenteile beschreiben“

Diese Figur besteht aus vier ebenen Teilfiguren. Beschreiben Sie die Teilfiguren.



Aufgabe 5: „Räumliche Figurenteile beschreiben“

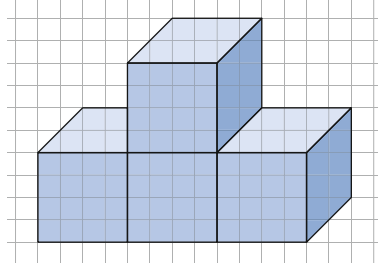
Diese Bauwerke bestehen aus zwei, drei oder vier Klötzen. Welche Form haben die Klötze?



Aufgabe 6: „Bauwerk und Teile anhand eines Bauvorgangs beschreiben“

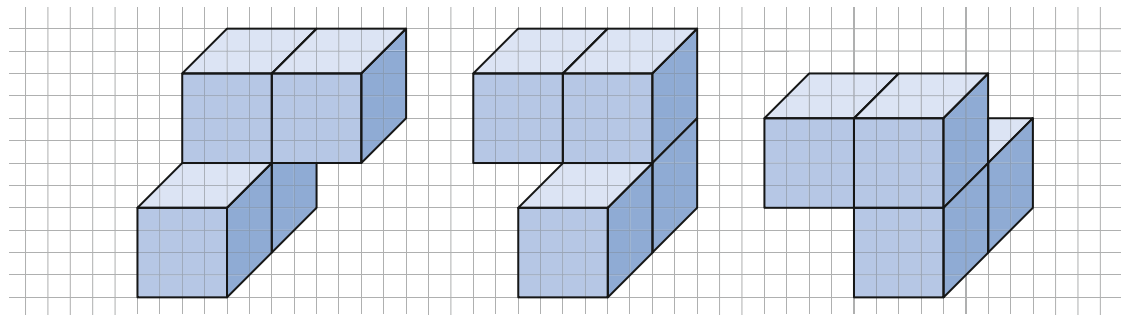
Hier sind vier gleich große Würfel zu einem Bauwerk zusammengefügt.

Beschreiben Sie, wie dieses Bauwerk aus den vier Würfeln gebaut wird.



Aufgabe 7: „Bauwerk aus vier Würfeln identifizieren“

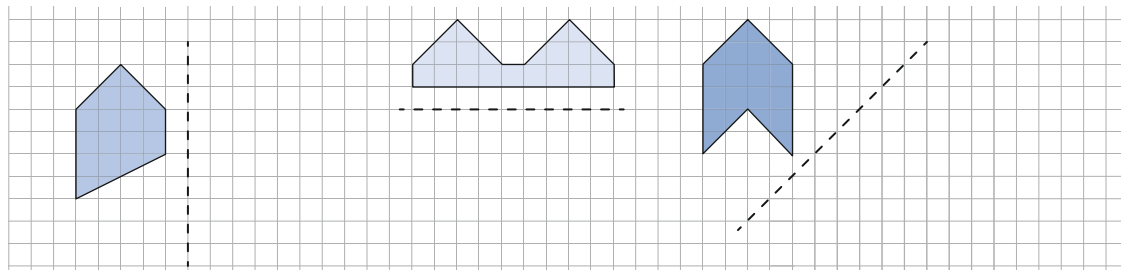
Es gibt vier gleich große Würfel. Der erste Würfel wird auf den Tisch gesetzt. Der zweite wird davor an den ersten geklebt. Der dritte wird auf den zweiten geklebt. Der vierte wird rechts an den dritten geklebt. Wie sieht das Bauwerk aus? Ist es auf den Bildern zu sehen? An welcher Stelle sollte man den Text möglicherweise ergänzen oder genauer fassen?



4.11.3 Elementare geometrische Abbildungen erkennen, kennzeichnen und nutzen

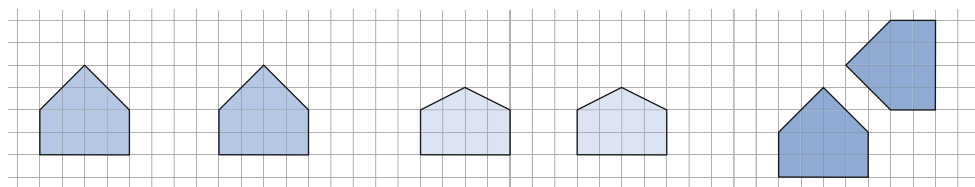
Aufgabe 8: „Spiegelbilder finden“

Zeichnen Sie zu den Figuren und den Spiegelachsen jeweils das Spiegelbild.



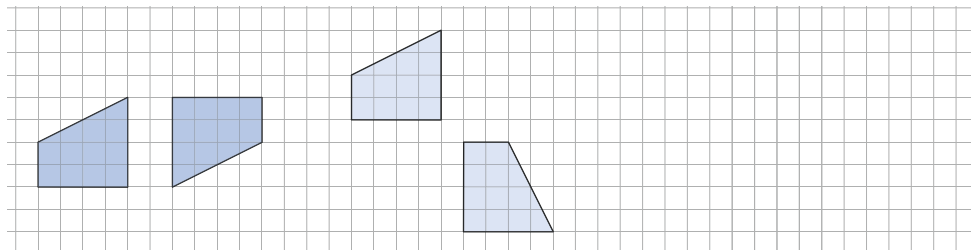
Aufgabe 9: „Spiegelachsen finden“

Zeichnen Sie zu den beiden Figuren jeweils die Spiegelachse.



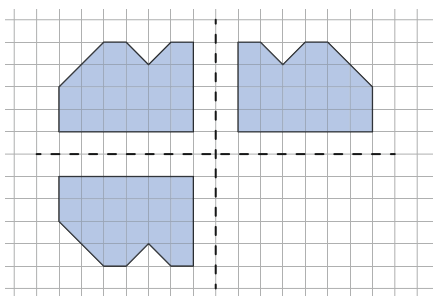
Aufgabe 10: „Bewegungen bei gedrehten Figuren beschreiben“

Beschreiben Sie, wie die beiden Figuren jeweils zusammenhängen.



Aufgabe 11: „Spiegeln an zwei Achsen“

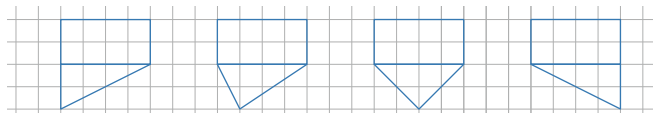
Die Figuren sind an beiden Achsen gespiegelt. Ergänzen Sie die fehlende Figur.



4.11.4 Verfahren zum Messen und Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Rauminhalten anwenden

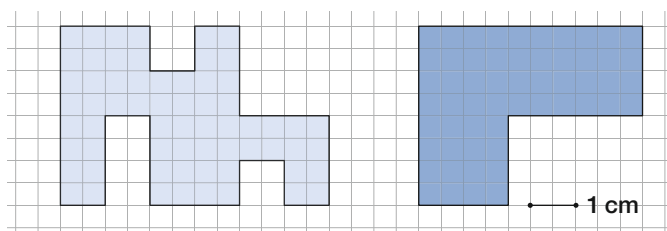
Aufgabe 12: „Flächen im Quadratgitter“

Hier sind vier Flächen im Gitter gezeichnet. Welche sind gleich groß?



Aufgabe 13: „Einteilen von Flächen zur Flächenmessung“

Teilen Sie diese Flächen in Rechtecke ein und bestimmen Sie damit ihr Flächenmaß.

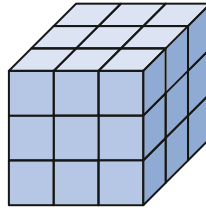


Aufgabe 14: „Würfelschnitt“

Ein Würfel wird parallel zu einer Seitenfläche durchgeschnitten. Wie viele solche Schnitte braucht man, bis die Oberfläche der Teile insgesamt doppelt so groß ist wie die des Würfels zu Beginn?

Aufgabe 15: „Geänderte Oberfläche bei einem Würfelbauwerk“

Hier ist ein Körper aus 27 kleinen Würfeln gebaut. Ist der große Körper auch ein Würfel? Oben vorn in der Mitte wird ein kleiner Würfel herausgenommen. Ist die Oberfläche des Körpers nun kleiner geworden oder gleichgeblieben, oder ist sie größer geworden?

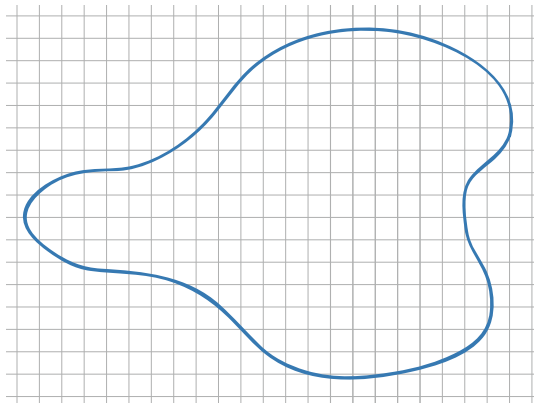


Aufgabe 16: „Oberfläche einer Apfelsine“

Ein Experiment: Gegeben ist eine Apfelsine. Zeichnen Sie sechs Kreise mit demselben Durchmesser, den die Apfelsine hat. Schälen Sie nun die Apfelsine, zerteilen Sie die Schale in kleine Stückchen und decken Sie die Kreise mit den Schalenstückchen passend ab. Wie viele Kreise kann man abdecken? Vergleichen Sie die Ergebnisse für verschieden große Apfelsinen.

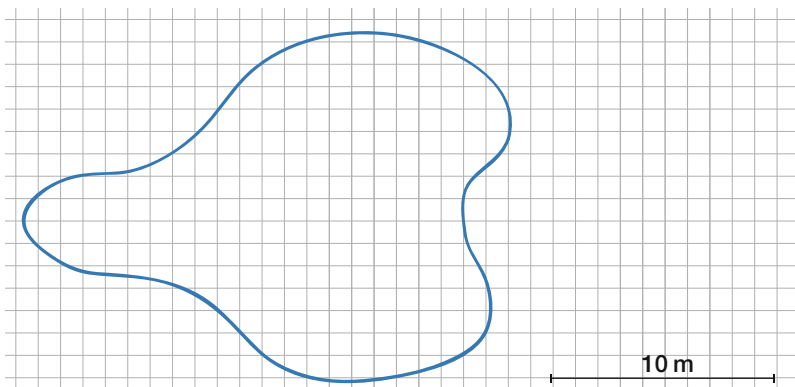
Aufgabe 17: „Fläche eines Sees mit einem Rechteck vergleichen“

Hier ist ein See gezeichnet. Zeichnen Sie darüber ein Rechteck, das möglichst den- selben Flächeninhalt hat wie der See. Worauf ist dabei zu achten?



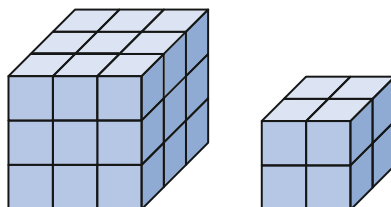
Aufgabe 18: „Durchmesser und Fläche eines Sees schätzen“

Hier ist ein See gezeichnet. Zeichnen Sie darüber ein Rechteck, das möglichst den- selben Flächeninhalt hat wie der See. Unten ist eine Strecke gezeichnet, die angibt, wie lang Strecken auf dieser Karte sind. Schätzen Sie damit den größten Durch- messer und den Flächeninhalt des Sees.



Aufgabe 19: „Rauminhalt bei wachsenden Würfeln“

Ein Würfel mit einem Dezimeter Kantenlänge hat einen Liter Rauminhalt.
Welchen Rauminhalt hat ein Würfel mit zwei Dezimetern Kantenlänge?
Welchen Rauminhalt hat ein Würfel mit drei Dezimetern Kantenlänge?



Aufgabe 20: „Rauminhalt bei wachsenden Kugeln“

Eine Kugel mit einem Dezimeter Durchmesser, etwa eine große Orange, hat etwa einen halben Liter Rauminhalt.
Welchen Rauminhalt hat schätzungsweise eine Kugel mit zwei Dezimetern Durchmesser, etwa eine Melone?

4.11.5 Elementare Brüche in Figuren darstellen

Aufgabe 21: „Rechtecke einteilen“

Zeichnen Sie drei Rechtecke, jeweils 8 cm breit und 6 cm hoch.

Zerlegen Sie das erste Rechteck in acht gleich große Teile, das zweite Rechteck in sechs gleich große Teile und das dritte Rechteck in zwölf gleich große Teile. Beschreiben Sie, wie man vorgehen kann und was dabei zu entdecken ist.

Aufgabe 22: „Bruchstreifen herstellen“

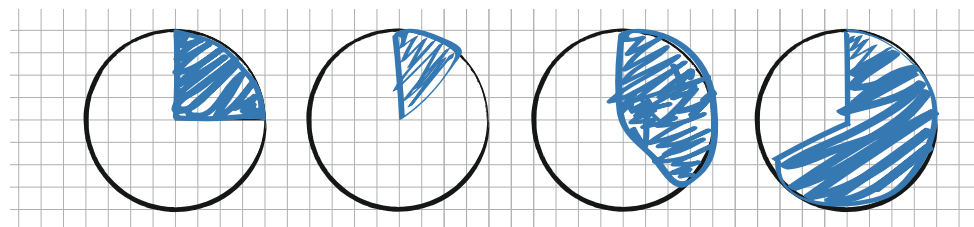
Ein Rechteck ist in zwölf gleich breite Streifen eingeteilt.

Zerlegen Sie schätzend und rechnend den zweiten Streifen in zwei gleich lange Teile, den dritten Streifen in drei gleich lange Teile, den vierten Streifen in vier gleich lange Teile und so weiter bis zum zwölften Streifen.

Wie kann man vorgehen und was ist dabei zu entdecken?

Aufgabe 23: „Kreisteile erkennen“

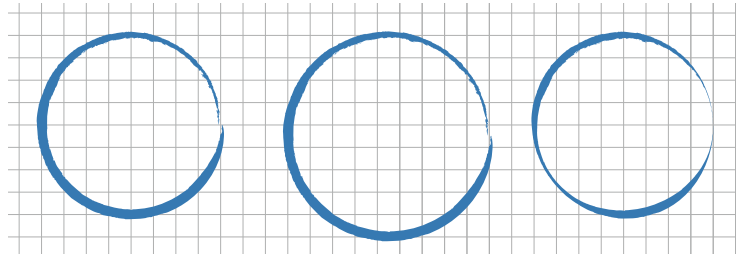
Hier sind vier Kreise gezeichnet. Welcher Teil ist in den Kreisen jeweils markiert?



Aufgabe 24: „Kreisteile markieren, Hälften, Viertel, Drittel“

Hier sind drei Kreise gezeichnet.

Markieren Sie schätzend im ersten Kreis die Hälfte, im zweiten Kreis drei Viertel und im dritten Kreis ein Drittel.



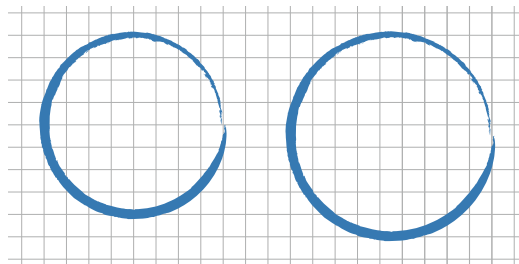
Aufgabe 25: „Kreisteile markieren, Fünftel und Zehntel“

Hier sind zwei Kreise gezeichnet.

Markieren Sie schätzend im ersten Kreis zwei Fünftel, die aussehen wie Tortenstücke.

Versuchen Sie dann, den zweiten Kreis in zehn gleich große Teile zu zerlegen, die aussehen wie Tortenstücke.

Wie kann man vorgehen? Wie kann man prüfen, ob das Ergebnis gut ist?



LITERATURVERZEICHNIS GEOMETRIE

BRUDER, R.; HEFENDEHL-HEBEKER, L.; SCHMIDT-THIEME, B.; WEIGAND, H. G. (2015):

Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

DRÜKE-NOE, CH. U.A. (2011):

Basiskompetenzen Mathematik für Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht. Berlin: Cornelsen.*

FRÖBEL, F. (1840):

Brief an Heinrich Langethal in Burgdorf vom 03.10.1840 (Blankenburg). UBB 111, Bl 341–342, Brieforiginal 1 B 8 4 S. Copyright © 2008 BBF/HFF. URL: <http://bbf.dipf.de/editionen/froebel/fb1840-10-03-02.html>, zuletzt aufgerufen am 30.01.2008.

KMK (2005a):

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. München: Luchterhand, Wolters Kluwer Deutschland.

KMK (2005b):

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. München: Luchterhand, Wolters Kluwer Deutschland.

LEHRER, R.; CHAZAN, D. (1998):

Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

MEYERHÖFER, W.; HARTMANN, C.; JAHNKE, T.; WOLLRING, B. (2017):

DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e.V. Bonn.

MINISTERIUM FÜR BILDUNG RHEINLAND-PFALZ (2014):

Rahmenplan Grundschule, Teilrahmenplan Mathematik. Mainz.

PIAGET, J.; INHELDER, B. (1971):

Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Stuttgart: Klett Studienbücher.

REINHOLD, F. (2016):

Prima ankommen im Fachunterricht Mathematik, Arbeitsbuch DaZ mit Lösungen, Klasse 5–7. Berlin: Cornelsen.

ROST, D. H. (1977):

Raumvorstellung – Psychologische und pädagogische Aspekte. Beltz Forschungsberichte. Weinheim: Beltz.

THURSTONE, L. L. (1938):

Primary Mental Abilities.

Chicago: University of Chicago Press.

VAN DEN HEUWEL-PANHUIZEN, M.; BUYS, K. (2005):

Young Children Learn Measurement and Geometry. A Learning Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for the Lower Grades in Primary Schools. TAL Project, Freudenthal Institute, Utrecht University.

VERGNAUD, G. (1982):

A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In: Carpenter, T. P.; Moser, J. M.; Romberg, T. A. (Hrsg.): Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective (S. 39–59). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

WOLLRING, B.; RINKENS, H. D. (2007):

Raum und Form. In: Walther, G.; van den Heuvel-Panhuizen, M.; Granzer, D.; Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule. Mathematik konkret (S. 118–140). Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB). Berlin: Cornelsen Scriptor.

WOLLRING, B. (2008):

Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Kasseler Forschergruppe (Hrsg.): Lernumgebungen auf dem Prüfstand. Bericht 2 der Kasseler Forschergruppe Empirische Bildungsforschung Lehren – Lernen – Literacy (S. 9–26). Kassel: kassel university press GmbH. Zudem in: Hessisches Kultusministerium (2008): Mathematikunterricht in der Grundschule – Kennzeichnung von Lernumgebungen. Wiesbaden: HKM, Referat für Presse und Öffentlichkeitsarbeit. Zudem in: Peter-Koop, A.; Lilitakis, G.; Spindeler, G. (Hrsg.), 2010: Lernumgebungen – Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule S. 9–23. Offenburg: Mildenerberger.

WOLLRING, B. (2012):

Raumvorstellung entwickeln – Eine zentrale Forderung für mathematische Bildung. Fördermagazin 2/2012 zum Thema „Geometrische Kompetenz“, S. 8–12.

Rahmencurriculum Rechnen

Anhang

AUTOREN

Dr. Wolfram Meyerhöfer

ist Professor für Mathematikdidaktik an der Universität Paderborn.

Christian Hartmann

ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Bereich Mathematikdidaktik an der Universität Paderborn.

Dr. Thomas Jahnke

ist Professor für Mathematikdidaktik an der Universität Potsdam.

Dr. Bernd Wollring

war Professor für Geometriedidaktik an der Universität Kassel.

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung



Deutscher
Volkshochschul-Verband

Herausgeber:

**Projekt „Rahmencurriculum und Kurskonzept
für die abschlussorientierte Grundbildung“**

Deutscher Volkshochschul-Verband e. V.
Obere Wilhelmstraße 32
53225 Bonn
Tel.: 0228. 97569-0
Fax.: 0228. 97569-30

2., ergänzte Auflage: 2017

Autoren: Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer, Christian Hartmann,
Prof. Dr. Thomas Jahnke, Prof. Dr. Bernd Wollring
Redaktion: Dr. Angela Rustemeyer, Ulrike Arnold, Annegret Ernst,
Gisela Lorenz, Dr. Monika Socha
Lektorat: Korrektur + Lektorat, Christian Kelly, Bonn; Dr. Angelika Fallert-Müller,
Redaktionsbüro Text und Wissenschaft, Groß-Zimmern
Gestaltung: Gastdesign, Wolfgang Gast, Düren
Satz: SMP Oehler, Remseck am Neckar; zweiband.media, Berlin
Druck: KRAHE DRUCK GmbH, Bad Honnef

Auflage: 1500