

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

2.1a Funktionen von Zahlen und Zahlnutzung

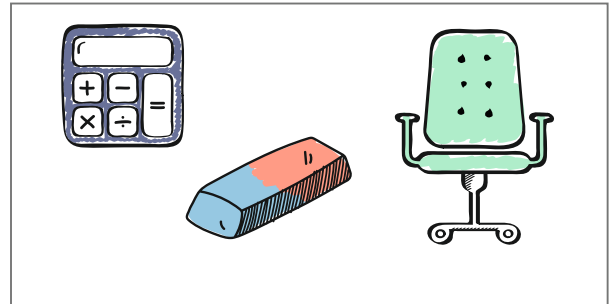
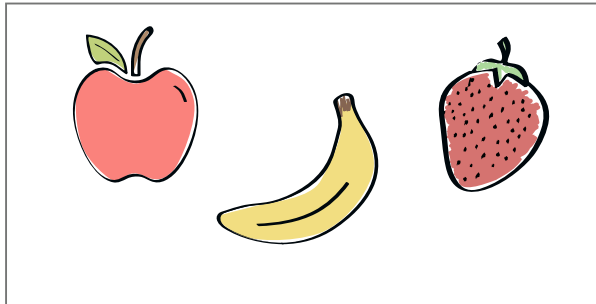
Hier finden Sie einige Beispiele für die unterschiedliche Nutzung von Zahlen. Ordnen Sie den Beispielen jeweils eine Kategorie (**M**, **R**, **K**, **C**, **O**) zu. Begründen Sie Ihre Entscheidungen und denken Sie sich weitere Beispiele aus.

M Maßzahl Zahlen zum Messen „noch 5 Kilometer“	R Rechenzahl Zahlen zum Rechnen „Wenn du mir noch 2 € gibst, haben wir insgesamt 10 €...“	K Kardinalzahl Zahlen als Anzahl „Ich habe zwei Brüder...“	C Codierung Zahlen als Code oder Schlüssel für etwas „14473 ist die Postleitzahl von ...“	O Ordnungszahl Zahlen zum Angeben einer Reihenfolge „Sie hat den 3. Platz belegt...“
---	--	---	--	---

K	Das Rad kostet über 250€.
	Die PIN meines Handys ist einfach.
	Von fünf Leuten sind heute zwei nicht da.
	Wie viele sind wir, wenn Peter noch kommt?
	Lauras Autokennzeichen ist: P – LS 246
	Das Päckchen darf höchstens 2 Kilogramm schwer sein.
	Mathe haben wir von 18 bis 20 Uhr.
	Das Shirt ist zweite Wahl und deshalb günstiger.
	Ich habe heute schon vier Tassen Kaffee getrunken.
	Ich bin heute zum dritten Mal hier.
	Alex hat zwei Söhne.
	Das habe ich dir schon hundertmal gesagt.
	Heute ist der 2. Februar 2018.
	Wir brauchen noch eine Packung Mehl, dann haben wir alles.
	Hamid ist bestimmt wieder der Erste am Buffet.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

2.2a Der kardinale Aspekt



1. Was sehen Sie im linken Rahmen? Wie viele Objekte sind es insgesamt? Finden Sie einen Oberbegriff.

2. Was sehen Sie im rechten Rahmen? Wie viele Objekte sind es insgesamt? Finden Sie einen Oberbegriff.

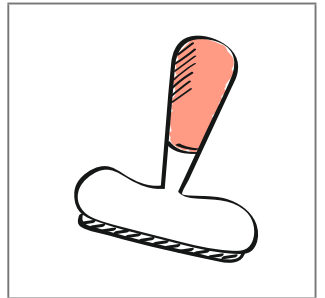
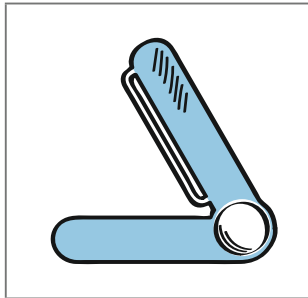
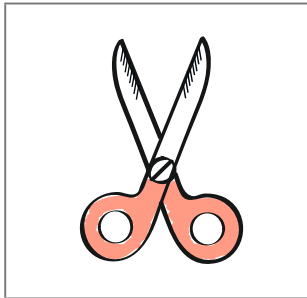
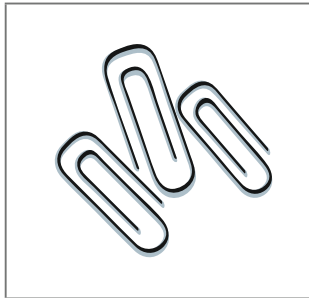
3. Wie unterscheiden sich beide Gruppen? Schreiben Sie alles auf, was Ihnen dazu einfällt.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4. Ist es richtig, wenn jemand behauptet „Auf den Bildern oben sind es insgesamt sechs.“?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

2.2b Der kardinale Zahlaspekt



1. Wie viele sind es?

2. Was haben alle gemeinsam?

3. Wie viele sind es, wenn ich mit dem Zählen bei dem Tacker beginne? Hat sich die Anzahl verändert? Wie viele sind es jetzt auf den Bildern oben?

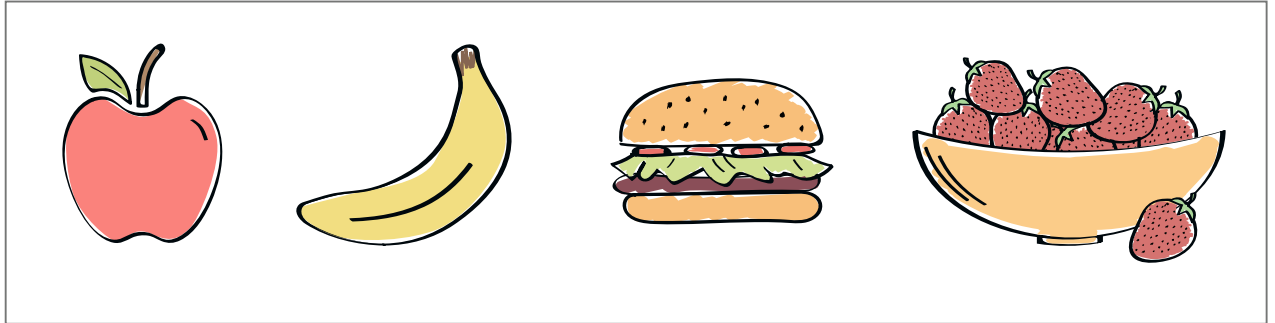
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4. Wie viele Gegenstände aus **Metall** gibt es? Welche sind das?

5. Welche anderen Eigenschaften finden Sie, mit denen einige der oben abgebildeten Elemente zusammengezählt werden könnten?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

2.2c Der kardinale Zahlaspekt



1. Wie viele Elemente sind es? Was haben alle gemeinsam?

2. Passt ein Element nicht zu den anderen? Wenn ja, warum nicht?

3. Wenn das nicht passende Element entnommen wird, wie viele sind es dann? Was haben alle übrigen Elemente gemeinsam?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4. Wie viele Elemente sind **rund**?

5. Welche anderen Eigenschaften gibt es noch, mit denen man einzelne Elemente zusammenfassen könnte?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

2.1a LÖSUNGEN – Funktionen von Zahlen und Zahlnutzung

Hier finden Sie einige Beispiele für die unterschiedliche Nutzung von Zahlen. Ordnen Sie den Beispielen jeweils eine Kategorie (**M**, **R**, **K**, **C**, **O**) zu. Begründen Sie Ihre Entscheidungen und denken Sie sich weitere Beispiele aus.

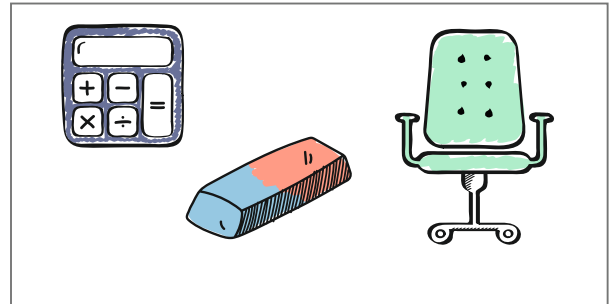
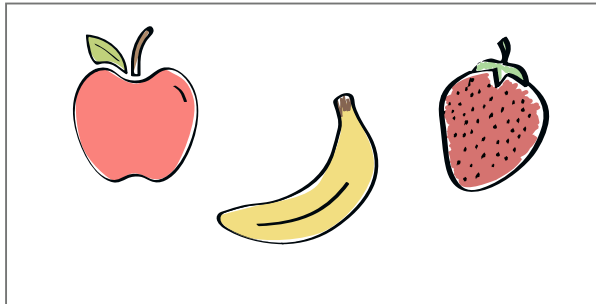
M Maßzahl Zahlen zum Messen	R Rechenzahl Zahlen zum Rechnen	K Kardinalzahl Zahlen als Anzahl	C Codierung Zahlen als Code oder Schlüssel für etwas	O Ordnungszahl Zahlen zum Angeben einer Reihenfolge
„noch 5 Kilometer“	„Wenn du mir noch 2 € gibst, haben wir insgesamt 10 €...“	„Ich habe zwei Brüder...“	„14473 ist die Postleitzahl von ...“	„Sie hat den 3. Platz belegt...“

Die Lösungen sind nicht vollständig und bei guter Begründung lässt sich an einigen Stellen noch gut diskutieren.

K	Das Rad kostet über 250 €.
C	Die PIN meines Handys ist einfach.
R, K	Von fünf Leuten sind heute zwei nicht da.
R, K	Wie viele sind wir, wenn Peter noch kommt?
C	Lauras Autokennzeichen ist: P – LS 246
M	Das Päckchen darf höchstens 2 Kilogramm schwer sein.
O	Mathe haben wir von 18 bis 20 Uhr.
O	Das Shirt ist zweite Wahl und deshalb günstiger.
K	Ich habe heute schon vier Tassen Kaffee getrunken.
O	Ich bin heute zum dritten Mal hier.
K	Alex hat zwei Söhne.
K, C	Das habe ich dir schon hundertmal gesagt.
O	Heute ist der 2. Februar 2018.
K, R	Wir brauchen noch eine Packung Mehl, dann haben wir alles.
O	Hamid ist bestimmt wieder der Erste am Buffet.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

2.2a LÖSUNGEN – Der kardinale Zahlaspekt



1. Was sehen Sie im linken Rahmen? Wie viele Objekte sind es insgesamt? Finden Sie einen Oberbegriff.

Zusammen sind es drei Stücke Obst.

2. Was sehen Sie im rechten Rahmen? Wie viele Objekte sind es insgesamt? Finden Sie einen Oberbegriff.

Zusammen sind es drei Bürogegenstände.

3. Wie unterscheiden sich beide Gruppen? Schreiben Sie alles auf, was Ihnen dazu einfällt.

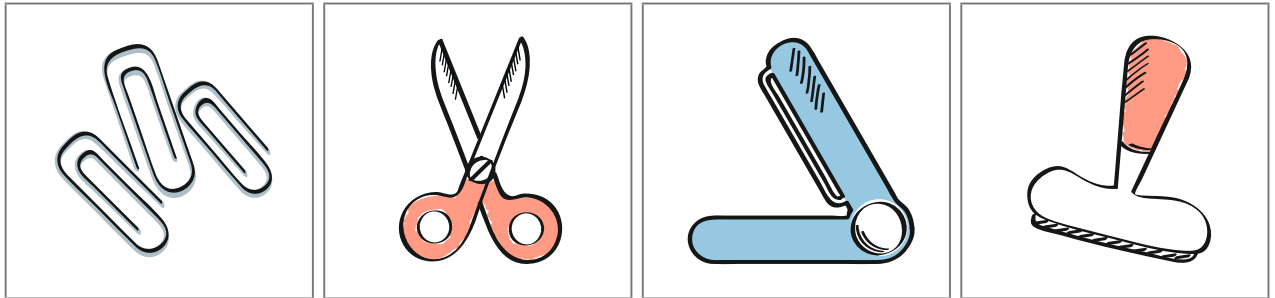
z.B. essbar – nicht essbar / verderblich – nicht verderblich

4. Ist es richtig, wenn jemand behauptet „Auf den Bildern oben sind es insgesamt sechs.“?

Gegenstände können auch dann zusammengezählt werden, wenn sie ganz unterschiedlich sind.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

2.2b LÖSUNGEN – Der kardinale Zahlaspekt



1. Wie viele sind es?

Es können unterschiedliche Antworten „richtig“ sein,
z.B. 4 Bilder oder 6 Gegenstände

2. Was haben alle gemeinsam?

z.B. Büromaterial, Rundungen, gemischte Materialien

3. Wie viele sind es, wenn ich mit dem Zählen bei dem Tacker beginne?
Hat sich die Anzahl verändert? Wie viele sind es jetzt auf den Bildern oben?

Die Anzahl ändert sich nicht. Siehe Antwort 1.

4. Wie viele Gegenstände aus **Metall** gibt es? Welche sind das?

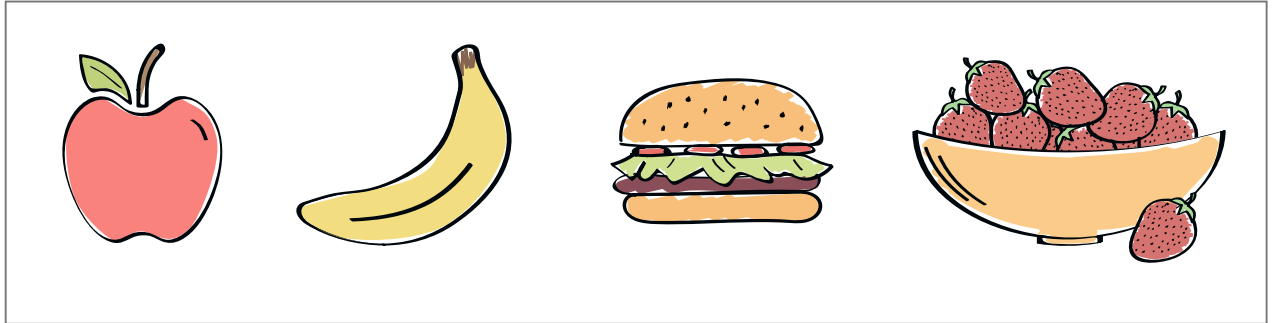
3 Büroklammern, 1 Schere, 1 Tacker. Insgesamt 5.

5. Welche anderen Eigenschaften finden Sie, mit denen einige der oben abgebildeten Elemente zusammengezählt werden könnten?

diverse Antworten möglich, z.B. alle, die einen Griff haben

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

2.2c LÖSUNGEN – Der kardinale Zahlaspekt



1. Wie viele Elemente sind es? Was haben alle gemeinsam?

diverse Antworten möglich, z.B. 4 Bilder, 4 Lebensmittel, 3 einzelne Lebensmittel und mehrere Erdbeeren

2. Passt ein Element nicht zu den anderen? Wenn ja, warum nicht?

diverse Antworten möglich, z.B. Banane, weil man sie schälen muss; Burger, weil er nicht zum Obst gehört

3. Wenn das nicht passende Element entnommen wird, wie viele sind es dann? Was haben alle übrigen Elemente gemeinsam?

diverse Antworten möglich, z.B. 3 Obstsorten

4. Wie viele Elemente sind **rund**?

diverse Antworten möglich, z.B. keines, wenn man es ganz genau nimmt; 2: Apfel und Burger

5. Welche anderen Eigenschaften gibt es noch, mit denen man einzelne Elemente zusammenfassen könnte?

diverse Antworten möglich, z.B. „wächst am Baum“
„sollte man vor Verzehr waschen“

Inhaltsverzeichnis

3 MENGEN UND ZAHLEN VERÄNDERN (Alina Guthier unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I	Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?	2
II	Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?	3
III	An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?	4
IV	Wo finden sich didaktische Erläuterungen?	4
V	Welche Materialien werden benötigt?	4
3.1	Addition	5
3.1.1	Kursgespräch Mengenhandlung Addition	5
3.1.2	Partnerübung Mengenhandlung Addition	8
3.2	Subtraktion	12
3.2.1	Kursgespräch Mengenhandlung Subtraktion	13
3.2.2	Partnerübung Mengenhandlung Subtraktion	15

3 MENGEN UND ZAHLEN VERÄNDERN

(Alina Guther unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Mengen und Zahlen können verändert werden. Dies ist den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Kurses bereits bekannt, denn wir lösen viele Additions- und Subtraktionsaufgaben in unserem Alltag, ohne dass es uns in jedem Moment bewusst ist. Schwierigkeiten mit dem Rechnen entstehen meist dadurch, dass die Mengen- und Zahlenebene nicht (richtig) zusammengedacht werden. Wenn unbekannt ist, dass Gleichungen in Mengenhandlungen übersetzt werden können – und umgekehrt –, wird das Addieren und Subtrahieren häufig nur als ein Hoch- und Runterzählen an einer Zahlenreihe verstanden.

Beispiel:

Die Gleichung $2 + 3 = ?$ beschreibt auf der Mengenebene entweder,

- dass zu einer Zweiermenge eine Dreiermenge hinzugefügt wird oder
- dass eine Zweier- und eine Dreiermenge zusammengeschoben werden oder
- dass eine Zweier- und eine Dreiermenge zusammengedacht werden.

In allen drei Fällen steht die Frage, wie viele es insgesamt sind.

Auch bei der Subtraktion gibt es eine Frage, die durch das Lösen der Aufgabe beantwortet wird: *Wie viele sind übrig?* Wenn im eben genannten Beispiel $2 + 3 = 5$ von der Fünf wieder drei weggenommen werden, bleibt zwingend die Zweiermenge übrig ($5 - 3 = 2$). Sollte hingegen die Dreiermenge weggeschoben oder auch nur weggedacht werden, bleiben zwei übrig ($5 - 3 = 2$).

Beispiele für Mengenhandlungen, die in Gleichungen übersetzt werden können (und umgekehrt):

- Im Obstkorb liegen zwei Bananen, es werden noch drei Bananen dazugelegt. Jetzt sind es zusammen fünf Bananen.
 $2 \text{ Bananen} + 3 \text{ Bananen} = 5 \text{ Bananen}$
- Auf dem Parkplatz stehen fünf rote und drei grüne Autos. Insgesamt stehen acht Autos auf dem Parkplatz.
 $5 \text{ rote Autos} + 3 \text{ grüne Autos} = 8 \text{ Autos}$
- Im Einkaufswagen befinden sich bereits einige Artikel. Dann werden jedoch drei Artikel davon wieder in das Regal gestellt, weil das Geld nicht für alle Artikel reichen würde. Es reicht nur noch für die Butter und das Brot. Wie viele Artikel lagen vorher im Einkaufswagen?
 $5 \text{ Artikel} - 3 \text{ Artikel} = 2 \text{ Artikel}$
- Mary schaut in ihren Geldbeutel. Dort ist nur noch ein Zwei-Euro-Stück. Sie weiß, dass zu Hause noch 8€ auf dem Tisch liegen. Insgesamt hat Mary 10€.
 $2\text{€} + 8\text{€} = 10\text{€}$

Ein weiteres Hindernis im mathematischen Lernen sind Unkenntnis bzw. ein Fehlverständnis der Operationszeichen und des Gleichheitszeichens. Wenn die Teilnehmer/-innen nicht wissen, was Plus-, Minus- und Gleichheitszeichen bedeuten, können sie entsprechende Aufgaben nicht verständlich lösen. Ein großes Problem des heutigen Schulunterrichtes ist, dass Kinder bereits ab dem ersten Schuljahr mit dem Plus-, dem Minus- und dem Gleichheitszeichen konfrontiert werden, aber nur wenigen Kindern wird während ihrer Grundschulzeit erklärt, was diese Symbole genau bedeuten. Erst in der siebten Klasse, beim Umformen von Gleichungen und Termen, kommt dem Gleichheitszeichen gebührende Aufmerksamkeit zu. Nun wird besprochen, dass links und rechts dieses Zeichens gleich viel sein soll und dass es deshalb diesen Namen trägt („ist gleich“).

Ziel der nachfolgenden Stunden ist es, dass sich die Teilnehmer/-innen darin üben, Gleichungen in Mengenhandlungen und umgekehrt Mengenhandlungen in Gleichungen zu übersetzen. Gleichungen sollen für alle Kursteilnehmer/-innen nicht mehr eine bloße Ansammlung mathematischer Symbole darstellen, sondern sie werden diese Zeichen übersetzen und verstehen können.

Anschließend werden die wichtigsten Rechenregeln zur Addition und Subtraktion besprochen. Ziel ist dabei nicht, die Definition von Begriffen oder Rechenregeln auswendig zu wissen, sondern das Erkennen und Bewusstmachen von grundlegenden Gesetzmäßigkeiten.

Weiterhin notwendig ist das Wissen um Gesamt- und Teilmengen bei Addition und Subtraktion. Dieses Wissen wird zu einem späteren Zeitpunkt im Kursverlauf zur Nutzung von Zahlerlegungen und zur Fähigkeit, Gleichungen und Ungleichungen zu lösen, ausgearbeitet. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern sollte jedoch bereits in den folgenden Kapiteln bewusst werden, dass bei der Addition die Summe immer mindestens genauso groß wie oder größer als der größte Summand sein muss. Bei der Addition werden immer mindestens zwei Teilmengen zu einer Gesamtmenge zusammengefasst. Anders bei der Subtraktion. Hier wird aus der Gesamtmenge ein Teil entnommen und der andere Teil der Menge bleibt übrig. Deshalb muss bei der Subtraktion die Gesamtmenge die Menge sein, von der höchstens der gleich hohe Wert entnommen werden kann. Das Wissen um die Zusammenhänge von Gesamt- und Teilmengen hilft nicht nur beim Lösen einfacher Gleichungen, sondern wird die Teilnehmer/-innen gleichzeitig auch in die Lage versetzen, Platzhalteraufgaben zu verstehen und zu lösen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

In der Regel ist bereits bekannt, dass beim Addieren die Reihenfolge der Summanden unerheblich ist. Dies ist allerdings nicht ganz korrekt. Für das Resultat der Aufgabe $2 + 3 = ?$ ist es egal, ob $2 + 3$ oder $3 + 2$ gerechnet wird. Es sind insgesamt fünf. Für die Übersetzung einer Gleichung in eine Mengenhandlung – und umgekehrt – ist es jedoch wichtig, ob erst zwei oder erst drei da gewesen sind.

Noch größere Bedeutung erlangt die Reihenfolge der Summanden beim Lösen von Platzhalteraufgaben ($\square + 3 = 5$). Manche Erwachsene und Kinder empfinden Platzhalteraufgaben, im Vergleich zu anderen Gleichungen, als deutlich schwieriger zu lösen. Auch hier liegt die Ursache bei der mangelnden Verknüpfung von Mengen- und Zahlenebene. Wenn aber bekannt ist, dass die Gleichung $\square + 3 = 5$ beschreibt, dass zu einer Menge drei hinzugekommen sind ($+ 3$), es jetzt fünf sind ($= 5$) und sich die Frage stellt, wie viele es vorher waren, wäre die Aufgabe für viele Menschen leicht zu lösen. Kompliziert sind Platzhalteraufgaben vor allem, wenn nicht bekannt ist, dass Gleichungen Mengenhandlungen beschreiben können.

Noch deutlicher wird dieser Zusammenhang, sobald bei Platzhalteraufgaben größere Zahlen im Spiel sind. Es braucht kein Auswendiglernen von Rechenregeln, wenn bekannt ist, dass bei $? + 234 = 534$ zu einer unbekannten Menge 234 hinzugefügt wurden und es dann insgesamt 534 sind. Wer die Mengenhandlung zu dieser Gleichung beschreiben kann, für den ist es weniger schwer zu erkennen, dass die Anfangsmenge gefunden werden kann, indem 234 wieder von 534 weggenommen werden.

Beispiel Platzhalteraufgaben: Zusammenhang von Addition und Subtraktion

$$300 + 234 = 534 \quad \text{denn} \quad 534 - 234 = 300$$

Bezüglich der Subtraktion sollten die unterschiedlichen Funktionen des Minuenden (der links vom Minuszeichen stehenden Zahl, die die Ausgangsmenge oder Gesamtmenge beschreibt) und des Subtrahenden (der rechts vom Minuszeichen stehenden Zahl, die die entnommene Teilmenge beschreibt) sicher erfasst worden sein. Wenn Teilnehmer/-innen bei der Gleichung $3 - 5 = \underline{\quad}$ kein Problem¹ auffällt, liegt das nicht daran, dass

¹ Die Gleichung $3 - 5 = \underline{\quad}$ ist lösbar, jedoch soll tendenziell in Stufe 1 im Bereich der positiven Zahlen verblieben werden. Trotzdem kann die Kursleitung mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern diskutieren, dass Aufgaben, bei denen der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, lösbar sind. Sie sollten sich nicht dazu hinreißen lassen, ein n. l. (nicht lösbar) als Lösung zu notieren. Man kann sagen, dass die Aufgabe im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar ist. Für einige Teilnehmer/-innen kann es aber nur schwerlich durchschaubar sein, warum und an welchen Stellen und aus welchen Gründen manchmal ein „nicht lösbar“ erscheint, wenn es offenbar eine Lösung gibt.

DIDAKTISCHE EINFÜHRUNG

sie nicht wissen, dass fünf mehr sind als drei. Das fehlende Problembewusstsein kann einen Hinweis darauf geben, dass der Aufbau einer Subtraktionsgleichung nicht vollends verstanden ist. Die Bedeutung und Rolle des Minuenden und des Subtrahenden müssen exakt herausgearbeitet werden, bevor thematisch weitergearbeitet werden kann.

Ein weiterer Fehlschluss kann sein, dass die Gesamtmenge bei der Addition *immer hinten* und bei der Subtraktion *immer vorne* steht. Dieser Fehlschluss sollte, wenn bei einer Teilnehmerin oder einem Teilnehmer so vorhanden, besprochen werden.

Beispiele:

Die Gesamtmenge steht bei der Addition *nicht immer hinten* und bei der Subtraktion *nicht immer vorne*.

$$5 = 3 + 2$$

$$2 + 3 = 6 - 1$$

$$4 = 6 - 2$$

Wichtig ist es, bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein übertragbares Wissen um Mengenhandlungen bei Addition und Subtraktion zu schaffen, sodass sie erkennen können, welche die Gesamt- und welche die Teilmengen sind.

Das Wissen um das korrekte Vertauschen der Glieder in Additions- und Subtraktionsgleichungen sollte so sicher sein, dass die Teilnehmer/-innen nicht glauben, dass alle Zahlen beliebig vertauscht werden können. Beim Vertauschen von Zahlen in Gleichungen muss immer das Operationszeichen (Rechenzeichen) mitgedacht werden.

Beispiele für das Vertauschen von Zahlen und deren Vorzeichen in Additions- und Subtraktionsgleichungen:

$$(+)\underline{5} \ +\underline{6} \ -\underline{3} \neq (+)\underline{5} \ +\underline{3} \ -\underline{6}$$

Richtig wäre z. B.

$$(+)\underline{5} \ +\underline{6} \ -\underline{3} = (+)\underline{6} \ +\underline{5} \ -\underline{3}$$

$$(+)\underline{5} \ +\underline{6} \ -\underline{3} = (+)\underline{6} \ -\underline{3} \ +\underline{5}$$

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Um Veränderungen bei Zahlen und Mengen in Gleichungen überführen zu können, muss bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der kardinale Zahlbegriff vorhanden sein. Das heißt, es sollte bekannt sein, dass Zahlen die Anzahl einer Menge angeben können.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DWV-Rahmen-curriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn
 > Stufe 1 – Bedeutung der Symbolisierung, S. 25 f.
 > Stufe 1 – Was ist Addieren? Was ist Subtrahieren? Wie hängen sie zusammen?, S. 26 ff.
www.grundbildung.de/unterricht

V Welche Materialien werden benötigt?

Für die folgenden vier Unterrichtssequenzen werden für je zwei Kursteilnehmer/-innen zehn Gegenstände (beispielsweise Stifte, Kreide, Büroklammern, Besteck, Geschirr, Flaschen, Schirme o. Ä.) benötigt.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Schlagwörter: Addition • Das Ganze • Die Teile • Gleichungen • Kursgespräch • Mengen • Zahlen bis 30

3.1 Addition

Exploration

Mit dem folgenden Gespräch und der sich anschließenden Partnerübung soll bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern das Operationsverständnis der Addition gefördert werden. Es soll erarbeitet werden, dass bei der Addition entweder eine Menge zu einer anderen Menge hinzukommt oder dass zwei Mengen zusammengeschoben (bzw. zusammengedacht) werden können. Aus mindestens zwei Teilmengen wird eine Gesamtmenge gebildet. Dieses mengenhafte und dynamische Operationsverständnis ist Grundlage dafür, dass die Teilnehmer/-innen Gleichungen verstehen können. Wenn sie wissen, was Gleichungen und die dazugehörigen Operationszeichen eigentlich beschreiben, können sie Rechenaufgaben verständlich lösen. Das Kursgespräch Mengenhandlung Addition soll einerseits eine Anleitung für die nachfolgenden Aufgaben (s. Abschnitt 3.1.2) darstellen, andererseits aber auch erste Erkenntnisse bezüglich der Operationslogik hervorbringen.

Zu den wesentlichen Erkenntnissen gehört, dass das Pluszeichen immer bedeutet, dass entweder zur davorstehenden Menge eine andere Menge hinzukommt und dass diese Mengen zu einer Gesamtmenge vereint werden oder dass zwei Mengen zu einer Gesamtmenge vereint werden.

Während der sich anschließenden Partnerübung haben die Teilnehmer/-innen dann die Möglichkeit, dieses theoretische Wissen aus dem Kursgespräch zu erproben und eventuell aufkommende Fragen zu klären. Bei den Aufgaben werden die Teilnehmer/-innen Gelegenheit erhalten, selbstständig Mengenhandlungen in Gleichungen zu übersetzen und umgekehrt.

3.1.1 Kursgespräch Mengenhandlung Addition

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer/-innen dazu auf, genau zu beobachten, was er/sie gleich mache. Anschließend sollen die Kursteilnehmer/-innen die Handlung beschreiben. Jetzt vollzieht die Kursleitung eine additive Mengenhandlung. Es könnten beispielsweise zu drei Stiften, die sich bereits auf dem Tisch befinden, noch zwei Stifte hinzugelegt werden.¹ Eine Variation der Mengenhandlung ist: Die Kursleitung bittet einige Teilnehmer/-innen, sich zu anderen Teilnehmerinnen und Teilnehmern dazuzusetzen.

Es ist gut, eine Situation zu wählen, bei der sich die Summanden unterscheiden. So können die verschiedenen Funktionen des ersten und zweiten Summanden später leichter herausgearbeitet werden. Der Fokus dieser Aufgabe liegt auf der Handlung und nicht auf der Ergebnisfindung. Viele Teilnehmer/-innen werden es gewohnt sein, nur das Ergebnis zu benennen. Um in jeder Situation verständlich rechnen zu können, kommt es aber darauf an, benennen zu können, welche Ausgangsmengen vorliegen, welche Handlung mit diesen Mengen vollzogen und welche Frage gestellt wird.

Nachdem die Kursleitung eine Mengenhandlung vor den Teilnehmerinnen und Teilnehmern vollzogen hat, werden die Teilnehmer/-innen dazu aufgefordert zu beschreiben, was die Kursleitung gerade getan hat. Sollte eine Teilnehmerin oder ein Teilnehmer bereits vorgehen und äußern, dass es sich hier um *Plus* bzw. *Addition* handelt oder bereits äußern, um welche Gleichung es sich genau handelt, sollte die Kursleitung diese Idee aufgreifen und die anderen Teilnehmer/-innen fragen, woran die andere Teilnehmerin oder der andere Teilnehmer das erkannt haben könnte.

¹ Die Kursleitung achtet darauf, dass sie wirklich die gemeinte Mengenhandlung vorspielt: Wenn zwei Stifte nacheinander zu drei Stiften gelegt werden, dann wird die Aufgabe $3 + 1 + 1$ dargestellt, nicht aber die Aufgabe $3 + 2$, welche mit einer Zweiermenge – nicht mit zwei Einermengen – arbeitet. Genau an solchen unscharfen Stellen entfalten sich die Irritationen der Teilnehmer/-innen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Kurzanleitung

1. Mengenhandlung vorspielen
2. Teilnehmer/-innen beschreiben lassen, was die Kursleitung gerade getan hat. Folgende Fragen sollen den Erkenntnisprozess fördern:

Was habe ich als Erstes/Zweites/danach getan?
Hat das etwas mit Mathematik zu tun? Was hat das mit Mathematik zu tun?
Was war an dieser Handlung Mathematik/mathematisch?
Welche Menge ist zuerst da gewesen?
Welche Menge ist hinzugekommen?
Wie viele waren es dann?
Wie viele sind es zum Schluss gewesen?

3. Nun wird die Mengenhandlung in eine Gleichung überführt. Dabei helfen folgende Fragen:

Wie kann man das, was Sie eben beschrieben haben, kurz aufschreiben?
Gibt es eine Möglichkeit, diesen Vorgang noch kürzer aufzuschreiben?
Kennen Sie Zeichen und Symbole, die das Gleiche bedeuten/aussagen?

Am Ende der Aufgabe sollte eine Gleichung stehen, die genau das beschreibt, was die Kursleitung zu Beginn der Stunde vorgespielt hat.

Abbildung 3.1-1: Kurzanleitung für das Kursgespräch zur Addition

Bestehen noch sehr große Unsicherheiten im Kurs, kann die Kursleitung oder aber auch ein/-e Kursteilnehmer/-in weitere Mengenhandlungen vorspielen. Dabei sollten immer wieder verschiedene Gegenstände genutzt werden, weil so deutlich wird, dass Zahlen verschiedenste Mengen repräsentieren können. Das Thema Oberbegriffe kann an diesem Punkt auch wieder auftauchen. Wenn sich die Kursleitung beispielsweise zu zwei Taschen setzt. Dann sind es zusammen drei ...?

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

Gleichungen können in Mengenhandlungen übersetzt werden (und umgekehrt).

- Für eine Addition braucht es mindestens zwei Teilmengen.
- Entweder gibt der erste Summand die Menge an, zu der eine zweite Menge (2. Summand) hinzukommt oder beide Summanden geben die Mengen an, die zusammengefügt oder auch nur zusammengedacht werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

3.1.2 Partnerübung Mengenhandlung Addition

Exploration

Die folgenden Aufgaben dienen dazu, alle Teilnehmer/-innen Sicherheit darin gewinnen zu lassen, Mengenhandlungen in Gleichungen zu überführen und umgekehrt. Dazu erhalten die Teilnehmer/-innen kopierte Karten mit verschiedenen Additionsgleichungen. Diese werden die Teilnehmer/-innen in eine Mengenhandlung übersetzen und sich gegenseitig vorspielen. Durch das Erkennen von Zusammenhängen zwischen Gleichung und Mengenhandlung sollen Gleichungen für die Teilnehmer/-innen keine unlösbaren und unverständlichen Ansammlungen von Zeichen und Ziffern mehr sein. Mengenhandlungen sollen in einer abstrakten Form – der Gleichung – notiert werden. Dabei soll sich der Mehrwert durch die Nutzung von Gleichungen bzw. Rechenaufgaben für die Teilnehmer/-innen erschließen.

Die Kursleitung hat während der Durchführung die Möglichkeit, herauszufinden, ob wirklich alle Teilnehmer/-innen das theoretische Wissen aus dem Kursgespräch aufgenommen haben und sicher im Überführen von Mengenhandlungen in Gleichungen und umgekehrt sind.

Durchführung und didaktische Hinweise

Vier wichtige Aspekte sollen im Rahmen der auf der nachfolgenden Seite genau beschriebenen Aufgaben herausgearbeitet werden:

- Diejenigen Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die eine Aufgabe vorspielen, erhalten dazu eine Gleichung. Sie müssen, um eine Handlung vorspielen zu können, eine vorgegebene Gleichung in eine Mengenhandlung überführen.
Gleichung $\rightarrow$ Mengenhandlung
Der/Die Partner/-in erbringt die entgegengesetzte Denkleistung und übersetzt die Mengenhandlung in eine Gleichung.
Mengenhandlung $\rightarrow$ Gleichung
Dieser doppelte Blick auf Mengenhandlungen und Gleichungen vertieft das Verständnis für die Operationslogik weiter.
- Zwei der vorgegebenen Gleichungen enthalten eine Null. Bei diesen Aufgaben wird erstmals die Rolle der Null in Gleichungen thematisiert. Die Kursleitung beobachtet, wie die Teilnehmer/-innen Mengenhandlungen vorspielen, bei denen entweder zu einer Menge nichts hinzukommt oder zu einer leeren Menge eine andere Menge hinzugefügt wird.
- Einige Gleichungen enthalten einen Tausch der Summanden. Bei der Beschäftigung mit der Dynamik einer Rechenoperation ist es wesentlich, welche Menge zuerst da gewesen ist (1. Summand) und welche Menge zu dieser Anfangsmenge hinzukommt (2. Summand). Wird die Mengenhandlung in der Art, dass zwei Mengen gleichwertig zusammengeführt werden, vorgespielt, unterscheidet sich die Rolle des ersten Summanden nicht von der Rolle des zweiten Summanden. In beiden Fällen wird deutlich, dass die Summe bei identischen Summanden gleich bleibt.
- Abwechslung kann durch einen Tausch der Partner nach jeder Gleichung oder dadurch erreicht werden, dass andere Materialien zum Vorspielen der Mengenhandlung verwendet werden. Es ist wichtig, dass die Teilnehmer/-innen viele Mengenhandlungen vorspielen und in Gleichungen übersetzen. Die Erfahrung hat gezeigt, dass nach dem korrekten Vorspielen von zwei oder drei Gleichungen plötzlich auch noch grundlegende Fehlannahmen bei einer Teilnehmerin oder einem Teilnehmer zutage treten können. Alle Gleichungen auf der Kopiervorlage enthalten unterschiedliche Aspekte, die erst nacheinander in verschiedenen Gleichungen thematisiert werden können und sollten.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Die Kursleitung fertigt für jede Gruppe à zwei Teilnehmer/-innen eine Kopie der  **Kopiervorlage 1** an und schneidet die abgebildeten Karten aus.

KOPIERVORLAGE 1

Die Karten sollten zu Beginn verdeckt vor den Teilnehmerinnen und Teilnehmern abgelegt werden. Nun nimmt eine Teilnehmerin oder ein Teilnehmer verdeckt einen Gleichungszettel, ohne dass der/die Partner/-in diesen lesen kann. Der/Die Teilnehmer/-in mit Zettel überlegt sich eine passende Mengenhandlung und spielt diese dem/der Partner/-in vor. Ziel ist es, dass der/die Partner/-in herausfindet, welche Gleichung zur vorgespielten Mengenhandlung passt. Die Kursleitung kann die Teilnehmer/-innen dazu anhalten, nach jeder Gleichung andere Materialien zu verwenden. Mögliche Materialien für die Handlung wären: Stifte, Flaschen, Büroklammern, Taschentücher, Steckwürfel, Besteck, Mobiltelefone, Kreide oder Tafelstifte. Vielleicht verlost die Kursleitung auch einen Schokoriegel für die schönste, lustigste oder kreativste Mengenhandlung. Die Nutzung diverser Materialien wird interessante Fragen bezüglich der Oberbegriffsbildung aufwerfen. Die Teilnehmer/-innen werden überlegen, ob sie zum Vorspielen einer Gleichung auch unterschiedliche Dinge zusammenrechnen können, z. B. ein Telefon und einen Bleistift.

Als Zwischenschritt sollten die Teilnehmer/-innen, die sich die Handlung angeschaut haben, immer zuerst die soeben vorgespielte Handlung beschreiben. Dadurch erhöht sich die Konzentration und die Teilnehmer/-innen können länger und intensiver über den Inhalt der vorgespielten Mengenhandlung nachdenken. Es sollte erzählt werden, welche Mengen eine Rolle spielten, was mit diesen Mengen passierte und welche Situation nach der Mengenhandlung vorliegt. Erst dann sollte gesagt werden, um welche Gleichung es sich handelt.

Beispiel für die Beschreibung einer Mengenhandlung:

Erst lagen 2 Büroklammern auf dem Tisch. Dann haben Sie vier und noch einmal drei Büroklammern dazugelegt. Jetzt liegen hier insgesamt neun Büroklammern.

Die Gleichung heißt $2 + 4 + 3 = 9$.

Die Kursleitung beobachtet, ob bei manchen Teilnehmerinnen und Teilnehmern interessante Fehlvorstellungen bezüglich der Operationslogik der Addition vorhanden sind. Diese können aufgegriffen und anschließend im Plenum diskutiert werden.

Eine Besonderheit kommt häufig bei Menschen, die alle Aufgaben auszählen müssen, vor: Dies kann dadurch offenbar werden, dass der/die Teilnehmer/-in alle Mengenhandlungen ausschließlich in Einerschritten vollzieht.

Ein Beispiel: Es soll die Gleichung $2 + 4 + 3 = 9$ in eine Mengenhandlung übersetzt werden. Anstatt aber zu den zwei Büroklammern erst vier und dann noch einmal drei Büroklammern zu legen, werden alle Klammern einzeln zur Zweiermenge gelegt. Dies hat zur Folge, dass der/die Partner/-in nicht weiß, welche Aufgabe vorgespielt wurde. Sollte ein/-e Teilnehmer/-in nur in Einerschritten handeln, greifen sie dies auf. Die Kursleitung könnte fragen:

Welche Gleichung passt zu dieser Handlung?

Die Gleichung, die zu einer solchen Handlung passt, lautet

$$2 + (1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 9.$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

KOPIERVORLAGE 1

Nach der Beschreibung der Handlung kann der/die vorspielende Teilnehmer/-in entweder zustimmen oder **die Mengenhandlung erneut vorspielen**. Wenn die Gleichung nicht korrekt erfasst wird, sollte noch nicht aufgelöst werden, um welche Gleichung es sich handelt. Oft fällt den Teilnehmerinnen und Teilnehmern an diesem Punkt bereits selbst der Fehler auf und sie korrigieren ihn. Deshalb gibt die Kursleitung allen die Chance, die Handlung – wenn nötig – auch mehrfach vorzuspielen bzw. sich vorspielen zu lassen. In den allermeisten Fällen kommen die Teilnehmer/-innen schließlich zur richtigen Lösung, ohne dass Erklärungen von außen nötig sind.

Sobald die erste Gleichung richtig benannt wurde, tauschen die Partner/-innen ihre Rollen. Nun muss der/die Teilnehmer/-in die Gleichung finden, der/die soeben die Handlung vorgespielt hat (und umgekehrt). Es wird eine neue Gleichungskarte gezogen und diese Gleichung mit einer Mengenhandlung dargestellt.

Eine Variation der Aufgabe wäre es, die Gleichungen mithilfe von Rechengeschichten zu beschreiben. Die anderen sind anschließend aufgefordert, die entsprechende Gleichung zu benennen.

Beispiele für Rechengeschichten zur Aufgabe $2 + 4 + 3 = 9$:

- Auf einer Regenrinne sitzen zwei Spatzen. Nach ein paar Minuten setzen sich noch vier Spatzen dazu. Kurz darauf kommt eine Dreiergruppe Spatzen und setzt sich auch noch auf die Regenrinne.
- Anna arbeitet viel. Erst arbeitet sie zwei Stunden an einem wichtigen Brief. Dann holt sie sich einen Kaffee und setzt sich wieder an ihren Arbeitsplatz. Dort bleibt sie auch für weitere vier Stunden sitzen. Nach einer Mittagspause arbeitet sie noch einmal drei Stunden, bevor sie nach Hause geht.
- René sucht Zahnstocher. Er findet im Schubfach zwei, im Hängeschränk vier und drei weitere Zahnstocher im Regal bei den Tassen.

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Additionsgleichungen können in Mengenhandlungen und Mengenhandlungen in Additionsgleichungen überführt werden.
- Zudem sollte deutlich geworden sein, dass die Addition Veränderungen von Mengen und Zahlen beschreiben kann. Die Aufgaben, bei denen nur die Summanden vertauscht wurden, die Gesamtmenge aber gleich blieb, sind dazu geeignet, den Teilnehmerinnen und Teilnehmern den Unterschied zwischen erstem und zweitem Summanden zu verdeutlichen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 1 – Addition



$$4 + 3 = 7$$

$$3 + 4 = 7$$

$$3 + 0 = 3$$

$$0 + 3 = 3$$

$$2 + 4 + 3 = 9$$

$$4 + 3 + 2 = 9$$

$$1 + 1 + 2 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Schlagwörter: Das Ganze • Die Teile • Gleichungen • Kursgespräch • Mengen • Partnerübung • Subtraktion • Zahlen bis 30

3.2 Subtraktion

Exploration

Auch in der sich anschließenden Unterrichtssequenz Gespräch Mengenhandlung Subtraktion werden die Teilnehmer/-innen Gleichungen in Mengenhandlungen und umgekehrt übersetzen. Allerdings weist die Subtraktion gegenüber der Addition noch einige Besonderheiten auf. Addition und Subtraktion beschreiben unterschiedliche Mengenhandlungen. Daraus ergeben sich folgende Besonderheiten der Subtraktion im Vergleich zur Addition:

- Minuend und Subtrahend können nicht vertauscht werden.
- Bei der Subtraktion ist zu Beginn eine Menge vorhanden. Aus dieser Anfangsmenge wird ein Teil entnommen. Eine Teilmenge kann auch weggedacht werden, ohne dass sie tatsächlich der Gesamtmenge entnommen wird. Ein Beispiel wäre, wenn 10 € auf dem Tisch liegen und überlegt wird, wie viel Geld noch übrig ist, wenn gleich 3 € für den Kaffee bezahlt werden.
- Nach Abschluss der Mengenhandlung bleibt der andere Teil der Ausgangsmenge übrig.
- Es wird die Menge gesucht, die nach Entnahme der Teilmenge übrig bleibt.

Die Subtraktion zu verstehen fällt vielen Lernenden schwerer als die Addition. Ein häufiger Fehler ist, dass bei der Übersetzung einer subtraktiven Mengenhandlung in eine Gleichung die anfänglich da gewesene Menge keine Beachtung in der Gleichung findet. Dies kann sich durch diverse Fehler zeigen. Diese Fehlinterpretationen werden in dem sich an diese Exploration anschließenden Exkurs näher erläutert.

Mit dem Kursgespräch zur Subtraktion soll das dynamische Verständnis der Rechenoperation gefördert werden. Darüber hinaus dient es dazu zu erfahren, dass bei der Subtraktion im Gegensatz zur Addition aus einer Menge eine Teilmenge entnommen wird und demzufolge die andere Teilmenge übrig bleiben muss. Die Betrachtung des dynamischen Aspektes der Subtraktion vereinfacht das Lösen von Gleichungen. Nur wenn die Teilnehmer/-innen wissen, was eine Subtraktionsgleichung beschreiben kann, ist die Lösung nachvollziehbar und kann von ihnen erläutert werden.

Im Gespräch sollen die grundlegenden Erkenntnisse zur Subtraktion gewonnen werden. Diese sind:

- Der Minuend (die Zahl links vom Minuszeichen) gibt die Anfangsmenge an.
- Der Subtrahend (die Zahl rechts vom Minuszeichen) gibt an, wie viel von der Anfangsmenge – dem Minuend – weggenommen beziehungsweise weggedacht wird.
- Die Subtraktion fragt danach, wie viel nach der Entnahme einer Teilmenge übrig bleibt – fragt also nach der Differenz.
- Minuend und Subtrahend können nicht vertauscht werden, ohne dass sich die Menge, die übrig bleibt, ändert.

Bei der sich an das Kursgespräch anschließenden Partnerübung haben die Teilnehmer/-innen schließlich die Möglichkeit, das theoretische Wissen über die Subtraktion zu erproben, zu überprüfen und eventuell aufkommende Fragen zu stellen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Exkurs: Ein häufig auftretender Fehler bei der Übersetzung einer Mengenhandlung in eine Subtraktionsaufgabe

Aus einer Achtermenge wird eine Fünfermenge entnommen, drei bleiben übrig. Die korrekte Gleichung lautet $8 - 5 = 3$.

Der/Die Teilnehmer/-in beobachtet diese Mengenhandlung und kommt zum Schluss, hier wurde die Gleichung $5 - 3 = ?$ vorgespielt.

Der Gedanke, dass bei $5 - 3 = ?$ zwei übrig bleiben müssten und dass diese Gleichungen deshalb nicht stimmen können, ist nicht selbstverständlich. Manchmal ist nicht klar, dass man *das Ergebnis* dann auch sehen können müsste.

Sehr oft gerät die Anfangsmenge, in diesem Falle die Acht, aus dem Blick. Es wird ausschließlich die Situation nach der Entnahme der Menge betrachtet. Im Laufe des Kursgespräches und spätestens während der Partnerübung sollte den Teilnehmerinnen und Teilnehmern deutlich werden, dass nicht eine Situation, sondern die Handlung (dynamischer Aspekt der Subtraktion), die zu dieser Situation geführt hat, in eine Gleichung übersetzt wird. Es ist hilfreich, bei Mengenhandlungen sowohl die entnommene Menge als auch die Restmenge liegen zu lassen, denn dann ist auch die Ausgangsmenge (und somit alle drei Gleichungsglieder) noch sichtbar.

3.2.1 Kursgespräch Mengenhandlung Subtraktion

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer/-innen dazu auf zu beobachten, was er/sie macht. Anschließend sollen die Kursteilnehmer/-innen die durchgeführte Handlung beschreiben.

Die Kursleitung vollzieht eine Mengenhandlung, die zu einer Subtraktionsgleichung passt. Beispielsweise könnten von acht Stiften, die sich bereits auf dem Tisch befinden, drei weggenommen ($8 - 3 = 5$) werden. Teilnehmer/-innen könnten gebeten werden sich umzusetzen oder es könnten Gegenstände im Raum bewegt werden. Günstig bei der Wahl der Gleichung ist, dass sich Minuend, Subtrahend und Differenz unterscheiden. Das macht das anschließende Gespräch leichter, weil nicht extra benannt werden muss, beispielsweise bei $10 - 5 = 5$, welche der Fünfen denn gerade gemeint ist. Der Fokus liegt auf der Handlung und auf der Frage, die an die Endsituation der Handlung gestellt wird (Wie viele Mengenelemente liegen nach der Entfernung der Teilmenge vor?), nicht auf der bloßen Ergebnisfindung. Wichtig ist das Sprechen über die Mengenhandlung, über Glieder und Symbole einer Subtraktionsgleichung. Die Teilnehmer/-innen sollten von der Kursleitung zum Reflektieren, Beschreiben und Übersetzen der Handlung aufgefordert werden.

Nachdem die Kursleitung eine weitere subtraktive Mengenhandlung vollzogen hat, werden die Teilnehmer/-innen erneut gebeten, die vorgeführte Handlung zu beschreiben.

Sollte ein/e Teilnehmer/-in bereits vorwegnehmen, dass es sich hier um Minus, die Subtraktion oder sogar um welche Gleichung es sich genau handelt, sollte die Kursleitung, wie auch schon bei der Addition, diese Idee aufgreifen und die anderen Teilnehmer/-innen fragen, woran der/die andere Teilnehmer/-in das erkannt haben könnte.

Woran hat Herr/Frau ... erkannt, dass es eine Minusaufgabe sein muss?

Trotz der Vorwegnahme können die unter Punkt 2 in der nachfolgenden Kurzanleitung genannten Fragen mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern besprochen werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Auch bei der Subtraktion gilt: Wenn die Bedeutung des Gleichheitszeichens zu erläutern ist, ist es wichtig zu formulieren, dass es kein *Ergebniszeichen* ist, sondern genau das bezeichnet, wofür es wortwörtlich steht: *ist gleich*. Auf einer Seite des Gleichheitszeichens **ist** mathematisch **gleich** viel wie auf der anderen Seite. Der auf der linken Seite versammelte Zahlenwert **ist gleich** dem auf der rechten Seite versammelten Zahlenwert. Es wird die Menge gesucht, die gleich viel ist wie die aus der Handlung entstandene Menge.

Versprachlichung einer subtraktiven Mengenhandlung

$$8 - 3 = ?$$

„Wenn aus einer Achtermenge eine Dreiermenge entnommen wird,“ „sind es gleich viel wie ...“ „fünf.“

Für die Kommunikation über Subtraktionsgleichungen benötigen die Kursteilnehmer/-innen die Bezeichnungen für die Teile dieser Gleichung. Sind diese Begrifflichkeiten bekannt, kann sich in den nachfolgenden Unterrichtssequenzen präziser über Subtraktionsgleichungen ausgetauscht werden.

Folgendes Tafelbild veranschaulicht den Teilnehmerinnen und Teilnehmern die Bezeichnungen der Gleichungsglieder. Für die sich direkt anschließenden Unterrichtssequenzen sollte das Tafelbild gut sichtbar im Raum platziert werden, sodass immer wieder nach den Begriffen geschaut werden kann.

Begrifflichkeiten einer Subtraktionsgleichung

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & - & 3 & = & 2 \\ \text{Minuend} & - & \text{Subtrahend} & = & \text{Differenz} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & = & 5 & - & 3 \\ \text{Differenz} & = & \text{Minuend} & - & \text{Subtrahend} \end{array}$$

Sollte das Wissen um die Mengenhandlung, die der Subtraktion zugrunde liegt, oder über die unterschiedliche Bedeutung und Funktion von Minuend, Subtrahend und Differenz noch nicht abgesichert und von jedem Teilnehmer und jeder Teilnehmerin verstanden sein, kann die Kursleitung oder aber auch ein/-e Kursteilnehmer/-in weitere subtraktive Mengenhandlungen vorspielen. Auch hier bietet sich die Nutzung verschiedener Gegenstände an, um einerseits den Unterricht abwechslungsreich zu gestalten und andererseits Diskussionen bezüglich der Oberbegriffsbildung zu befördern.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Kurzanleitung

1. Mengenhandlung vorspielen
2. Teilnehmer/-innen die Mengenhandlung beschreiben lassen. Folgende Fragen sollen den Erkenntnisprozess fördern:

Was habe ich als Erstes/Zweites/danach getan?
Welche Menge ist zuerst da gewesen?
Was ist dann passiert?
Wie groß war die Menge, die weggenommen wurde?
Warum ist das nicht „Plus“?
Wie viele waren dann noch übrig?
Wie viele sind es zum Schluss gewesen?

3. Zur Übertragung der Mengenhandlung in eine Gleichung helfen folgende Fragen:

Wie können Sie das, was Sie eben beschrieben haben, notieren?
Gibt es eine Möglichkeit, diesen Vorgang noch kürzer und allgemein verständlich aufzuschreiben?
Kennen Sie Zeichen und Symbole, die das Gleiche bedeuten/aussagen?

Am Ende der kurzen Aufgabe sollte eine Gleichung stehen, die der vorgespielten Mengenhandlung entspricht.

Abbildung 3.2-1: Kurzanleitung für das Kursgespräch zur Subtraktion

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Zahlen in einer Gleichung beschreiben die Mengen, mit denen gehandelt wird,
- das Minuszeichen bedeutet, dass eine (Teil-)Menge entnommen wird,
- der Minuend steht für die am Anfang vorhandene Menge,
- der Subtrahend repräsentiert die Menge, die entnommen wird, und
- die Differenz ist jene Teilmenge, die auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens notiert ist.

3.2.2 Partnerübung Mengenhandlung Subtraktion

Exploration

Mit den folgenden Aufgaben sollen alle Teilnehmer/-innen Sicherheit darin gewinnen, selbst subtraktive Mengenhandlungen in Gleichungen und umgekehrt Subtraktionsgleichungen in Mengenhandlungen zu überführen.

Diese Aufgaben dienen der Überprüfung, ob alle Teilnehmer/-innen das theoretische Wissen aus dem Kursgespräch, eine subtraktive Mengenhandlung in eine Gleichung zu *übersetzen*, anwenden können.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Durchführung und didaktische Hinweise

Bevor auf der nachfolgenden Seite das Vorgehen bei diesen Aufgaben beschrieben wird, sei noch einmal an die drei Aspekte, die bereits in der Unterrichtssequenz zur *Partnerübung Mengenhandlung Addition* (s. Abschnitt 3.1.2) erwähnt wurden, erinnert.

Bei diesen Aufgaben ist das Übersetzen der Handlung in eine Gleichung nicht die einzige Denkleistung. Jene Teilnehmer/-innen, die eine Aufgabe vorspielen sollen, erhalten dazu eine vorgegebene Gleichung. Sie müssen, um die Handlung vorspielen zu können, die genau umgekehrte Denkleistung erbringen, um die vorgegebene Gleichung in eine Mengenhandlung überführen zu können. Das Verständnis für die Operationslogik der Subtraktion wird vertieft bzw. erweitert.

Die Bedeutung der Null wird auch hier Gegenstand der Betrachtungen sein. Die Fantasie der Teilnehmer/-innen ist gefordert, um vorzuspielen, dass nichts weggenommen wird. Spannend ist auch, ob der/die Partner/-in erkennt, dass nichts weggenommen wurde. Ein Gespräch darüber, wie viel höchstens weggenommen werden kann, ist eine zusätzliche Förderung des Operationsverständnisses.

Bei zwei Gleichungen auf der Kopiervorlage ist der Minuend kleiner als der Subtrahend. Diese Gleichungen lassen sich nicht vorspielen. Oft bleibt der Versuch, eine solche Handlung vorzuspielen, lange in Erinnerung, sodass das Problem des kleineren Minuenden bei Subtraktionsaufgaben immer wieder schnell erkannt wird. Die Erkenntnis, dass sich eine Subtraktionsaufgabe mit größerem Subtrahenden nicht vorspielen lässt, ist wesentlich und lädt dabei gleich zum Gespräch über negative Zahlen und mögliche Situationen mit negativen Differenzen ein. Schulden zu machen wäre ein klassisches Beispiel dafür. Ich habe nur fünf Euro im Portemonnaie, der Kellner möchte aber acht Euro haben.

Da die Subtraktion häufig mit besonders vielen Fehlschlüssen behaftet ist, sollten möglichst alle Gleichungen aus der Kopiervorlage in Mengenhandlungen übersetzt und vorgespielt werden. Die Kursleitung sollte unbedingt Abwechslung ins Spiel bringen: Es können andere Teams gebildet werden und immer andere Gegenstände zum Vorspielen genutzt werden. Es ist nicht unüblich, dass nach dem korrekten Vorspielen von zwei oder drei Gleichungen plötzlich grundlegende Fehlannahmen zutage treten. Alle Gleichungen auf der Kopiervorlage enthalten immer unterschiedliche Aspekte der Operationslogik, die erst nacheinander in verschiedenen Gleichungen thematisiert werden können und sollten. Eine mögliche Erweiterung wäre auch, das Zeichnen von Mengenhandlungen zuzulassen. Auch anhand von Zeichnungen können Missverständnisse und Unklarheiten analysiert werden.

Jeweils zwei Teilnehmer/-innen arbeiten in einer Gruppe. Die Kursleitung fertigt für jede Gruppe eine Kopie der

 **Kopiervorlage 2** an und schneidet die einzelnen Karten aus.

KOPIERVORLAGE 2

Die Karten liegen verdeckt vor den Teilnehmerinnen und Teilnehmern. Jede/-r Teilnehmer/-in nimmt eine Karte, ohne dass die Partnerin oder der Partner diese lesen kann, und überlegt sich eine passende Mengenhandlung. Anschließend wird diese dem/der Partner/-in vorgespielt. Ziel ist es, dass der/die Partner/-in herausfindet, welche Gleichung zur vorgespielten Mengenhandlung passt. Die Kursleitung kann die Teilnehmer/-innen dazu anhalten, möglichst viele verschiedene Gegenstände zum Vorspielen zu verwenden. Mögliche Materialien für die Handlung wären: Stifte, Flaschen, Büroklammern, Taschentücher, Steckwürfel, Besteck, Mobiltelefone, Kreide oder Tafelstifte. Vielleicht belohnt die Kursleitung die kreativste Übersetzung einer Gleichung in eine Mengenhandlung.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

KOPIERVORLAGE 2

Die Teilnehmer/-innen werden aufgefordert zu beschreiben, was soeben vorgespielt wurde, bevor sie sagen, um welche Gleichung es sich vermutlich handelt. Dieses Beschreiben der Handlung erhöht die Konzentration und die Zeitspanne zum Nachdenken über Handlung und Gleichung. Häufig fallen den Teilnehmerinnen und Teilnehmern während des Beschreibens Fehler in ihrer zuerst vermuteten Gleichung auf. Es ist ausreichend, wenn die Teilnehmer/-innen reflektieren, was mit den Mengen passiert und was sich geändert hat. Im zweiten Schritt wird ermittelt, um welche Gleichung es sich handelt.

Beispiel zur Beschreibung einer Mengenhandlung:

*Erst lagen neun Büroklammern auf dem Tisch. Dann haben Sie drei und danach noch einmal zwei Büroklammern weggenommen. Jetzt sind nur noch vier Büroklammern übrig.
Die Gleichung heißt $9 - 3 - 2 = 4$.*

Nach der Beschreibung der Handlung kann der/die vorspielende Teilnehmer/-in entweder zustimmen oder die Mengenhandlung erneut vorspielen lassen. Wenn die Gleichung nicht korrekt ermittelt wurde, sollte noch nicht sofort aufgelöst werden, um welche Gleichung es sich handelt. Oft werden Fehler an dieser Stelle selbst entdeckt und korrigiert. Allen Lernenden sollte unbedingt die Chance gegeben werden, die Handlung – wenn nötig – auch mehrfach vorzuspielen bzw. anzuschauen. In den allermeisten Fällen sind keine Erklärungen durch die Kursleitung nötig.

Sobald die erste Gleichung richtig benannt wurde, tauschen die Partner ihre Rollen. Nun muss jene/-r Teilnehmer/-in die Gleichung finden, der/die soeben die Handlung vorgespielt hat (und umgekehrt).

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Nach der Absolvierung des Kursgespräches und der Partnerübung Mengenhandlung Subtraktion sollten alle Teilnehmer/-innen sicher Subtraktionsgleichungen in Mengenhandlungen und Mengenhandlungen in Subtraktionsgleichungen überführen können.
- Es sollte ihnen zudem deutlich geworden sein, dass Rechenoperationen Veränderungen von Mengen und Zahlen beschreiben können.
- Die Aufgaben, bei denen der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, haben den Teilnehmerinnen und Teilnehmern verdeutlicht, dass es unlösbare Aufgaben bzw. Aufgaben mit negativen Differenzen geben kann.
- Auch die Erkenntnis um den Unterschied zwischen Addition und Subtraktion ist durch beide Gespräche und Aufgaben abgesichert.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 2 – Subtraktion



$4 - 3 = 1$	$3 - 4 = \underline{\quad}$
$5 - 0 = 5$	$5 - 5 = 0$
$9 - 2 - 3 = 4$	$9 - 3 - 2 = 4$
$4 - 1 - 1 - 1 - 1 = 0$	$1 - 5 = \underline{\quad}$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4.1a Vergleichszeichen

Vergleichen Sie die linke und die rechte Seite und setzen Sie das richtige Vergleichszeichen ein.

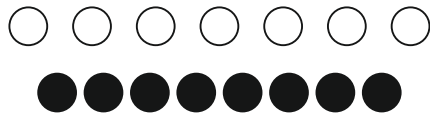
< kleiner als > größer als = gleich viel

Zahlen		
14	<	41
3		5
65		64
9		8
9		9
100		1000
32		23
mathematische Ausdrücke		
$3 + 2$		5
$3 + 2$		$2 + 3$
$3 + 2$		$10 - 5$
$1 + 7$		7
5		$4 + 2$
$2 + 2 + 2$		$7 - 1$
Mengen		
●		○
○ ○ ○		● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ●		○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ● ● ●		● ● ● ● ● ● ●
□ □		● ●
□ □ □ □		●

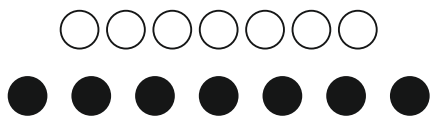
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4.2a Der Unterschied

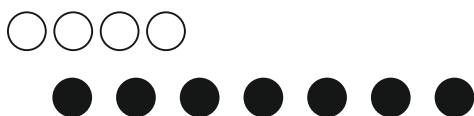
Gruppenarbeit: Bitte formulieren Sie Antworten und überlegen Sie sich gemeinsam Begründungen. Suchen Sie nach mehreren Wegen, die Antwort auf die Frage zu finden. Machen Sie sich bitte Notizen für das anschließende Unterrichtsgespräch.



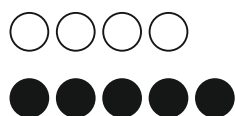
1. Sind es mehr weiße oder mehr schwarze Kreise?



2. Wie viele schwarze Kreise sind es mehr als weiße Kreise?

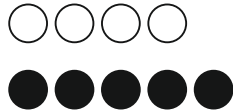


3. Wie viele weiße Kreise sind es weniger als schwarze Kreise?

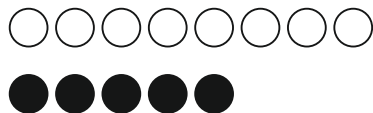


4. Um wie viele sind die schwarzen Kreise mehr als die weißen Kreise?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



5. Um wie viele sind die weißen Kreise weniger als die schwarzen Kreise?



6. Um welche Anzahl unterscheiden sich beide Reihen?



7. Wie groß ist der Unterschied zwischen beiden Reihen?

Notizen:

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4.2b Sind es gleich viele?

Wie viele sind es mehr? Oder weniger? Wie gehen Sie vor?

1.	 
----	--

Eins-zu-Eins-Zuordnung mit den Augen.

Es sind gleich viele.

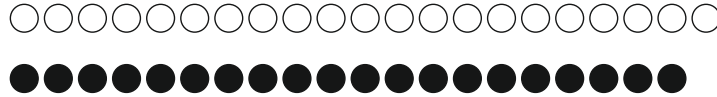
2.	  
----	--

3.	 
----	---

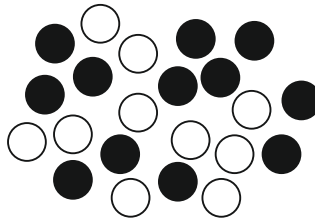
4.	 
----	---

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

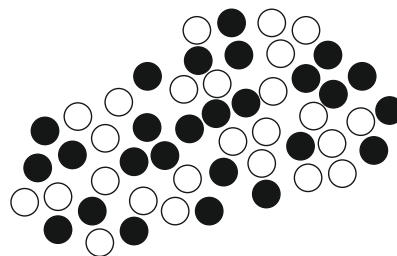
5.



6.



7.



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4.3a ... mehr/weniger als

Beenden Sie die Aussagen.

7 ist **einer mehr** als 6.

3 sind **zwei mehr** als _____.

1 ist **einer weniger** als _____.

9 ist **einer weniger** als _____.

2 sind **zwei weniger** als _____.

5 ist **einer mehr** als _____.

10 ist **einer mehr** als _____.

8 sind **zwei mehr** als _____.

4 ist **einer mehr** als _____.

6 ist **einer weniger** als _____.

7 ist **einer weniger** als _____.

7 sind **zwei weniger** als _____.

1 ist **einer mehr** als _____.

9 sind **zwei mehr** als _____.

2 sind **zwei mehr** als _____.

5 ist **einer weniger** als _____.

10 sind **zwei mehr** als _____.

8 sind **zwei weniger** als _____.

4 sind **zwei mehr** als _____.

6 sind **zwei mehr** als _____.

8 ist **keiner mehr** als _____.

Einer mehr als 3 ist _____.

Zwei weniger als 4 sind _____.

Einer weniger als 7 ist _____.

Einer mehr als 9 ist _____.

Einer weniger als 1 ist _____.

Zwei weniger als 10 sind _____.

Zwei weniger als 9 sind _____.

Keiner mehr als 8 ist _____.

Keiner weniger als 8 ist _____.

Einer weniger als 3 ist _____.

Zwei weniger als 3 sind _____.

Zwei mehr als 5 sind _____.

Zwei mehr als 7 sind _____.

Zwei mehr als 9 sind _____.

Zwei weniger als 11 sind _____.

Zwei weniger als 9 sind _____.

Zwei weniger als 7 sind _____.

Zwei weniger als 5 sind _____.

Zwei mehr als 0 sind _____.

Zwei mehr als 2 sind _____.

Keiner mehr als 10 ist _____.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Füllen Sie die Lücken.

5 sind _____ als 3.

1 ist _____ als 3.

1 ist _____ als 2.

1 ist _____ als 1.

1 ist _____ als 0.

10 sind _____ als 8.

10 ist _____ als 9.

10 ist _____ als 11.

7 sind _____ als 5.

5 sind _____ als 3.

3 sind _____ als 1.

4 ist _____ als 5.

4 ist _____ als 3.

Welche Beziehungen können Sie zwischen folgenden Zahlen formulieren?

3 und 4 _____

7 und 9 _____

10 und 8 _____

2 und 3 _____

2 und 4 _____

2 und 1 _____

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4.4a Wie viele sind es mehr oder weniger?

Setzen Sie das richtige Vergleichszeichen ein.	Verändern Sie die linke Seite so, dass beide Seiten gleich werden.	Verändern Sie die rechte Seite so, dass beide Seiten gleich werden.	Ermitteln Sie den Unterschied.
3 > 1	$3 - 2 = 1$	$3 = 1 + 2$	2
7 9			
6 10			
1 5			
5 8			
9 6			
4 5			
7 1			
2 4			
0 7			
8 3			
10 2			
4 4			

Schreiben Sie auf, was Ihnen zum Begriff **Unterschied** einfällt:

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4.4b Unterschied von Zahlen

Tragen Sie in die mittlere Spalte der Tabelle ein, welche Additions- und Subtraktionsaufgaben die Zahlbeziehungen der jeweiligen Zahlen angeben. Tragen Sie den Unterschied beider Zahlen in die rechte Spalte ein.

		Zahlbeziehungen	Unterschied
1.	Ermitteln Sie die Differenz von 7 und 5.	$7 - 5 = 2$ $5 + 2 = 7$ $7 - 2 = 5$	2
2.	Wie groß ist der Unterschied zwischen 3 und 10?		
3.	Wie viele sind zwei weniger als fünf?		
4.	Um wie viele sind zwei weniger als fünf?		
5.	Um wie viele sind fünf weniger als zwei?		
6.	Vergleichen Sie 9 und 7.		
7.	Wie viel ist eins mehr als acht?		

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

8.	Wie viele sind einer mehr als acht?		
9.	Um wie viele sind acht mehr als einer?		
10.	Um wie viele sind drei weniger als sechs?		
11.	Um wie viel unterscheiden sich 8 und 1?		
12.	Um wie viel ist fünf größer als zwei?		
13.	Um welche Zahl unterscheiden sich vier und neun?		
14.	Wie viel ist fünf kleiner als zehn?		

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4.1a LÖSUNGEN – Vergleichszeichen

Vergleichen Sie die linke und die rechte Seite und setzen Sie das richtige Vergleichszeichen ein.

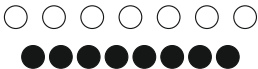
< kleiner als > größer als = gleich viel

Zahlen		
14	<	41
3	<	5
65	>	64
9	>	8
9	=	9
100	<	1000
32	>	23
mathematische Ausdrücke		
$3 + 2$	=	5
$3 + 2$	=	$2 + 3$
$3 + 2$	=	$10 - 5$
$1 + 7$	>	7
5	<	$4 + 2$
$2 + 2 + 2$	=	$7 - 1$
Mengen		
●	=	○
○○○	<	●●●●●
●●●●●●	>	○○○○○
○○●●●	=	●●●●●
□□	=	●●
□□□□	>	●

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

4.2a LÖSUNGEN – Der Unterschied

Gruppenarbeit: Bitte formulieren Sie Antworten und überlegen Sie sich gemeinsam Begründungen. Suchen Sie nach mehreren Wegen, die Antwort auf die Frage zu finden. Machen Sie sich bitte Notizen für das anschließende Unterrichtsgespräch.

	1. Sind es mehr weiße oder mehr schwarze Kreise?
---	--

Es sind mehr schwarze Kreise als weiße.

A: Die Anzahl der Kreise kann jeweils durch Zählen ermittelt werden: 7 weiße/8 schwarze. $8 > 7$: also mehr schwarze.

B: Indem jedem weißen ein schwarzer Kreis (z. B. durch verbinden mit einem Strich) zugeordnet wird, bleibt noch ein schwarzer Kreis übrig, d. h. es sind mehr schwarze.

	2. Wie viele schwarze Kreise sind es mehr als weiße Kreise?
---	---

Es sind nicht mehr schwarze Kreise als weiße. Es sind gleich viele Kreise weiß und schwarz.

A: zählend – 7 weiße/7 schwarze. $7 = 7$, also keiner mehr.

B: zuordnend – Es bleibt kein Kreis übrig, also sind es gleich viele.

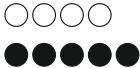
	3. Wie viele weiße Kreise sind es weniger als schwarze Kreise?
---	--

Es sind drei weiße Kreise weniger als schwarze.

A: zählend – 4 weiße/7 schwarze. Vier ist drei weniger als sieben.

B: zuordnend – Es sind drei schwarze mehr, also sind es drei weiße weniger.

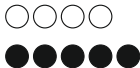
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

	4. Um wie viel sind die schwarzen Kreise mehr als die weißen Kreise?
---	--

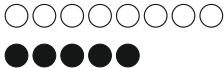
Die schwarzen sind um einen/eins mehr als die weißen Kreise.

A: zählend – 4 weiße/5 schwarze. Fünf sind um einen/eins mehr als vier.

B: zuordnend – es ist ein schwarzer Kreis mehr, also um einen/eins mehr.

	5. Um wie viel sind die weißen Kreise weniger als die schwarzen Kreise?
---	---

Das ist das gleiche Bild wie bei Aufgabe 4. Die weißen Kreise sind um einen/eins weniger als die schwarzen.

	6. Um welche Anzahl unterscheiden sich beide Reihen?
---	--

Die beiden Reihen unterscheiden sich um drei.

	7. Wie groß ist der Unterschied zwischen beiden Reihen?
---	---

Der Unterschied zwischen den beiden Reihen beträgt vier.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4.2b LÖSUNGEN – Sind es gleich viele?

Wie viele sind es mehr? Oder weniger? Wie gehen Sie vor?

1. 

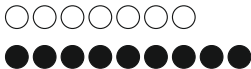
Eins-zu-Eins-Zuordnung mit den Augen.
Es sind gleich viele.

2. 

Eins-zu-Eins-Zuordnung mit den Augen.
Es ist ein weißer Kreis mehr. Es ist ein schwarzer Kreis weniger.

3. 

Eins-zu-Eins-Zuordnung mit den Augen (oder Verbindungslinien).
Es sind gleich viele.

4. 

Eins-zu-Eins-Zuordnung mit den Augen (oder Verbindungslinien).
Es sind zwei schwarze Kreise mehr. Es sind zwei weiße Kreise weniger.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5.	
----	--

Eins-zu-Eins-Zuordnung mit Verbindungslinien.

Es ist ein weißer Kreis mehr. Es ist ein schwarzer Kreis weniger.

6.	
----	--

Zählend oder Eins-zu-Eins-Zuordnung mit Rahmen

(einen weißen und einen schwarzen Kreis jeweils einkreisen).

Es sind zwölf schwarze und zehn weiße Kreise. Es sind zwei schwarze Kreise mehr. Es sind zwei weiße Kreise weniger.

7.	
----	--

Zählend oder Eins-zu-Eins-Zuordnung mit Rahmen

(jeweils einen weißen und einen schwarzen Kreis einkreisen).

26 schwarze und 25 weiße Kreise. Es ist ein schwarzer Kreis mehr. Es ist ein weißer Kreis weniger.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4.3a LÖSUNGEN – ... mehr/weniger als

Beenden Sie die Aussagen.

7 ist **einer mehr** als **6**.

3 sind **zwei mehr** als **1**.

1 ist **einer weniger** als **2**.

9 ist **einer weniger** als **10**.

2 sind **zwei weniger** als **4**.

5 ist **einer mehr** als **4**.

10 ist **einer mehr** als **9**.

8 sind **zwei mehr** als **6**.

4 ist **einer mehr** als **3**.

6 ist **einer weniger** als **7**.

7 ist **einer weniger** als **8**.

7 sind **zwei weniger** als **9**.

1 ist **einer mehr** als **0**.

9 sind **zwei mehr** als **7**.

2 sind **zwei mehr** als **0**.

5 ist **einer weniger** als **6**.

10 sind **zwei mehr** als **8**.

8 sind **zwei weniger** als **10**.

4 sind **zwei mehr** als **2**.

6 sind **zwei mehr** als **4**.

8 ist **keiner mehr** als **8**.

Einer mehr als 3 ist **4**.

Zwei weniger als 4 sind **2**.

Einer weniger als 7 ist **6**.

Einer mehr als 9 ist **10**.

Einer weniger als 1 ist **0**.

Zwei weniger als 10 sind **8**.

Zwei weniger als 9 sind **7**.

Keiner mehr als 8 ist **8**.

Keiner weniger als 8 ist **8**.

Einer weniger als 3 ist **2**.

Zwei weniger als 3 sind **1**.

Zwei mehr als 5 sind **7**.

Zwei mehr als 7 sind **9**.

Zwei mehr als 9 sind **11**.

Zwei weniger als 11 sind **9**.

Zwei weniger als 9 sind **7**.

Zwei weniger als 7 sind **5**.

Zwei weniger als 5 sind **3**.

Zwei mehr als 0 sind **2**.

Zwei mehr als 2 sind **4**.

Keiner mehr als 10 ist **10**.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Füllen Sie die Lücken.

5 sind *zwei mehr* als 3.

10 ist *einer mehr* als 9.

1 ist *zwei weniger* als 3.

10 ist *einer weniger* als 11.

1 ist *einer weniger* als 2.

7 sind *zwei mehr* als 5.

1 ist *keiner mehr/weniger* als 1.

5 sind *zwei mehr* als 3.

1 ist *einer mehr* als 0.

3 sind *zwei mehr* als 1.

10 sind *zwei mehr* als 8.

4 ist *einer weniger* als 5.

4 ist *einer mehr* als 3.

Welche Beziehungen können Sie zwischen folgenden Zahlen formulieren?

3 und 4 *Drei ist einer weniger als vier.
Vier ist einer mehr als drei.*

7 und 9 *Sieben sind zwei weniger als neun.
Neun sind zwei mehr als sieben.*

10 und 8 *Zehn sind zwei mehr als acht.
Acht sind zwei weniger als zehn.*

2 und 3 *Zwei ist einer weniger als drei.
Drei ist einer mehr als zwei.*

2 und 4 *Zwei sind zwei weniger als vier.
Vier sind zwei mehr als zwei.*

2 und 1 *Zwei ist einer mehr als eins.
Eins ist einer weniger als zwei.*

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4.4a LÖSUNGEN – Wie viele sind es mehr oder weniger?

Setzen Sie das richtige Vergleichszeichen ein.	Verändern Sie die linke Seite so, dass beide Seiten gleich werden.	Verändern Sie die rechte Seite so, dass beide Seiten gleich werden.	Ermitteln Sie den Unterschied.
3 > 1	$3 - 2 = 1$	$3 = 1 + 2$	2
7 < 9	$7 + 2 = 9$	$7 = 9 - 2$	2
6 < 10	$6 + 4 = 10$	$6 = 10 - 4$	4
1 < 5	$1 + 4 = 5$	$1 = 5 - 4$	4
5 < 8	$5 + 3 = 8$	$5 = 8 - 3$	3
9 > 6	$9 - 3 = 6$	$9 = 6 + 3$	3
4 < 5	$4 + 1 = 5$	$4 = 5 - 1$	1
7 > 1	$7 - 6 = 1$	$7 = 1 + 6$	6
2 < 4	$2 + 2 = 4$	$2 = 4 - 2$	2
0 < 7	$0 + 7 = 7$	$0 = 7 - 7$	7
8 > 3	$8 - 5 = 3$	$8 = 3 + 5$	5
10 > 2	$10 - 8 = 2$	$10 = 2 + 8$	8
4 = 4	$4 +/- 0 = 4$	$4 = 4 +/- 0$	0

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

4.4b LÖSUNGEN – Unterschied von Zahlen

Tragen Sie in die mittlere Spalte der Tabelle ein, welche Additions- und Subtraktionsaufgaben die Zahlbeziehungen der jeweiligen Zahlen angeben. Tragen Sie den Unterschied beider Zahlen in die rechte Spalte ein.

		Zahlbeziehungen	Unterschied
1.	Ermitteln Sie die Differenz von 7 und 5.	$7 - 5 = 2$ $5 + 2 = 7$ $7 - 2 = 5$	2
2.	Wie groß ist der Unterschied zwischen 3 und 10?	$10 - 3 = 7$ $3 + 7 = 10$ $10 - 7 = 3$	7
3.	Wie viele sind zwei weniger als fünf?	$5 - 2 = 3$ $2 + 3 = 5$ $5 - 3 = 2$	3
4.	Um wie viele sind zwei weniger als fünf?	$5 - 2 = 3$ $2 + 3 = 5$ $5 - 3 = 2$	3
5.	Um wie viele sind fünf weniger als zwei?	Fünf sind nicht weniger als zwei.	-
6.	Vergleichen Sie 9 und 7.	$9 - 7 = 2$ $7 + 2 = 9$ $9 - 2 = 7$	2
7.	Wie viel ist eins mehr als acht?	Eins ist nicht mehr als acht.	-
8.	Wie viele sind einer mehr als acht?	Einer mehr als acht sind neun. $8 + 1 = 9$	1
9.	Um wie viele sind acht mehr als einer?	$8 - 1 = 7$ $1 + 7 = 8$ $8 - 7 = 1$	7
10.	Um wie viele sind drei weniger als sechs?	$6 - 3 = 3$ $3 + 3 = 6$ $6 - 3 = 3$	3
11.	Um wie viel unterscheiden sich 8 und 1?	$8 - 1 = 7$ $1 + 7 = 8$ $8 - 7 = 1$	7
12.	Um wie viel ist fünf größer als zwei?	$5 - 2 = 3$ $2 + 3 = 5$ $5 - 3 = 2$	3
13.	Um welche Zahl unterscheiden sich vier und neun?	$9 - 4 = 5$ $4 + 5 = 9$ $9 - 5 = 4$	5
14.	Wie viel ist fünf kleiner als zehn?	$10 - 5 = 5$ $5 + 5 = 10$ $10 - 5 = 5$	5

Inhaltsverzeichnis

5 MENGEN UND ZAHLEN AUFTEILEN (Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I	Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?	2
II	Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?	3
III	An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?	4
IV	Wo finden sich didaktische Erläuterungen?	5
V	Welche Materialien werden benötigt?	5
5.1	Gesamtes und Teile	6
5.1.1	Vortrag – Gesamtes und Teile auf Zahlen übertragen	6
5.1.2	Gruppenarbeit – Begriffe Gesamtes und Teile	8
5.1.3	Vortrag und Einzelarbeit – Veränderung der Teilmengen ohne Veränderung der Gesamtmenge	9
5.1.4	Gruppenarbeit – Gegensinnige Veränderungen der Teilmengen	12
5.2	Zahlzerlegungen	15
5.2.1	Kursgespräch und Aufgabenblatt – Gegenstände, Zahl/Anzahl, Einer	15
5.2.2	Kursgespräch und Aufgabenblatt – Gesamtmenge und Teilmengen	16
5.2.3	Vortrag und Aufgabenblatt – Zahlzerlegungen	18
5.2.4	Gruppenarbeit und Aufgabenblatt – Zahlzerlegungen	22

5 MENGEN UND ZAHLEN AUFTEILEN

(Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Das *kardinale* und das *relationale Zahlverständnis* bilden die Grundlage der rechnerischen Kompetenz. Was ist damit gemeint?

Kardinalität entspricht der Anzahl der Elemente der Menge. Diese Anzahl ist eine natürliche Zahl n . Dabei wird auch von der Mächtigkeit einer endlichen Menge gesprochen. In einer Menge von acht Äpfeln ist die Mächtigkeit, die Anzahl oder die Gesamtheit acht. Das wird durch die Zahl Acht beschrieben. In der Menge dieser acht Elemente sind Teilmengen enthalten, dem entsprechend sind in der Zahl Acht weitere Zahlen enthalten.

Im Folgenden wird für Anzahl auch von Gesamtheit, dem Gesamten oder der Gesamtmenge gesprochen. Es soll nämlich beschrieben werden, dass das *Gesamte* (die Gesamtheit, die Gesamtmenge) in *Teile* (Teilmengen) zerlegt werden kann. Zum Beispiel sind in der Gesamtmenge von acht Äpfeln auch Teilmengen von drei Äpfeln und fünf Äpfeln enthalten – die wiederum für sich Gesamtheiten sind.

Diese Mengenbetrachtung gilt für die Zahlbetrachtung gleichermaßen. Das heißt, in der Acht sind die Drei und die Fünf enthalten. Das Gesamte ist acht, ein Teil dieses Gesamten ist drei und der andere Teil ist fünf. Das ist eine Erkenntnis über die Zahlbeziehungen von drei, fünf und acht (relationales Zahlverständnis). Für die Acht gibt es weitere Zahlbeziehungen. In der Acht sind neben der Drei und der Fünf ebenso auch die Sechs und die Zwei oder die Sieben und die Eins enthalten. Das deckt sich mit Aussagen aus den vorangegangenen Kapiteln: Die Zahlen bestehen im abstrakten Sinn aus Einern oder Einsen. Die Einer können wieder zu Zahlen zusammengefasst werden.

Wenn die Acht aus acht Einern besteht, können zwei Einer zur Zwei zusammengefasst werden, die restlichen sechs Einer können zur Sechs zusammengefasst werden. Demnach sind in der Acht die Sechs und die Zwei enthalten. Das heißt, die Acht kann in zwei und sechs zerlegt werden.

Fünf Einer der Acht könnten aber auch zur Fünf zusammengefasst werden und die restlichen drei Einer zur Drei. Demnach sind in der Acht auch die Fünf und die Drei enthalten usw.

Diese Betrachtungen funktionieren auf der Mengenebene, sollen aber im nächsten Lernschritt unabhängig von dem unmittelbaren Mengenbezug gleichermaßen auf der Zahlenebene gedacht werden können.

Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern soll es gelingen, die Zahlen mit ihren Beziehungen untereinander abzurufen und als Gedankenkonstrukt nutzen zu können. Das ist das relationale Zahlverständnis.

Mit dem *Gesamten* und den *Teilen* lassen sich Mengenhandlungen vornehmen, aus denen Rechenoperationen ableitbar sind:

Die Teile können zu einem Gesamten zusammengefasst werden. Das Zusammenfassen wird durch die Addition beschrieben und durch „+“ symbolisiert. Das heißt, die Teile Fünf und Drei werden zum Gesamten Acht zusammengefasst und mit einer Gleichung symbolisiert: $5 + 3 = 8$.

Dem Gesamten können Teile entnommen werden.

Wird vom Gesamten Acht die Drei entnommen, bleibt die Fünf übrig: $8 - 3 = 5$.

Die Entnahme eines Teils kann auch in anderer Reihenfolge stattfinden. Es kann der Acht auch die Fünf entnommen werden, dann bleibt die Drei übrig: $8 - 5 = 3$

Hierbei wird von Rechenoperationen¹ gesprochen: Dem Rechnen liegen (Mengen-)Handlungen zugrunde, auf der Symbolebene werden dementsprechend die Symbole sinnvoll verknüpft. Das Operieren mit Zahlen wird symbolisch nachvollziehbar und eindeutig in sogenannten Rechenaufgaben ausgedrückt.

Nach dem verstehenden Erarbeiten der Inhalte dieses Kapitels sollte es den Teilnehmerinnen und Teilnehmern möglich sein, die kardinalen Eigenschaften der Zahlen bis zehn über das Beschreiben der Zahlzerlegungen sowie über das Beschreiben von Zahlbeziehungen zu denken und mit Rechenoperationen auszudrücken.

¹ Die Logik einer Rechenoperation zu verstehen heißt, interpretieren zu können, mit welcher Frage diese Rechenoperation sinnvoll verknüpft werden kann: Welche Fragen in welchen Situationen beschreiben die Operationen der Mengen oder Zahlen? Auf welche Weisen können diese Fragen beantwortet werden (bzw. welche Weisen der Beantwortung sind in der Mathematikergemeinschaft gültig)?

Das schließt ein, z. B. die Zahl Fünf als Gesamtes zu verstehen, die aus fünf Einern besteht. Diese fünf Einer können jeweils zu verschiedenen Teilen der Fünf zusammengefasst werden: Die Teile sind zwei und drei; drei und zwei; eins und vier; vier und eins. Ebenso können die Teile z. B. zwei und zwei und eins sein.

Darüber hinaus kann auch die Null in diese Betrachtungen einbezogen werden. Dann kann mit weiteren Teilen agiert werden. Zum Beispiel mit den Teilen null und fünf. Anders ausgedrückt ist die Fünf auch in die Null und die Fünf zerlegbar. Die Null entspricht einer leeren Teilmenge.

Hervorgehoben sollten die Zahlbeziehungen zur Fünf und zur Zehn werden. Gaidoschik spricht von *geistigen Stützpunkten*.²

In der Tat sind die gewussten Beziehungen zur Fünf und zur Zehn fundamental: einerseits bezogen auf die Hände – eine Hand hat fünf Finger und beide Hände haben zehn Finger –, die geeignete Rechenhilfen darstellen, bevor die Zahlbeziehungen automatisch aus dem Gedächtnis abgerufen werden können. Entsprechend haben sich Visualisierungen bewährt, in denen die Fünf und die Zehn hervorgehoben werden (siehe Abakus, Zehnerfelder, Perlenketten mit jeweils fünf verschiedenfarbigen Perlen u. Ä.).

Andererseits liegt hier eine Vorstufe des Bündelungsgedankens, der die Basis des Dezimalsystems darstellt und leicht auf Zahlbereiche bis Hundert, Tausend usw. übertragen werden kann. Ein halbes Zehnerbündel sind fünf, zwei Fünfer sind ein Zehner, zehn Zehner bilden Hundert usw.

Das relationale Zahlverständnis im Zahlbereich bis zehn ist mitentscheidend dafür, ob die Teilnehmer/-innen das Dezimalsystem verstehen lernen. Dieses relationale Wissen kann später auf größere Zahlen übertragen werden. Ziel dieses Kapitels ist es zum Beispiel, sieben als fünf und zwei zu denken, somit auch in der Lage zu sein, von sieben fünf (oder zwei) wegzudenken oder auch fünf und zwei zusammenzudenken.

Diese Gedanken lassen sich später auf mehrstellige Zahlen übertragen: Siebzig (Siebenhundert, ...) kann in fünfzig (fünfhundert ...) und zwanzig (zweihundert ...) zerlegt werden. Entsprechend sind fünfzig (fünfhundert ...) und zwanzig (zweihundert ...) zusammen siebzig (siebenhundert ...).

Das Verständnis von Zahlen und das Verständnis der Rechenoperationen bedingen einander. Wenn die Zahlen nicht als Ganzes verstanden werden, das aus Teilen zusammengesetzt ist, kann auch nicht die Subtraktion als das Entnehmen solcher Teile von einem Ganzen und ebenso nicht die Addition als das Zusammenfassen solcher Teile zu einem Ganzen verstanden werden.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Eine hohe Hürde für die Teilnehmer/-innen ist es, ihr Mengen- und Zahlenwissen, das häufig immer noch rudimentär ist, in ein allgemeineres Wissen über die Beziehungen der Zahlen zu überführen. Bereits im Kapitel *Kardinale und andere Nutzungen von Zahlen* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 2, in Bearbeitung) wurde zum kardinalen Zahlbegriff erarbeitet, dass Zahlen Anzahlen beschreiben. Um das zu verstehen, müssen die Lernenden erkennen, dass es bei Mengen eine Eigenschaft Anzahlhaftigkeit gibt, die mithilfe von Zahlen beschrieben wird. Im Kapitel *Mengen und Zahlen vergleichen* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 4, in Bearbeitung) wurde der Aufbau der Zahlen nach dem Prinzip „immer einer mehr“ erarbeitet. Dies wurde zu zwei mehr/zwei weniger und x mehr/ x weniger erweitert. Im hier vorliegenden Kapitel 5 wird dieses Wissen um den Begriff der Zahlzerlegung erweitert. Die Routinisierung der Zahlzerlegungen wird vielen Teilnehmerinnen und Teilnehmern dabei nur gelingen, wenn sie eine begriffliche Vorstellung davon haben, was Zahlzerlegungen sind. Bezüge zu dinglich vorhandenen oder imaginierten Mengen sollen sie dabei immer wieder herstellen können. Das betrifft strukturierte Mengendarstellungen, insbesondere Strukturierungen, die mit Bezügen zur Fünf und zur Zehn arbeiten. Diese können das Denken von Zahlen in ihren Beziehungen zueinander und damit auch das Erinnern dieser Beziehungen in Form von Zerlegungen erleichtern.

Immer wieder sollte den Teilnehmerinnen und Teilnehmern verdeutlicht werden, dass zum Rechnen ein kardi- nales Zahlverständnis und nicht ein zählendes (ordinales) erforderlich ist.

² Michael Gaidoschik (2007/2015). Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. G&G Verlag, Wien (8. Auflage). Das Buch wird wortidentisch vom Persen-Verlag, Buxtehude, unter dem Titel: „Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis“ vertrieben. Die Änderung von Titel und Cover erfolgte ohne Einwilligung des Autors.

DIDAKTISCHE EINFÜHRUNG

Mit einem ordinal dominierten Zahlverständnis gehen Zähler davon aus, dass die Zahl Acht das achte Zählobjekt meint. Sie wissen nicht sicher, dass Acht alle acht Elemente, also die Anzahl, meint. Wenn eine Gesamtheit nicht als solche verstanden wird, dann gelingt es nicht, von dieser Gesamtheit auf andere zu schließen, also Mengenbeziehungen abzuleiten. Dementsprechend können dann auch Zahlbeziehungen nicht hergestellt werden. Es kann nicht verstanden werden, dass in der Acht die Fünf und die Drei enthalten sind, wenn in der Vorstellung mit der Zahl Acht das achte Element verbunden wird.

Manchen Teilnehmerinnen und Teilnehmern wird die Vielzahl von Begriffen verwirrend vorkommen: Wann benutze ich *Anzahl*, wann *Zahl*, wann *Gesamtes*, wann *Gesamtmenge*, wann *Gesamtheit*?

Und wieso ist eine Teilmenge auch eine Gesamtheit, die ich wieder zerlegen kann? Wie kann ich denn überhaupt gedachte Zahlen zerlegen?

Eine eigene Ordnung in diesem komplexen Gedankenkonstrukt herzustellen, braucht oft viel Geduld, Motivation, Beharrlichkeit und Zeit. Einigen wird es schwer fallen, sich sprachlich auszudrücken, Rechenwege zu beschreiben, Zahlbeziehungen zu formulieren und Zusammenhänge zu begründen. Sie haben Zahlen oft noch nie so gedacht und damit nie experimentiert.

Immer wieder muss den Teilnehmerinnen und Teilnehmern verdeutlicht werden, dass Verstehen über Sprache funktioniert. Wenn etwas verstanden ist, kann es beschrieben werden. Es geht dabei nicht um Perfektion, sondern darum, eigene Worte für Zusammenhänge zu finden, denn über das Verständnis von Zusammenhängen bleibt das Gelernte nachhaltig im Gedächtnis. Das bedeutet für die Kursleitung, dass sie die Teilnehmer/-innen immer wieder ermutigen und motivieren muss, die Rechenwege zu erläutern.

Manche Teilnehmer/-innen werden Schwierigkeiten beim Visualisieren haben. Zahlzerlegungen können nicht direkt dargestellt werden. Wie soll das Zerlegen der als Zahlsymbol 8 aufgeschriebenen Zahl Acht dargestellt werden? Wird die Acht zerschnitten?

Die dafür genutzten Visualisierungen sind symbolisch gemeint. Auch an Mengenbildern kann die Zahlzerlegung sehr wohl abgebildet werden.

Ein erster Abstraktionsschritt ist, die an Objekten vorgenommenen Zahlzerlegungen (z. B. an Steckwürfeln) allgemeingültig darzustellen/zu visualisieren.

Ein weiterer Abstraktionsschritt ist, Mengenhandlungen mit Rechenoperationen zu verbinden und dafür eine geeignete Symbolschreibweise zu finden. Schwierigkeiten können umgekehrt auch dabei auftreten, Rechenoperationen mit Mengenhandlungen zu verbinden. Es muss also eingehend erarbeitet werden, wie die Addition und die Subtraktion visualisiert werden können.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Der kardinale Zahlbegriff wird im Kapitel *Kardinale und andere Nutzungen von Zahlen* eingeführt (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 2, in Bearbeitung).

Im Kapitel *Mengen und Zahlen verändern* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 3) wird erläutert, wie Mengenhandlungen in Gleichungen und umgekehrt Gleichungen in Mengenhandlungen überführt werden können. Addition bedeutet etwas hinzufügen und Subtraktion etwas entnehmen. Es wird sichtbar gemacht, dass ein Teil übrig bleibt, wenn aus Mengen ein Teil entnommen wird. Die Begriffe Gesamtmenge und Teilmenge sind eingeführt.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Michael Gaidoschik (2007/2015). Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. G&G Verlag, Wien (8. Auflage).
Das Buch wird wortidentisch vom Persen-Verlag, Buxtehude, unter dem Titel: „Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis“ vertrieben. Die Änderung von Titel und Cover erfolgte ohne Einwilligung des Autors.
- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
> Stufe 1 – Zahlzerlegungen, S. 39 ff.
 Bezüge zur Fünf und zur Zehn, S. 20 ff., S. 37 f., S. 39 ff.
www.grundbildung.de/unterricht

V Welche Materialien werden benötigt?

- Moderationskarten
- Stifte
- Malerkreppband
- Steckwürfel
- Chips
- Holzsteine
- Karten 1–10
- Fingerbilder
- andere Darstellungen der Zahlen ...

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Schlagwörter: Anzahl • Das Ganze • Die Teile • Einzelarbeit • Gruppenarbeit • Mengen • Vortrag • Zahlbegriff • Zahlen • Zahlen bis 30

5.1 Gesamtes und Teile

Exploration

Es wird geklärt, dass unter dem Begriff *Gesamtmenge* etwas Gesamtes/Umfassendes verstanden wird. Von dem *Gesamten* können ein Teil oder mehrere Teile entnommen werden. Die Teile können wiederum zum Gesamten zusammengefügt werden. Dabei darf allerdings nichts verloren gehen. Sonst ergibt es nicht mehr das Gesamte, das ursprünglich in Teile zerlegt wurde.

In einer Menge von beispielsweise acht Äpfeln ist die Anzahl/die Gesamtheit/das Gesamte acht. Dafür steht die Zahl 8. Diese Menge von insgesamt acht Äpfeln kann unterschiedlich aufgeteilt werden. Zum Beispiel in die Teilmenge von drei Äpfeln und in die Teilmenge von fünf Äpfeln. Es wäre auch möglich, in die Teilmengen von sechs und zwei Äpfeln aufzuteilen. Oder in drei Teilmengen von jeweils zwei und zwei sowie vier Äpfeln. Wenn die Teilmengen wieder zusammengefügt werden, liegt erneut die Gesamtmenge vor.

Wie ist es, wenn dieser Zusammenhang auf Zahlen übertragen wird? Gibt es hier auch Gesamtes und Teile? Die Teilnehmer/-innen lernen, einerseits von Mengen auf Zahlen zu schließen. Ebenso wie bei der Mengenbetrachtung der acht Äpfel, kann die Zahl Acht in die Drei und die Fünf zerlegt werden. Oder auch in die Sechs und die Zwei. Oder sogar in zwei Zweien und die Vier. Andererseits lernen die Teilnehmer/-innen aus dem Zusammendenken von Einern oder Einsen auf die Teile der Zahlen zu schließen.

Bei Zahlen wird von Zahlzerlegungen gesprochen. Eine Zahl wird in Teile zerlegt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Zahlen zu zerlegen. Der Null kommt dabei eine besondere Rolle zu. Auch die Null kann als Teil einer Zahl betrachtet werden.

5.1.1 Vortrag – Gesamtes und Teile auf Zahlen übertragen

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung erläutert, dass es in diesem Unterrichtsteil darum geht, die Formulierungen Gesamtes und Teile auf Zahlen zu übertragen.

Etwas Gesamtes ist etwas Umfassendes. Zum Beispiel die Gesamtheit aller Schülerinnen und Schüler einer Schule. Indem ich versuche, den Begriff das Gesamte zu erläutern, nutze ich bereits weitere Begriffe. Es ist üblich, wenn etwas erklärt wird, nach anderen Begriffen oder Beschreibungen zu suchen.

Hier geht es zum Beispiel um alle Schülerinnen und Schüler einer Schule. Das Wort alle beschreibt die Gesamtheit. Das heißt, ich habe jetzt für das Gesamte die Wörter alle, Umfassendes und Gesamtheit benutzt.

Um bei dem Beispiel Schule zu bleiben, interessiert oft die Frage, wie viele Schülerinnen und Schüler insgesamt in der Schule lernen. Ein weiteres Wort kommt dazu: insgesamt.

Manchmal wird auch nach der Schülerschaft gefragt. Und um gendergerecht zu sprechen, wird von Lernenden gesprochen. Das heißt, hier werden die Wörter Schülerschaft oder Lernende für das Gesamte benutzt.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Es interessiert zum Beispiel die Schulverwaltung, wie viele von der gesamten Schülerschaft Mädchen oder Jungs sind. Zu einem Teil besteht die Schülerschaft aus Mädchen und zum anderen Teil aus Jungen. Die Gesamtheit der Schülerschaft besteht aus den Teilen Jungen und Mädchen. Insgesamt sollte aber die Zahl der Schülerschaft stimmen. Das heißt, Mädchen und Jungen zusammen sind die Schülerschaft. Dabei darf kein Mädchen oder Junge beim Zählen vergessen werden.

Die gesamte Schülerschaft kann auch unter anderen Aspekten eingeteilt werden und dann sind die Teile nicht mehr die Mädchen und die Jungen.

Nachfolgend einige Beispiele für Teile der Schülerschaft:

Der Klassiker aus der Schulzeit: Fahrradfahrer/-innen, Busnutzer/-innen, Fußgänger/-innen – Schülerschaft in drei Teile eingeteilt.

Jahrgangsstufen: 10, 9, 8, 7 – Schülerschaft in vier Teile eingeteilt.

Die Jahrgangsstufen lassen sich noch feiner einteilen: Klassen – zum Beispiel: drei siebente Klassen, jeweils zwei achte, neunte und zehnte Klassen. Wie viele Teile ergeben sich bei dieser Einteilung?

Bei einer Schülerbefragung für die Schulspeisung ergeben sich auch Teile der gesamten Schülerschaft: Vegetarier/-innen, Veganer/-innen, Fleischesser/-innen, Nichtesser/-innen ... Und wo tragen sich die Schüler/-innen ein, die nur Fisch essen oder kein Schweinefleisch? ... Tja, Einteilen ist manchmal nicht einfach.

Weitere Beispiele für Teile der Schülerschaft könnten durch die Teilnehmer/-innen aufgezählt werden:

- Leistungskurs/Grundkurs
- Mitarbeit in AGs
- Sportabzeichen Gold/Silber/Bronze/keins usw.

Die Kursleitung lenkt die Aufmerksamkeit der Teilnehmer/-innen auf folgende Aspekte:

- Eher selten sind die einzelnen Teile gleich groß.
- Werden die Teile zusammengefügt, ergibt sich das Ganze.
- Wird der Schülerschaft ein Teil entnommen, bleibt ein Teil/bleiben andere Teile übrig.

Nachfragen wie:

Stimmen diese Aussagen? Warum ist das so? Können Sie das erläutern?

sollen zu einem wesentlichen Aspekt dieses Kapitels führen:

Das Gesamte besteht aus Teilen, die unterschiedlich groß sein können. Diese Teile können zu dem Gesamten zusammengeführt werden. Wenn ein Teil von dem Gesamten weggenommen wird, bleibt mindestens ein Teil übrig.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Mit der Frage, wie es sich darstellt, wenn ein bestimmter Teil in dieser Schule nicht vorhanden ist, wird bereits auf die besondere Bedeutung der Null vorbereitet.

- In einer Schule für Jungen lernen keine Mädchen. Das heißt, die Schulleitung trägt in den Fragebogen der Schulverwaltung eine Null ein.
- In manchen Schulen nutzt die Schülerschaft nicht den Bus. Auch hier müsste eine Null eingetragen werden.
- Manchmal entfällt eine Jahrgangsstufe.
- Usw.

Die Kursleitung formuliert zusammenfassend:

Ein bestimmter Teil kann also nicht vorhanden sein, dieser Teil ist leer, diese Teilmenge enthält keine Elemente.

5.1.2 Gruppenarbeit – Begriffe Gesamtes und Teile

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 5.1a

Die Kursleitung verteilt an die Teilnehmer/-innen Moderationskarten, auf denen Begriffe stehen, und bittet die Teilnehmer/-innen, die Moderationskarten unter den Begriffen das Gesamte und die Teile anzuordnen. Eine Druckvorlage befindet sich auf dem **Aufgabenblatt 5.1a Begriffe Gesamtes und Teile** (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten).

Um die Moderationskarten zum Beispiel an den Wänden des Unterrichtsraumes zu befestigen, eignet sich Malerkreppband.

Möglicherweise finden die Teilnehmer/-innen weitere Begriffe, die zu den beiden Oberbegriffen passen. Damit sollten leere Moderationskarten beschriftet werden.

Synonym verwendete Begriffe – das Ganze und die Teile:

Das Ganze

Das Gesamte
Gesamtmenge
Gesamtheit
Alle/alles zusammen
Das, was da ist ...
Umfassend
100 Prozent
Vollständig
Ausnahmslos
Zusammengesetztes
Zerlegbares

Die Teile

Anteile
Teile, Teilmengen
Stücke
Bruchstücke
Ein Teil von dem ...
Nicht alles
30 Prozent, 2 Prozent
Unvollständig
Ein bisschen
Etwas

Wenn diese Begriffe für alle sichtbar im Unterrichtsraum angebracht werden, kann die Kursleitung in den nächsten Lernschritten darauf verweisen. Es können im Unterrichtsverlauf weitere passende Begriffe ergänzt werden.

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Verschiedene Begriffe können synonym für das Gesamte und die Teile verwendet werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5.1.3 Vortrag und Einzelarbeit – Veränderung der Teilmengen ohne Veränderung der Gesamtmenge

Exploration

Die Teilnehmer/-innen sollten zunächst darauf aufmerksam werden, dass es bei Mengenbetrachtungen um die Anzahl der Elemente einer Menge geht und nicht um die Art der Elemente (zum Beispiel Äpfel oder Wendeplättchen).

Wie verändert sich das Gesamte, wenn die Teile verändert werden?

Hier soll folgende Erkenntnis erarbeitet werden: Wird zunächst ein Element der einen Teilmenge in die andere Teilmenge verschoben, ändert sich die Gesamtmenge nicht.

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Teilnehmer/-innen haben Wendeplättchen vor sich liegen.

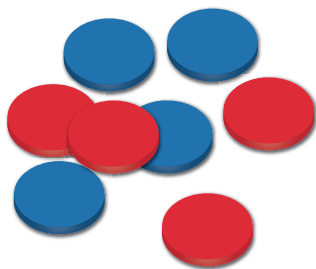


Abbildung 5.1-1: Wendeplättchen

Die Kursleitung hält einen Vortrag und zeigt die nachfolgenden Abbildungen als Overhead-Folien oder als Präsentation mit einem Beamer.

Auf der ersten Folie sind Äpfel abgebildet.

Eine Gesamtmenge von acht Äpfeln enthält Teilmengen von z. B. drei Äpfeln und fünf Äpfeln.

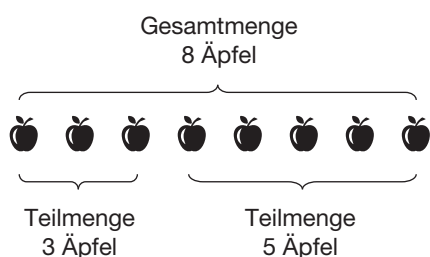


Abbildung 5.1-2: Gesamtmenge von acht Äpfeln mit Teilmengen von drei Äpfeln und fünf Äpfeln

Bitte vollziehen Sie mit Wendeplättchen nach, dass in der Gesamtmenge von acht Wendeplättchen die Teilmenge von drei und die Teilmenge von fünf Wendeplättchen enthalten sind.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Wie können Sie das machen? Probieren Sie es aus.

Meine Lösung wäre:

Acht Wendeplättchen so legen, dass Rot nach oben zeigt. Drei Wendeplättchen umdrehen. Vor mir liegen jetzt drei blaue Wendeplättchen und fünf rote Wendeplättchen. Die Gesamtmenge von acht Elementen (Wendeplättchen) enthält die Teilmengen von drei Elementen (blaue Wendeplättchen) und von fünf Elementen (rote Wendeplättchen). Es verhält sich ebenso in der Darstellung mit den Äpfeln. Die Gesamtmenge von acht Elementen (Äpfeln) enthält die Teilmengen von drei und fünf Elementen.

Verschieben Sie ein Element von der einen Teilmenge in die andere, so verändert sich nicht die Gesamtmenge. Drehen Sie ein blaues Wendeplättchen um. Jetzt liegen vor Ihnen die Teilmengen von zwei blauen Plättchen und sechs roten Plättchen. Das heißt, Sie haben ein Plättchen der blauen Dreiermenge in die rote Fünfermenge verschoben. Es sind jetzt eine blaue Zweiermenge und eine rote Sechsermenge. Insgesamt bleiben es aber acht Elemente (Wendeplättchen).

Wenn die Kursleitung an dieser Stelle bemerkt, dass Teilnehmer/-innen Schwierigkeiten damit haben, wenn vom Verschieben von Mengenelementen die Rede ist, aber auf der Materialebene lediglich Plättchen umgedreht werden, dann wird die gesamte Betrachtung (auch die Betrachtung, dass 8 aus 5 und 3 oder 6 und 2 besteht) noch einmal mit Chips der gleichen Farbe durchgeführt. Dabei bietet es sich an, dass die Teilmengen ein wenig voneinander separiert gelegt werden. Die Teilnehmer/-innen sehen hierbei, dass immer über die Gesamtmenge aus acht Elementen gesprochen wird.

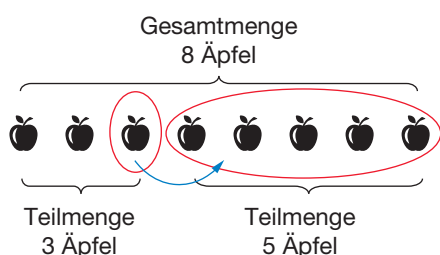


Abbildung 5.1-3: Ein Element wird von der einen Teilmenge in die andere verschoben

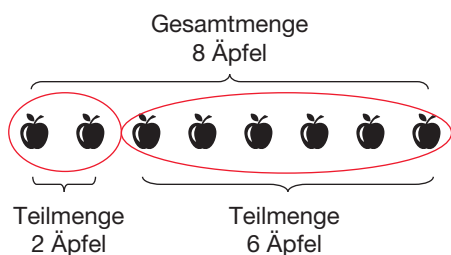


Abbildung 5.1-4: Gesamtmenge von acht Äpfeln mit Teilmengen von zwei Äpfeln und sechs Äpfeln

Jetzt ist es eine Zweier- und eine Sechserteilmenge. Die Gesamtmenge hat sich nicht verändert.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Die Kursleitung formuliert die Behauptung:

Wird eine beliebige Anzahl von einer Teilmenge in die andere Teilmenge verschoben, so verändert sich die Gesamtmenge nicht.

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer/-innen zu weiteren Veränderungen der Teilmengen auf und fragt:

Was passiert, bezogen auf die Teilmengen rote und blaue Wendepfättchen, wenn Sie jetzt von der Sechsermenge (sechs rote Wendepfättchen) fünf umdrehen?

Die Kursleitung beobachtet, ob alle Teilnehmer/-innen diese Anweisung richtig nachvollziehen.

Eine mögliche Antwort der Teilnehmer/-innen könnte lauten:

Jetzt ist es eine Siebenerteilmenge (blaue Wendepfättchen) und eine Einerteilmenge (rote Wendepfättchen). Zusammen sind es immer noch acht Chips.

*Was passiert, wenn Sie von der Siebenerteilmenge drei Elemente zu der Einerteilmenge **verschieben**? Drehen Sie von den sieben blauen Pfättchen drei Pfättchen um.*

Eine mögliche Antwort könnte lauten: Jetzt sind es zwei Viererteilmengen.

Können Sie die acht Wendepfättchen auch in mehr als zwei Teilmengen zerlegen? Und wenn ja, zeigen Sie das an einem Beispiel. Bitte drehen Sie die Wendepfättchen so, dass alle eine Farbe haben. Das Zerlegen in Teilmengen deuten Sie mit dem Verschieben der Teile an.

Die Teilnehmer/-innen haben jetzt im Idealfall verschiedene Teilmengen vor sich liegen:

Zum Beispiel $4/2/2$, $6/1/1$, $2/2/2/2$, ..., $1/1/1/1/1/1/1/1$.

Bitten Sie am Ende dieser Aufgaben die Teilnehmer/-innen, die Teilmengen wieder zur Gesamtmenge zusammenzufügen.

Vor den Teilnehmer/-innen sollten insgesamt acht Wendepfättchen liegen.

Was können Sie aus den Aufgaben ableiten? Beschreiben Sie allgemein, wie eine Gesamtmenge in Teilmengen zerlegt werden kann und wie diese Teilmengen wieder zu der Gesamtmenge zusammengefügt werden können.

Wie viele Teilmengen können in einer Gesamtmenge enthalten sein?

Sind diese Teilmengen gleich groß?

Beschreiben Sie, wie sich die Gesamtmenge verändert, wenn Elemente der einen Teilmenge zu der anderen Teilmenge verschoben werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Eine Gesamtmenge kann in verschieden große Teilmengen oder auch in gleich große Teilmengen zerlegt werden.
- Eine Gesamtmenge kann in mehr als zwei Teilmengen zerlegt werden.
Möglicherweise kommt hier bereits ein Einwand: Eine Zweier-Gesamtmenge kann nur in zwei Teilmengen zerlegt werden.

Exkurs:

Es bietet sich an, an dieser Stelle die Zahl Null zu thematisieren. Wird die Teilmenge Null betrachtet, ist diese leer. Eine Mengenhandlung könnte sein, dass die Zweier-Gesamtmenge in zwei Einer-Mengen und eine (oder mehrere) weitere leere Mengen geteilt wird. Als Handlungsbeispiel könnte dienen: Zwei Bonbons werden von drei Personen geteilt. Eine Person bekommt keinen Bonbon.

- Wird die Anzahl der einen Teilmenge zugunsten/zuungunsten der anderen Teilmenge verändert, bleibt die Gesamtmenge unverändert.
- Alle Teilmengen können wieder zu der Gesamtmenge zusammengefügt werden.

Es ist wichtig, dass alle Teilnehmer/-innen die genannten Mengenhandlungen mit unterschiedlichen Elementen nachvollziehen können. Geeignet sind Steckwürfel oder andere Gegenstände. Wendeplättchen haben einen visuellen Vorteil, indem durch Umdrehen sofort ersichtlich wird, welche Teilmengen (rot und blau) in der Gesamtmenge enthalten sind. Die jeweilige Aufteilung der entsprechenden Teilmenge wird farblich deutlich werden. Die Wendeplättchen eignen sich besonders für das Veranschaulichen von Zerlegungen einer Gesamtmenge in zwei Teilmengen.

Bei Übungen mit Material geht es darum, die Teilnehmer/-innen auf die Zahlzerlegungen vorzubereiten, denn ihre Aufgabe wird es anschließend sein, sich selbstständig mithilfe von Wendeplättchen, Steckwürfeln, Chips oder anderen Materialien die Zahlzerlegungen zu erarbeiten.

Je nach Mitarbeit und Kenntnisstand der Teilnehmer/-innen entscheidet die Kursleitung, ob noch weitere Übungen durchgeführt werden.

Zum Beispiel: Zehn Wendeplättchen in vier rote und sechs blaue aufteilen. Von den roten Plättchen drei umdrehen. Jetzt ist die Gesamtmenge von zehn Wendeplättchen in die Teilmengen neun blaue und ein rotes Wendeplättchen aufgeteilt.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

5.1.4 Gruppenarbeit – Gegensinnige Veränderungen der Teilmengen

Exploration

Hier geht es um das gegensinnige Verändern der Teilmengen und darum, dass die Teilnehmer/-innen möglichst selbst erkennen, dass sich dabei die Gesamtmenge nicht verändert.

Gegensinniges Verändern heißt zum Beispiel: Eine Teilmenge wird um eins weniger, dafür die andere Teilmenge um eins mehr.

Eine weitere wichtige Erkenntnis ist, dass sich bei einer Gesamtmenge von neun Elementen zehn verschiedene Möglichkeiten der Zerlegung in zwei Teilmengen ergeben.

Die Kursleitung systematisiert diese Erkenntnis, indem sie die Teilnehmer/-innen bittet herauszufinden, wie viele Möglichkeiten, verschiedene Teilmengen zu bilden, es bei zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht oder zehn Wendeplättchen gibt.

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer/-innen, neun Wendeplättchen vor sich auf den Tisch zu legen. Die Oberseite der Wendeplättchen hat bei allen die gleiche Farbe.

Schritt für Schritt drehen die Teilnehmer/-innen ein Wendeplättchen nach dem anderen um. Zwischen den Schritten sollten die Teilnehmer/-innen den Ausführungen der Kursleitung zuhören.

Die Kursleitung zeigt die nachfolgende Abbildung und erläutert.

Vor Ihnen liegen neun Wendeplättchen einer Farbe. Das wird hier in der Abbildung mit weißen Kreisen symbolisiert.

Wenn jetzt Schritt für Schritt je ein Wendeplättchen umgedreht wird, dann ändern Ihre Wendeplättchen jeweils die Farbe. In der Abbildung sehen Sie dafür eine Änderung der weißen Kreise in schwarze Kreise. Im ersten Schritt besteht die Teilmenge schwarz aus null Elementen und die Teilmenge weiß aus neun Elementen. Im zweiten Schritt: ein schwarzer Kreis und acht weiße Kreise.

Im dritten Schritt: zwei schwarze Kreise und sieben weiße Kreise. Usw.

Die Teilmenge der weißen Kreise wird immer einer weniger und die Teilmenge der schwarzen Kreise immer einer mehr.

Entsprechend nimmt bei Ihren Wendeplättchen eine Farbe um eins ab und die andere Farbe um eins zu.

Wenn jetzt alle Schritte dargestellt werden, dann ergibt sich das Bild dieser Abbildung.

Ich bitte Sie zu formulieren, welche Muster Sie entdecken und wie Sie diese Muster erklären können.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

	Gesamtmenge 9									Teilmenge schwarz		Teilmenge weiß	
1.	○	○	○	○	○	○	○	○	○	0		9	
2.	●	○	○	○	○	○	○	○	○	1		8	
3.	●	●	○	○	○	○	○	○	○	2		7	
4.	●	●	●	○	○	○	○	○	○	3		6	
5.	●	●	●	●	○	○	○	○	○	4		5	
6.	●	●	●	●	●	○	○	○	○	5		4	
7.	●	●	●	●	●	●	○	○	○	6		3	
8.	●	●	●	●	●	●	●	○	○	7		2	
9.	●	●	●	●	●	●	●	●	○	8		1	
10.	●	●	●	●	●	●	●	●	●	9		0	

Abbildung 5.1-5: Ein Element wird von der einen Teilmenge in die andere verschoben

Die nächste Abbildung fasst die Erkenntnisse der Unterrichtssequenz zusammen und wird den Teilnehmerinnen und Teilnehmern gezeigt. Dabei bittet die Kursleitung die Teilnehmer/-innen, dass jeder Satz durch einen/eine Teilnehmer/-in vorgelesen wird und jeweils mit einem Beispiel belegt wird.

Zusammenfassung: Gesamtmenen und Teilmengen

Eine Gesamtmenge kann in verschieden große Teilmengen oder auch in gleich große Teilmengen zerlegt werden.

Wird die Anzahl der einen Teilmenge zugunsten/zuungunsten der anderen Teilmenge verändert, bleibt die Gesamtmenge unverändert.

Eine Gesamtmenge kann in mehr als zwei Teilmengen zerlegt werden.

Die Teilmengen können zu der Gesamtmenge zusammengefügt werden.

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Es gibt viele Begriffe für *das Gesamte* und *die Teile* (siehe Abschnitt 5.1.2). Sie spiegeln mit anderen Worten wider, was mit dem Gesamten und den Teilen gemeint ist. Alles wird in Einzelnes aufgeteilt.
- Das Gesamte kann in zwei und mehr Teile zerlegt werden. Die Teile müssen nicht gleich groß sein.
- Diese Teile können wieder zu dem Gesamten zusammengeführt werden. Wird die Anzahl der einen Teilmenge zugunsten/zuungunsten der anderen Teilmenge verändert, bleibt die Gesamtmenge unverändert.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Schlagwörter: Anzahl • Das Ganze • Die Teile • Kursgespräch • Mengen • Vortrag • Zahlbegriff • Zahlen • Zahlen bis 30

5.2 Zahlzerlegungen

5.2.1 Kursgespräch und Aufgabenblatt – Gegenstände, Zahl/Anzahl, Einer

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 5.2a

Je nach Kenntnisstand der Gruppe wiederholt die Kursleitung mithilfe des **Aufgabenblattes 5.2a** *Anzahl und Einer* (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) den Zusammenhang zwischen Mengen, Zahlen/Anzahlen und Einern.

Die Kursleitung entscheidet, inwieweit das notwendig ist. Es kann bereits genügen, eine Aufgabe gemeinsam zu besprechen. Die erste Zeile des Aufgabenblattes ist bereits ausgefüllt.

Die Kursleitung erläutert:

Es sind sechs Füllfederhalter (Füller) abgebildet. Dafür können auch sechs Einer notiert werden, also für jeden Füllfederhalter ein Einer. Das entspricht der Zahl oder Anzahl Sechs. Die Frage, aus wie vielen Einern die Zahl Sechs besteht, muss mit sechs beantwortet werden.

Es wird besprochen, was in diesem Beispiel das Gesamte ist. Mögliche Formulierungen sind: Sechs ist das Gesamte. Die Gesamtmenge beträgt sechs. Es sind insgesamt sechs Füller.

Gegenstände	Einer	Zahl/Anzahl	Aus wie vielen Einern besteht die Zahl?
	1 1 1 1 1 1	6	sechs

Abbildung 5.2-1: Ausschnitt Aufgabenblatt 5.2a

Das Wort *insgesamt* ist ein Schlüsselwort. Es hat bereits eine wichtige Rolle bei der Formulierung der Rechenoperationen Addition und Subtraktion gespielt.

Falls von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Zusammenhang von Gegenständen, Einern und Zahlen noch nicht verstanden worden ist bzw. die Formulierungen eine Herausforderung darstellen, sollte das Aufgabenblatt gemeinsam bearbeitet werden. Jeweils ein Beispiel wird von einzelnen Teilnehmerinnen und Teilnehmern vorgestellt. Dabei sollen Antworten für nachfolgende Fragen formuliert werden:

*Wie viele Gegenstände haben Sie gezeichnet?
Entspricht das der von Ihnen benannten Anzahl?
Stellen Ihre gezeichneten Gegenstände eine Menge dar?
Enthält diese Menge gleiche Elemente?
Welche Elemente haben Sie dargestellt?
Ist das wichtig für die Anzahl der Elemente?
Welche Zahl können Sie dafür schreiben?
Entspricht die Zahl der Anzahl?
Wie viele Einer sind es?*

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

AB 5.2a

Wie viele sind es insgesamt?

Wie groß ist in Ihrem Beispiel die Gesamtmenge?

Ergebnis dieser Wiederholung sollte sein, dass die Begriffe Menge, Zahl oder Anzahl, Einer, Gesamtmenge richtig zugeordnet und erklärt werden können.

5.2.2 Kursgespräch und Aufgabenblatt – Gesamtmenge und Teilmengen

Exploration

Von der Einteilung der Mengen in Gesamt- und Teilmengen soll auf die Zahlzerlegungen geschlossen werden. Dafür wird eine geeignete Visualisierungsform entwickelt.

Erneut werden die verschiedenen Aufteilungen einer Gesamtmenge in zwei Teilmengen untersucht.

Diese Mengenbetrachtung hat zunächst wiederholenden Charakter, bereitet aber den sehr wichtigen Schluss auf die Zahlzerlegung vor.

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 5.2b

Die Kursleitung verteilt das **Aufgabenblatt 5.2b** *Gesamtmenge, Teilmengen, Zahlzerlegung* (Bearbeitungsdauer 10–20 Minuten) an die Teilnehmer/-innen. In der folgenden Unterrichtssequenz wird das Aufgabenblatt gemeinsam bearbeitet. Auf der linken Seite des Aufgabenblattes werden Mengenbetrachtungen und auf der rechten Seite die entsprechenden Zahlbetrachtungen angestellt.

Die folgenden Abbildungen werden durch die Kursleitung auf Overhead-Folien oder mit einem Beamer gezeigt. Die Kursleitung erläutert zunächst die Abbildungen und die passenden Formulierungen. Die Teilnehmer/-innen finden diese Abbildungen und Formulierungen auf dem vor ihnen liegenden **Aufgabenblatt 5.2b** (linker Teil).

Auf dem **Aufgabenblatt 5.2b** ist die Gesamtmenge von sechs Füllfederhaltern dargestellt. Die Teilmengen werden farblich unterschieden (graue und weiße Füllfederhalter).

Ziel ist es, den Gedanken zu verstehen und zu formulieren, dass in einer Gesamtmenge von insgesamt sechs Elementen unterschiedliche Teilmengen (die Teile) enthalten sein können.

Die Gesamtmenge ist sechs. Welche Teilmengen können darin enthalten sein?
Auf dem Aufgabenblatt werden die Teilmengen mit unterschiedlichen Farben verdeutlicht.

Die Kursleitung vergewissert sich, dass die Formulierungen der Teilnehmer/-innen passend sind. Die Kursleitung bittet verschiedene Teilnehmer/-innen, die Abbildungen zu beschreiben und dabei die Begriffe Gesamtmenge und Teilmengen zu verwenden.

Es sind insgesamt sechs Füllfederhalter.

Darstellung der Gesamtmenge 6:



Insgesamt sechs Füllfederhalter

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

AUFGABENBLATT 5.2b

In der Gesamtmenge von sechs Füllfederhaltern sind fünf blaue und ein schwarzer Füllfederhalter enthalten. Die Teilmengen sind 5 und 1.

Darstellung der Gesamtmenge 6 und der Teilmengen 5 und 1:



Insgesamt sechs (Gesamtmenge): fünf graue, ein weißer Füllfederhalter (Teilmengen)

In der Gesamtmenge von sechs Füllfederhaltern sind vier graue und zwei weiße Füllfederhalter enthalten. Die Teilmengen sind also 4 und 2.

Darstellung der Gesamtmenge 6 und der Teilmengen 4 und 2:



Insgesamt sechs (Gesamtmenge): vier graue, zwei weiße Füllfederhalter (Teilmengen)

Im Kursgespräch werden die noch nicht notierten Teilmengen der Gesamtmenge 6 ermittelt. Die Teilnehmer/-innen schreiben jetzt die Formulierungen selbstständig auf das Aufgabenblatt. Gemeinsam werden die Formulierungen besprochen.

In der Gesamtmenge von sechs Füllfederhaltern sind drei graue und drei weiße Füllfederhalter enthalten. Die Teilmengen sind also 3 und 3.

Darstellung der Gesamtmenge 6 und der Teilmengen 3 und 3:



Insgesamt sechs (Gesamtmenge): drei graue, drei weiße Füllfederhalter (Teilmengen)

In der Gesamtmenge von sechs Füllfederhaltern sind zwei graue und vier weiße Füllfederhalter enthalten. Die Teilmengen sind also 2 und 4.

Darstellung der Gesamtmenge 6 und der Teilmengen 2 und 4:



Insgesamt sechs (Gesamtmenge): zwei graue, vier weiße Füllfederhalter (Teilmengen)

In der Gesamtmenge von sechs Füllfederhaltern sind ein grauer und fünf weiße Füllfederhalter enthalten. Die Teilmengen sind also 1 und 5.

Darstellung der Gesamtmenge 6 und der Teilmengen 1 und 5:



Insgesamt sechs (Gesamtmenge): ein grauer, fünf weiße Füllfederhalter (Teilmengen)

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer/-innen, dass sich jede/r sechs Wendeplättchen nimmt und die mit Füllfederhaltern dargestellten Gesamt- und Teilmengen anhand von Wendeplättchen nachvollzieht.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Es gibt zwei Möglichkeiten, mit sechs Wendeplättchen zu agieren (Beispiel Zweier-/Viererteilmenge): Entweder die Wendeplättchen werden schrittweise gewendet (z. B. ●●○○○○) oder die Wendeplättchen werden einfarbig verwendet und das Zerlegen in Teilmengen durch Auseinanderziehen der Plättchen angedeutet (z. B. ○○ ○○○○).

Es bietet sich an, an dieser Stelle erneut darauf hinzuweisen, dass für den Begriff der *Gesamtmenge* auch der Begriff das *Ganze* verwendet wird. Das entsprechende Synonym für *Teilmenge* ist *Teil*. Nachfolgend werden bevorzugt die Begriffe das *Ganze* und die *Teile* verwendet.

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Mit selbst durchgeführten Materialhandlungen haben sich die Teilnehmer/-innen die Zusammenhänge mehrfach verdeutlicht und sie dabei versprochen. Ziel hierbei ist es, die Zusammenhänge in das Langzeitgedächtnis zu übernehmen.
- Wichtig ist die zusammenfassende Erkenntnis, dass der oben beschriebene Zusammenhang von Gesamt- und Teilmengen für alle Mengen gilt.

5.2.3 Vortrag und Aufgabenblatt – Zahlzerlegungen

Exploration

AUFGABENBLATT 5.2b

Die Zahl Sechs kann zerlegt werden.

Das, was im linken Teil des **Aufgabenblattes 5.2b** als Mengensituation dargestellt ist, findet seine genaue Entsprechung in der Zahldarstellung im rechten Teil des **Aufgabenblattes 5.2b** – links die Gesamtmenge und ihre Teilmengen, rechts die entsprechende Zahl und ihre Zerlegungszahlen. Das Ganze ist die Sechs. Die Teile sind z. B. die Fünf und die Eins.

Um das zu verdeutlichen, wird nachfolgend eine geeignete Form der Visualisierung vorgeschlagen.

Fundamental ist (unabhängig von der Visualisierung) der Denkschritt:

Zahlen repräsentieren und verdeutlichen Mengen. Die *Mengenzerlegung* (Teilmengen einer Gesamtmenge) kann auf Zahlen übertragen werden. Dabei wird von *Zahlzerlegungen* gesprochen. Die Teilnehmer/-innen vollziehen hierbei zwei Abstraktionsschritte:

Abstraktionsschritt 1: Mengendarstellungen abstrahieren tatsächlich vorhandene Mengen.

Mengenhandlungen können mit unterschiedlichen Elementen vollzogen werden. Dabei stimmt die Anzahl überein. In diesem Beispiel werden insgesamt sechs Elemente in fünf Elemente und ein Element zerlegt. Dabei ist es nicht relevant, ob es sich um Füllfederhalter (hier symbolisiert), Steckwürfel oder Wendeplättchen handelt.

Abstraktionsschritt 2: Zahlen werden gedacht. Sie repräsentieren zwar konkrete Mengen (Anzahl), können jedoch ohne Mengenbezüge interpretiert werden. Zahlen bestehen aus Einern und lassen sich in Teile zerlegen. Die Zahlzerlegungen können immer wieder an Mengenhandlungen nachvollzogen werden. Das Loslösen (nicht das Ignorieren) von Mengenhandlungen führt die Teilnehmer/-innen hin zum abstrakten Zahlverständnis.

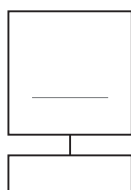
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung erläutert an der Tafel die Visualisierungsform, die nachfolgend für Zahlzerlegungen genutzt werden soll. Im oberen Teil wird das Gesamte, die zu zerlegende Zahl eingetragen. Diese Zahl wird in zwei Teile zerlegt. Die beiden Teile werden jeweils an die beiden nach unten führenden Linien geschrieben. Das soll verdeutlichen, dass die beiden Teile in dem Gesamten enthalten sind.¹

Zunächst wird diese Visualisierungsform gemeinsam auf dem [Aufgabenblatt 5.2b](#) erprobt. Es wird von der Mengengerlegung auf die Zahlzerlegung geschlossen.

Dabei entsprechen das Gesamte der Gesamtmenge und die Teile den Teilmengen.



Das Gesamte – entspricht der Gesamtmenge

Die Teile – entsprechen den Teilmengen

Abbildung 5.2-2: Visualisierung der Zahlzerlegung

Die Teilnehmer/-innen werden aufgefordert, eine Zahlzerlegung der Sechs in Teilmengen darzustellen. Dafür sollen auf dem [Aufgabenblatt 5.2b](#) die Felder neben der passenden Mengengerlegung genutzt werden.

¹ Es werden hier die Begriffe *Gesamtzahl* und *Teilzahlen* vermieden, weil sie ungebräuchlich sind. Im Grunde wären diese aber präzisere, vielleicht sogar verständlichere Begriffe als die Begriffe *das Gesamte* und *die Teile* – bei denen nicht explizit erkennbar ist, dass sie sich hier auf die Zahlenebene beziehen. Diese wären ebenso auf der Mengenebene als Synonyme zu *Gesamtmenge* und *Teilmengen* nutzbar.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Gesamtmenge, Teilmengen



Insgesamt sechs Füllfederhalter, kein grauer
Füllfederhalter



Insgesamt sechs: fünf graue, ein weißer Füllfederhalter



Insgesamt sechs: vier graue, zwei weiße Füllfederhalter

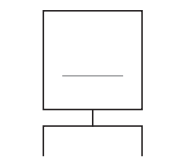
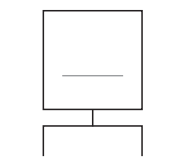
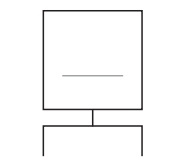
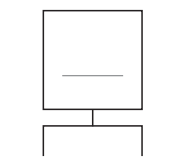
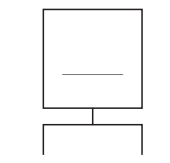
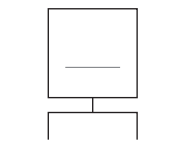
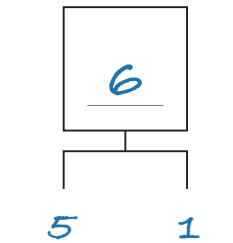
Zugehörige
Zahlzerlegung

Abbildung 5.2-3: AUFGABENBLATT 5.2b

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

AUFGABENBLATT 5.2b

Visualisierung der Zahlzerlegung der Sechs in fünf und eins:



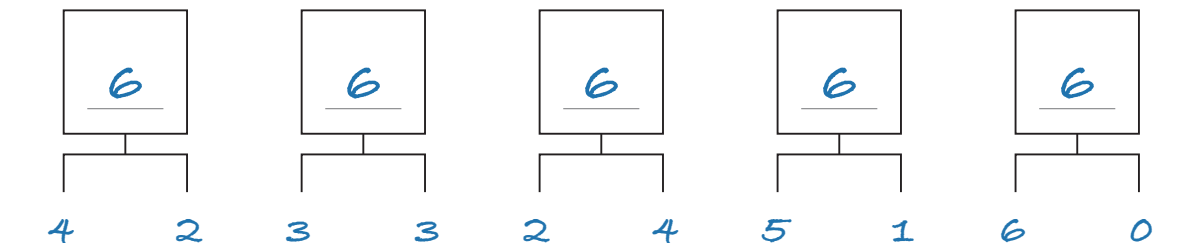
Das Ganze – entspricht der Gesamtmenge



Die Teile – entsprechen den Teilmengen

Die weiteren Zahlzerlegungen der Sechs tragen die Teilnehmer/-innen selbstständig in das **Aufgabenblatt 5.2b** ein.

Visualisierung weiterer Zahlzerlegungen der Sechs:



Mögliche Formulierungen sind:

- Die Sechs kann in fünf und eins zerlegt werden.
- In der Sechs sind fünf und eins enthalten.
- Das Gesamte ist die Sechs und die Teile sind die Fünf und die Eins.
- Die Sechs kann in vier und zwei zerlegt werden.
- In der Sechs sind vier und zwei enthalten.
- Das Gesamte ist die Sechs und die Teile sind die Fünf und die Eins.
- Usw.

Warum ist das so? Wieso kann die Sechs in verschiedene Teile zerlegt werden? Warum sind in der Sechs Zahlen enthalten?

*In der Sechs sind sechs Einer enthalten. Diese können unterschiedlich zusammengefasst oder **zusammengedacht** werden. Das ist jetzt tatsächlich eine **Denk-Aufgabe**: Sechs Einer können als fünf Einer und ein Einer, also zerlegt in 5 und 1 gedacht werden.*

Oder sechs Einer können als vier Einer und zwei Einer, also zerlegt in 4 und 2 gedacht werden.

Die Kursleitung verdeutlicht die Zahlzerlegung der Sechs z. B. in nachfolgender Schreibweise an der Tafel. Das soll den Teilnehmerinnen und Teilnehmern zeigen, dass es auch andere Visualisierungen geben kann.

Zahlzerlegungen der Sechs:

$6 \rightarrow 5/1; 4/2; 3/3; 2/4; 1/5$

Streng genommen kann die Sechs auch in die Null und die Sechs zerlegt bzw. in die Sechs und die Null zerlegt werden. Um das zu verstehen, bietet sich wiederum der Mengenbezug an.

Eine Menge von sechs Äpfeln kann natürlich in Teilmengen aufgeteilt werden. Selbstverständlich in vier und zwei Äpfel oder in drei und drei Äpfel und so weiter.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

AUFGABENBLATT 5.2 b

Vorstellbar ist aber auch, dass ein Teil leer ist und die sechs Äpfel dem anderen Teil zugeordnet werden. Leichter vorstellbar: Die Äpfel werden auf zwei Körbe verteilt. Ein Korb bleibt leer und in den anderen Korb werden sechs Äpfel gelegt.

Übertragen auf Zahlzerlegungen heißt das, dass die Null dazugehört.

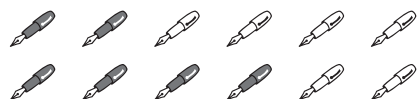
Zahlzerlegungen der Sechs unter Einbeziehung der Null:

$6 \rightarrow 6/0; 5/1; 4/2; 3/3; 2/4; 1/5; 0/6$

Was unterscheidet die Zahlzerlegung der Sechs in $4/2$ und in $2/4$?

Auch hier erfolgt die Erklärung mit Mengenbezug: Mit dem Beispiel grauer und weißer Füllfederhalter können die verschiedenen Sachverhalte folgendermaßen dargestellt werden.

Darstellung der Gesamtmenge 6 und der Teilmengen 2 und 4 sowie der Teilmengen 4 und 2:



Zum einen sind es zwei graue Füllfederhalter sowie vier weiße und zum anderen sind es vier graue Füllfederhalter und zwei weiße. Das sind unterschiedliche Mengensituationen.

Deutlicher werden der Unterschied und die Vergleichbarkeit der Mengensituationen, wenn etwas später der Zusammenhang erläutert wird, wie die Zahlzerlegung mit der Addition zusammenhängt.

5.2.4 Gruppenarbeit und Aufgabenblatt – Zahlzerlegungen

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 5.2 c

Die Kursleitung teilt die Teilnehmer/-innen in sechs Teams auf. Jedes Team hat jetzt die Aufgabe, für jeweils eine Zahl von 5 bis 10 alle möglichen Zahlzerlegungen auf dem **Aufgabenblatt 5.2 c** *Zahlzerlegungen* (Bearbeitungsdauer ca. 20 Minuten) zu notieren. Teamarbeit deswegen, weil damit gleichzeitig ein Gespräch über die Zahlzerlegungen angeregt wird.

Um Zahlzerlegungen nachvollziehen zu können, bieten sich Steckwürfel an:

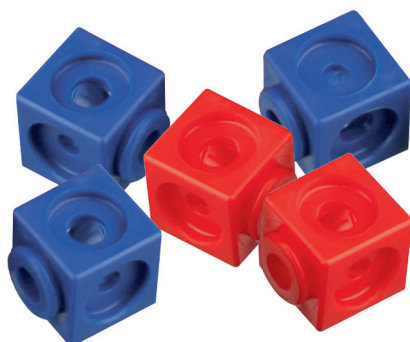


Abbildung 5.2-4: Mit Steckwürfeln Zahlzerlegungen nachvollziehen

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

AUFGABENBLATT 5.2c

Die Kursleitung erläutert die Aufgabenstellung – die Aufgabe ist für die Teilnehmer/-innen auf Seite 1 des **Aufgabenblattes 5.2c** formuliert.

- Jedem Team wird eine Zahl von 5 bis 10 zugewiesen.
- Zunächst notieren die Teilnehmer/-innen aus dem Gedächtnis, welche Zahlzerlegungen ihnen für die Zahl einfallen. Dafür nutzen sie die vorgesehenen Visualisierungen auf dem **Aufgabenblatt 5.2c**. Es umfasst mehrere Seiten und eignet sich zur Protokollierung der Zahlzerlegungen der Zahlen 5 bis 10. Die Teilnehmer/-innen suchen sich die entsprechende Seite für die zugewiesene Zahl heraus.
- Danach nimmt sich das Team die entsprechende Anzahl an Steckwürfeln.
- Gemeinsam werden alle möglichen Zahlzerlegungen der zugewiesenen Zahl mit den Steckwürfeln nachvollzogen. Die noch nicht eingetragenen Zahlzerlegungen werden auf dem **Aufgabenblatt 5.2c** ergänzt.
- Im unteren Teil des Aufgabenblattes wird notiert, wie viele Zahlzerlegungen die Teilnehmer/-innen für die zugewiesene Zahl finden.
- Die Teams haben anschließend die Aufgabe, die Zahlzerlegungen der zugewiesenen Zahl an der Tafel zu präsentieren.

Während die Teams die Zahlzerlegungen präsentieren, protokollieren die anderen Teilnehmer/-innen die entsprechenden Zahlzerlegungen auf dem **Aufgabenblatt 5.2c**.

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes können:

- Es gelingt, mit Gegenständen (hier Steckwürfel), die Zahlzerlegungen aller Zahlen bis zehn darzustellen und zu benennen, was dem Gesamten und den Teilen entspricht.
Das gelingt auch abstrakt. Alle Zahlen bis zehn können in ihre Teile zerlegt werden. Alle möglichen Zahlzerlegungen werden erkannt. Die gegenständlichen und die abstrakten Zahlzerlegungen aller Zahlen bis zehn können präsentiert werden.

Zum Beispiel für die Acht:

In der Gesamtmenge von acht Äpfeln sind auch Teilmengen von drei Äpfeln und fünf Äpfeln enthalten – die wiederum für sich Gesamtheiten sind. Diese Mengenbetrachtung gilt für die Zahlbetrachtung gleichermaßen. Das heißt, in der Acht sind die Drei und die Fünf enthalten. Das Gesamte ist acht, ein Teil dieses Gesamten ist drei und der andere Teil ist fünf. Für die Acht gibt es weitere Zahlbeziehungen. In der Acht sind neben der Drei und der Fünf ebenso auch die Sechs und die Zwei oder die Sieben und die Eins enthalten. Wenn die Acht aus acht Einern besteht, können zwei Einer zur Zwei zusammengefasst werden, die restlichen sechs Einer können zur Sechs zusammengefasst werden. Demnach sind in der Acht die Sechs und die Zwei enthalten. Das heißt, die Acht kann in zwei und sechs zerlegt werden. Fünf Einer der Acht könnten aber auch zur Fünf zusammengefasst werden und die restlichen drei Einer zur Drei. Demnach sind in der Acht auch die Fünf und die Drei enthalten usw.

- Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern gelingt es, die Zahlen mit ihren Beziehungen untereinander abzurufen und als Gedankenkonstrukt zu nutzen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5.1a Begriffe Gesamtes und Teile

Schneiden Sie die Karten entlang der Linien auseinander. Ordnen Sie die einzelnen Karten passend den Oberbegriffen *Das Gesamte* und *Die Teile* zu. Schreiben Sie auf die freien Karten weitere passende Begriffe.



Das Gesamte
(Oberbegriff)

Die Teile
(Oberbegriff)

Gesamtmenge

Anteile

Gesamtheit

Stücke

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Das Ganze

Bruchstücke

Alle/alles zusammen

Ein Teil von dem ...

Das, was da ist ...

Nicht alles

Umfassend

Ein bisschen

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Ausnahmslos

30 Prozent

100 Prozent

2 Prozent

Vollständig

Unvollständig

Ganzheit

Etwas

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Zusammengesetztes

Teilmengen

Zerlegbares

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5.2a Zahlzerlegungen, Anzahl und Einer

Füllen Sie die Spalten der Tabelle aus. In der ersten Spalte skizzieren Sie Gegenstände. Notieren Sie in der nächsten Spalte die entsprechenden Einer. In der dritten Spalte geben Sie die Zahl oder Anzahl der Gegenstände (das entspricht der Anzahl der Einer) an und beantworten in der letzten Spalte die Frage, aus wie vielen Einern die Zahl besteht.

Gegenstände	Einer	Zahl/ Anzahl	Aus wie vielen Einern besteht die Zahl?
	1 1 1 1 1 1	6	sechs

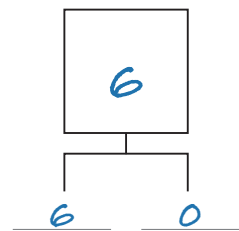
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5.2b Gesamtmenge, Teilmengen, Zahlzerlegung

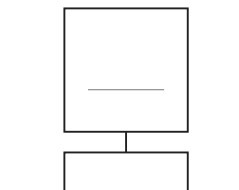
Tragen Sie die Gesamt- und Teilmengen entsprechend den Abbildungen ein.



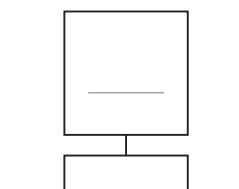
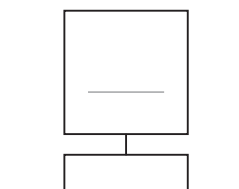
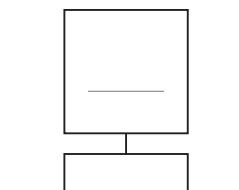
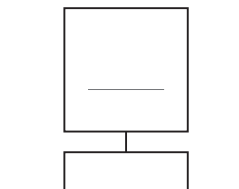
Insgesamt sechs Füllfederhalter, kein grauer Füllfederhalter



Insgesamt sechs: fünf graue, ein weißer Füllfederhalter



Insgesamt sechs: vier graue, zwei weiße Füllfederhalter



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5.2c Zahlzerlegungen

Ihrem Team wurde eine Zahl von 5 bis 10 zugewiesen.

Notieren Sie zunächst aus dem Gedächtnis, welche Zahlzerlegungen Ihnen für die zugewiesene Zahl einfallen. Nutzen Sie dazu die vorgegebenen Visualisierungen und suchen Sie sich die entsprechende Seite heraus.

Nehmen Sie sich die entsprechende Anzahl Steckwürfel, die Ihnen zugewiesen wurde. Vollziehen Sie alle möglichen Zahlzerlegungen der Zahl mit Steckwürfeln nach. Ergänzen Sie die fehlenden Zahlzerlegungen.

Notieren Sie, wie viele Zahlzerlegungen Sie für die zugewiesene Zahl finden.

Überlegen Sie gemeinsam, wie Sie die Zahlzerlegungen für die Zahl an der Tafel präsentieren können.

Ergänzen Sie die Zahlzerlegungen für die anderen Zahlen, während die anderen Teams präsentieren.



© OFC Pictures/Fotolia

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Zahlzerlegungen der 5

Wie viele Zahlzerlegungen der Fünf finden Sie?



©Stefano Neri/Fotolia

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Zahlzerlegungen der 6

Wie viele Zahlzerlegungen der Sechs finden Sie?



© Lsantilli / Fotolia

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Zahlzerlegungen der 7

Wie viele Zahlzerlegungen der Sieben finden Sie?



© Schliemer/Fotolia

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

Zahlzerlegungen der 8

Wie viele Zahlzerlegungen der Acht finden Sie?



©Gleb Sermenjuk/Fotolia

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Zahlzerlegungen der 9

Wie viele Zahlzerlegungen der Neun finden Sie?



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

Zahlzerlegungen der 10

Wie viele Zahlzerlegungen der Zehn finden Sie?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5.1a LÖSUNGEN – Begriffe Gesamtes und Teile

Schneiden Sie die Karten entlang der Linien auseinander. Ordnen Sie die einzelnen Karten passend den Oberbegriffen *Das Gesamte* und *Die Teile* zu. Schreiben Sie auf die freien Karten weitere passende Begriffe.

Synonym verwendete Begriffe – das Gesamte und die Teile:

Das Gesamte

Gesamtmenge
Gesamtheit
Das Ganze
Alle/alles zusammen
Das, was da ist ...
Umfassend
100 Prozent
Vollständig
Ausnahmslos
Zusammengesetztes
Zerlegbares

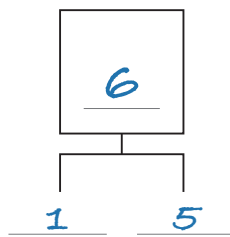
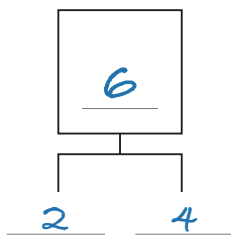
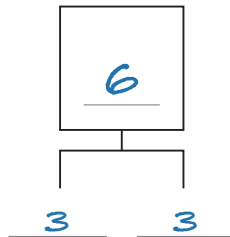
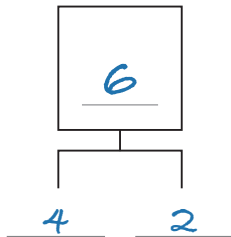
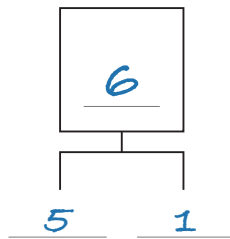
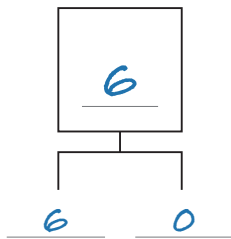
Die Teile

Anteile
Teile, Teilmengen
Stücke
Bruchstücke
Ein Teil von dem ...
Nicht alles
30 Prozent, 2 Prozent
Unvollständig
Ein bisschen
Etwas

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5.2b LÖSUNGEN – Gesamtmenge, Teilmengen, Zahlzerlegung

Tragen Sie die Gesamt- und Teilmengen entsprechend den Abbildungen ein.



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5.2c LÖSUNGEN – Zahlzerlegungen

Ihrem Team wurde eine Zahl von 5 bis 10 zugewiesen.

Notieren Sie zunächst aus dem Gedächtnis, welche Zahlzerlegungen Ihnen für die zugewiesene Zahl einfallen. Nutzen Sie dazu die vorgegebenen Visualisierungen und suchen Sie sich die entsprechende Seite heraus.

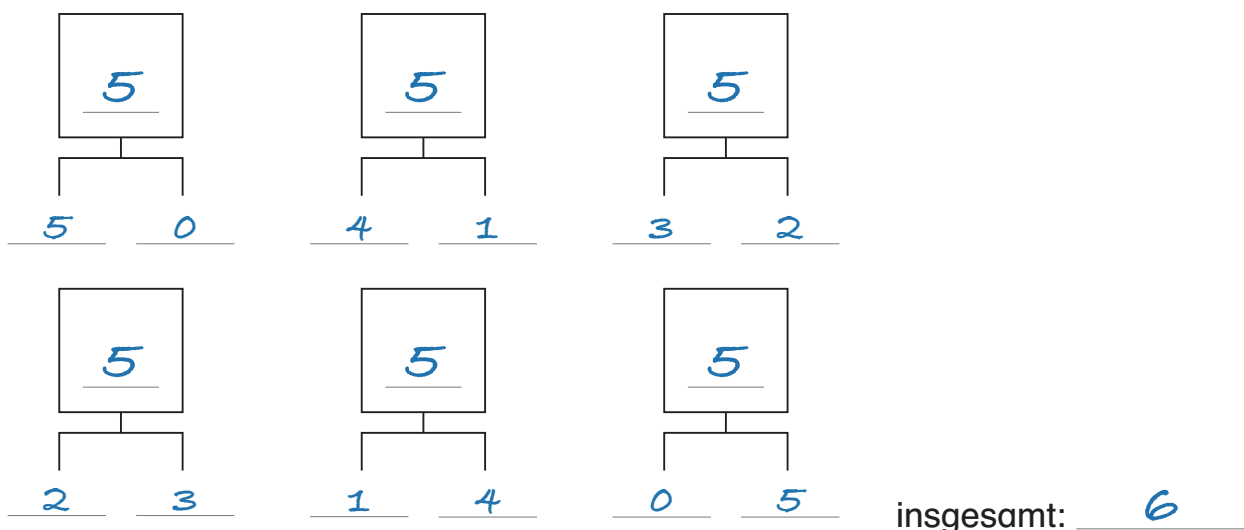
Nehmen Sie sich die entsprechende Anzahl Steckwürfel, die Ihnen zugewiesen wurde. Vollziehen Sie alle möglichen Zahlzerlegungen der Zahl mit Steckwürfeln nach. Ergänzen Sie die fehlenden Zahlzerlegungen.

Notieren Sie, wie viele Zahlzerlegungen Sie für die zugewiesene Zahl finden.

Überlegen Sie gemeinsam, wie Sie die Zahlzerlegungen für die Zahl an der Tafel präsentieren können.

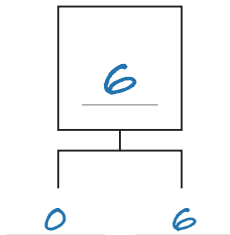
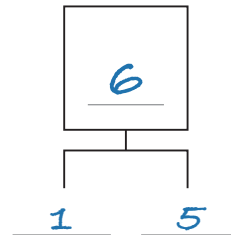
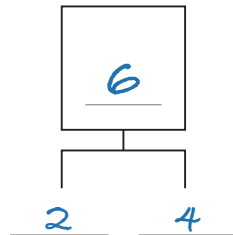
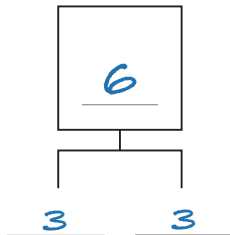
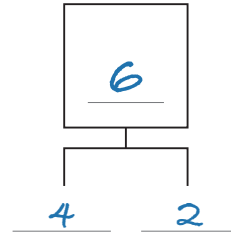
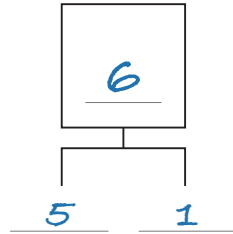
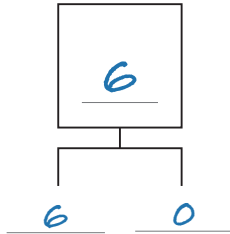
Ergänzen Sie die Zahlzerlegungen für die anderen Zahlen, während die anderen Teams präsentieren.

Zahlzerlegungen der 5

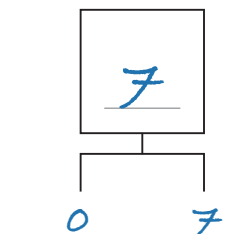
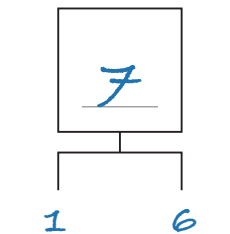
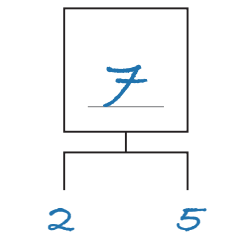
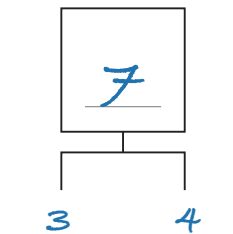
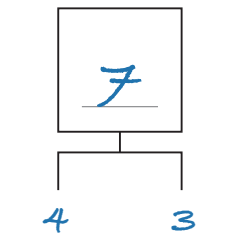
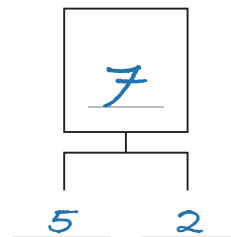
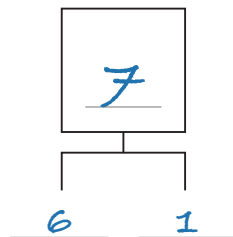
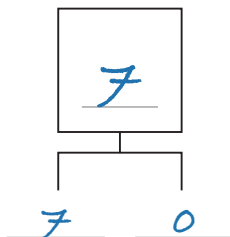


Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Zahlzerlegungen der 6

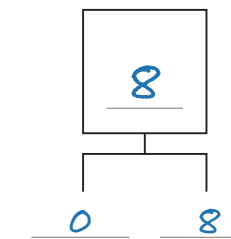
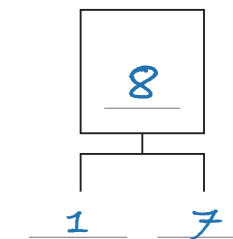
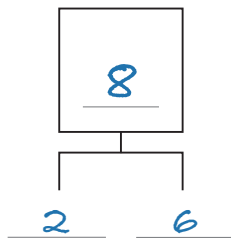
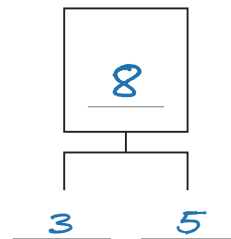
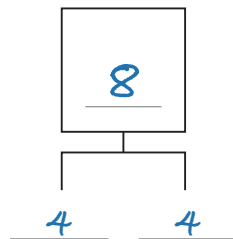
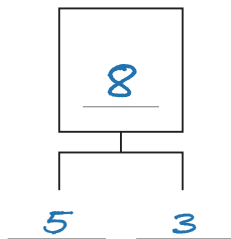
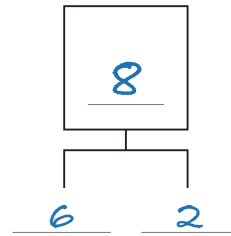
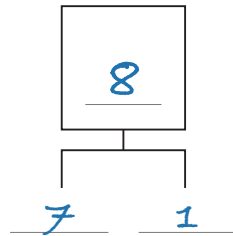
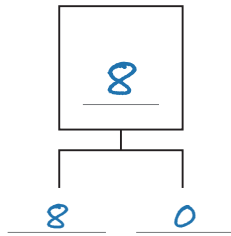
insgesamt: 7

Zahlzerlegungen der 7

insgesamt: 8

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

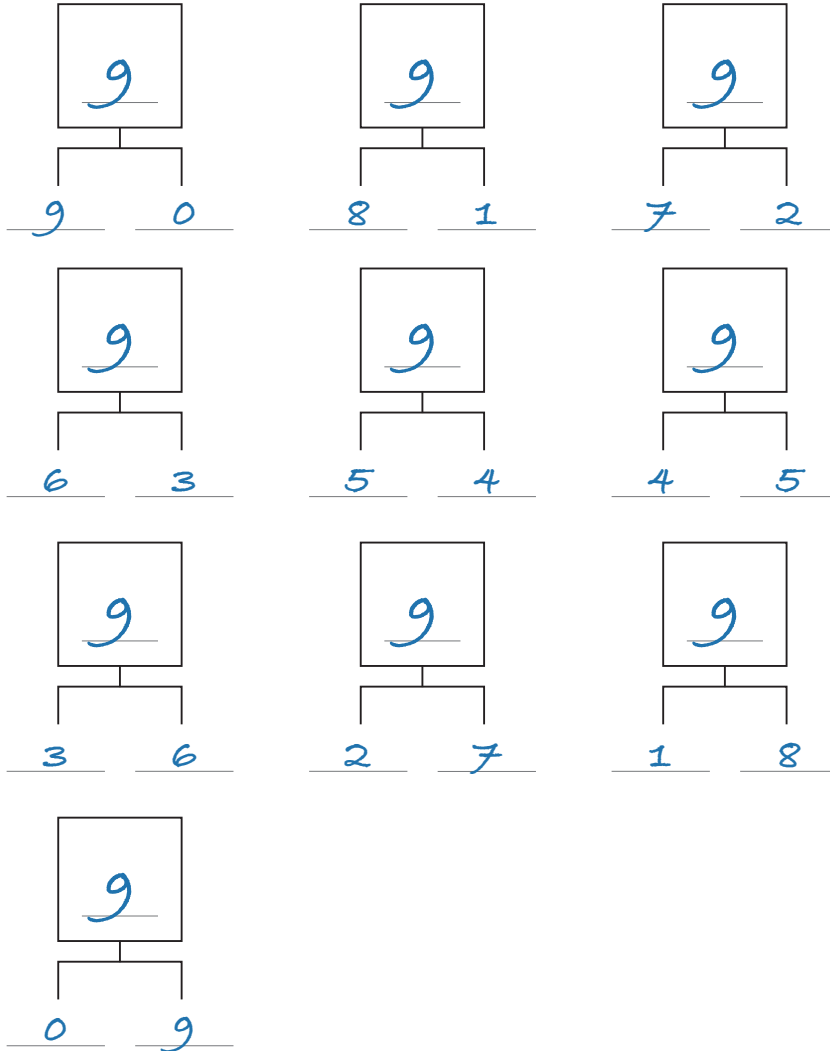
Zahlzerlegungen der 8



insgesamt: 9

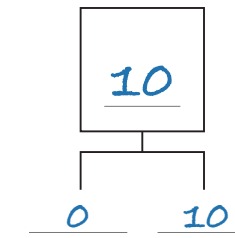
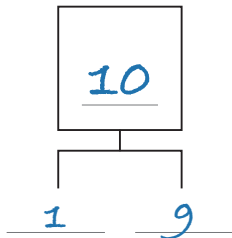
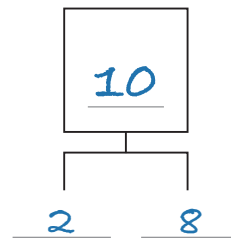
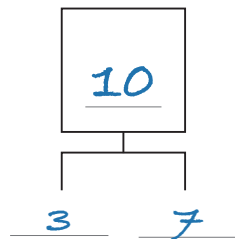
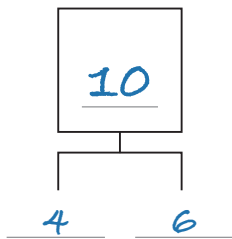
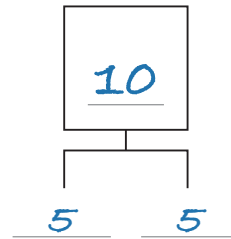
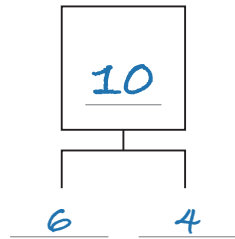
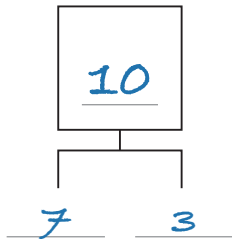
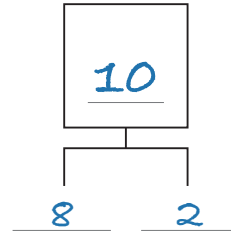
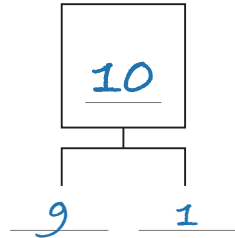
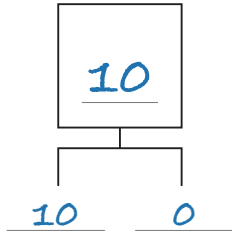
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

Zahlzerlegungen der 9

insgesamt: 10

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Zahlzerlegungen der 10



insgesamt: 11

**Gesamtmenge von acht Äpfeln
mit Teilmengen von drei Äpfeln und fünf Äpfeln**

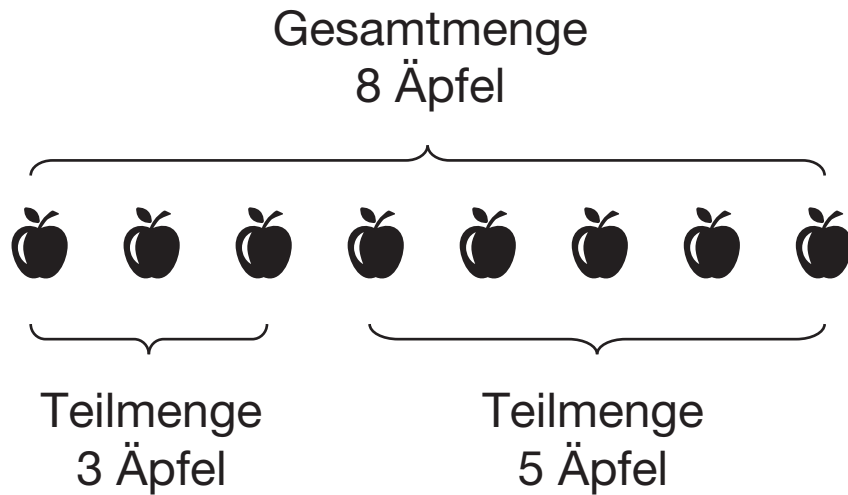
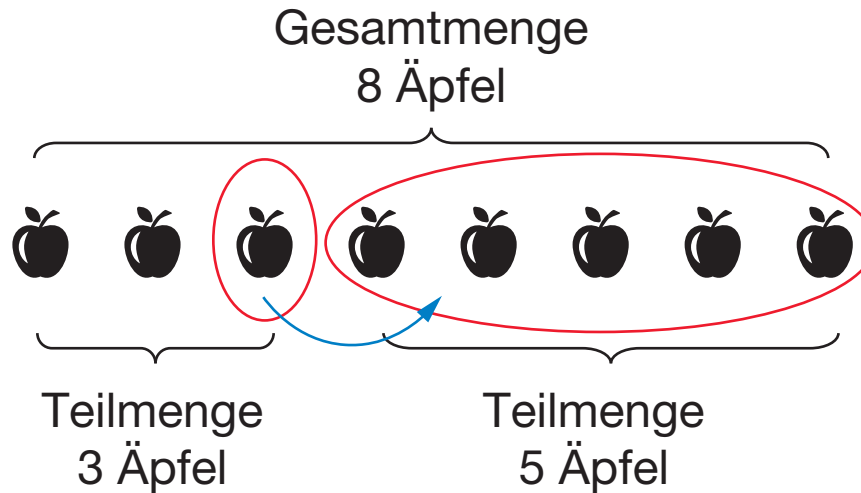


ABBILDUNG 5.1-3

Ein Element wird von der einen Teilmenge in die andere verschoben



**Gesamtmenge von acht Äpfeln
mit Teilmengen von zwei Äpfeln und sechs Äpfeln**

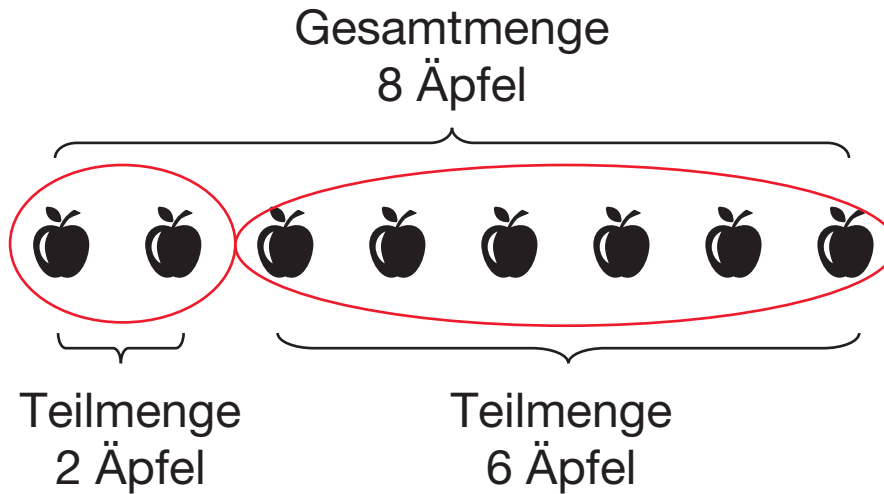


ABBILDUNG 5.1-5

Ein Element wird von der einen Teilmenge in die andere verschoben

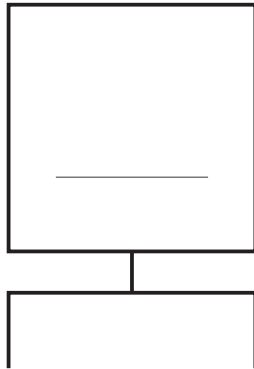
	Gesamtmenge 9	Teilmenge schwarz	Teilmenge weiß
1.	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	0	9
2.	● ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	1	8
3.	● ● ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	2	7
4.	● ● ● ○ ○ ○ ○ ○ ○	3	6
5.	● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○	4	5
6.	● ● ● ● ● ○ ○ ○ ○	5	4
7.	● ● ● ● ● ● ○ ○ ○	6	3
8.	● ● ● ● ● ● ● ○ ○	7	2
9.	● ● ● ● ● ● ● ● ○	8	1
10.	● ● ● ● ● ● ● ● ●	9	0

ABBILDUNG 5.2-1

Aufgabenblatt 5.2a

Gegenstände	Einer	Zahl/Anzahl	Aus wie vielen Einern besteht die Zahl?
	1 1 1 1 1 1	6	sechs

Visualisierung der Zahlzerlegung



Das Gesamte – entspricht der Gesamtmenge

Die Teile – entsprechen den Teilmengen

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

7.1a Überall Äpfel

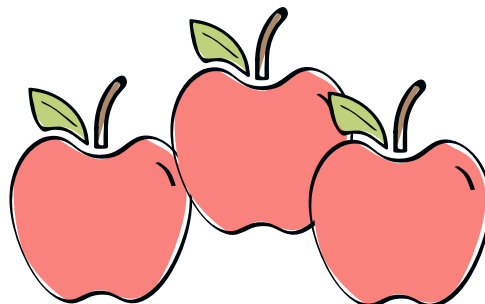
Auf einem Tisch steht eine Schüssel. Es liegen sowohl Äpfel in der Schüssel als auch daneben.

1. Beschreiben Sie mögliche Blickwinkel auf die jeweilige Situation.
2. Schreiben Sie passende Gleichungen auf: erst mit Zahlen, dann mit Mengen (TM für Teilmenge, GM für Gesamtmenge)

Situation	Blick auf...	Gleichung mit Zahlen	Gleichung mit TM/GM
	Gesamt-situation	$2 + 3 = 5$ oder $3 + 2 = 5$	$TM + TM = GM$
	Schüssel	$5 - 2 = 3$	$GM - TM = TM$
	Tisch	$0 + 2 = 2$	$TM + TM = GM$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

3. Was fällt Ihnen bei den Gleichungen zu den Skizzen auf?
Beschreiben Sie vorhandene Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

7.1b Teile und Ganzes – Reise nach Jerusalem

Skizzieren Sie die beschriebenen Situationen und ergänzen Sie zu den Texten eine oder mehrere passende Gleichungen.

Beschreibung der Situation		Skizzen & Gleichungen
1.	Fünf Personen befinden sich im Raum und drei weitere kommen herein. Wie viele Personen befinden sich nun insgesamt im Raum? Drei Personen befinden sich im Raum und fünf weitere kommen herein. Wie viele Personen befinden sich nun insgesamt im Raum? <i>Plus kann bedeuten, eine Menge zu einer anderen Menge hinzuzufügen, um so eine neue Gesamtmenge, bestehend aus den beiden vorherigen Mengen, zu erhalten.</i>	
2.	Auf der linken Seite befinden sich fünf Personen, auf der rechten Seite drei. Wie viele Personen befinden sich insgesamt im Raum? Auf der linken Seite befinden sich drei Personen, auf der rechten Seite fünf. Wie viele Personen befinden sich insgesamt im Raum? <i>Plus kann bedeuten, ich betrachte zwei voneinander getrennte Mengen und überlege, welche Mächtigkeit beide Mengen zusammen haben.</i>	

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Beschreibung der Situation		Skizzen & Gleichungen
3.	Acht Personen befinden sich im Raum. Dann gehen fünf Personen. Wie viele Personen bleiben zurück? Acht Personen befinden sich im Raum. Dann gehen drei. Wie viele Personen bleiben zurück? <i>Minus kann bedeuten, eine Teilmenge aus einer vorhandenen Gesamtmenge zu entnehmen. In diesem Fall bleibt eine zweite Teilmenge als Rest übrig.</i>	
4.	Im Raum befinden sich acht Personen. Davon sind fünf jünger als 25 Jahre. Wie viele Personen im Raum sind 25 Jahre oder älter? Im Raum befinden sich acht Personen. Davon sind drei jünger als 25 Jahre. Wie viele Personen im Raum sind 25 Jahre oder älter? <i>Minus kann bedeuten, ich betrachte eine Menge und frage, welche zweite Teilmenge sich ergibt, wenn ich nur eine bestimmte Teilmenge betrachte.</i>	

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Beschreibung der Situation		Skizzen & Gleichungen
5.	Im Raum befinden sich acht Personen und fünf Stühle. Wie viele Personen müssen den Raum verlassen, damit alle verbleibenden Personen einen Stuhl haben? Im Raum befinden sich acht Personen und drei Stühle. Wie viele Personen müssen den Raum verlassen, damit alle verbleibenden Personen einen Stuhl haben? <i>Minus kann bedeuten, ich betrachte eine Menge und frage: Welche Menge muss ich entnehmen, wenn eine bestimmte Menge übrig bleiben soll?</i>	
	6. Drei Personen haben während des Kurses den Raum verlassen, fünf sind noch im Raum. Wie viele Personen befanden sich zu Beginn insgesamt im Raum? Fünf Personen haben während des Kurses den Raum verlassen, drei sind noch im Raum. Wie viele Personen befanden sich zu Beginn insgesamt im Raum? <i>Minus kann interpretiert werden als Betrachtung zweier Teilmengen verbunden mit der Fragestellung, wie groß denn die Gesamtmenge war, von der ich die eine Teilmenge entnommen habe, sodass die andere Teilmenge als Rest übrig blieb.</i>	

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Beschreibung der Situation		Skizzen & Gleichungen
7.	Im Raum befinden sich acht Personen und fünf Stühle. Wie viele Personen sind es mehr als Stühle? Im Raum befinden sich acht Personen und drei Stühle. Wie viele Personen sind es mehr als Stühle? <i>Minus kann bedeuten, zwei Mengen miteinander zu vergleichen und zu fragen, um wie viele die eine größer ist als die andere.</i>	
8.	Im Raum befinden sich acht Personen und fünf Stühle. Wie viele Stühle sind es weniger als Personen? Im Raum befinden sich acht Personen und drei Stühle. Wie viele Stühle sind es weniger als Personen? <i>Minus kann auch bedeuten, zwei Mengen miteinander zu vergleichen und zu fragen, um wie viele die eine kleiner ist als die andere.</i>	

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

7.1c Teile und Ganzes – Kuchen am Sonntagnachmittag

1. Sie haben 10 Stücke Kuchen auf den weißen Teller gelegt, Ihre Schwester wollte ebenfalls Kuchen mitbringen. Dafür stellen Sie einen blauen Teller bereit. Ihre Schwester schreibt per SMS:

Sie erwarten 11 Gäste. Um entscheiden zu können, ob der Kuchen reicht, müssen Sie zunächst einmal wissen, wie viele Stücke es insgesamt sind.

(Wie viele Stücke die einzelnen Gäste essen, ist leider nicht berechenbar!)

Bringe 6 Stücke Kuchen mit, hoffe das reicht.

Kuss 🍷

10:32 ✓✓

- a) Skizzen, Antworten, Ideen, Rechnungen:

- b) Notieren Sie mögliche Gleichungen:

- c) Plus oder Minus? Welche Gleichung passt zum Text? Lässt sich die Lösung direkt aus der Gleichung berechnen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

2. Offensichtlich befinden sich auf dem weißen Teller mehr Kuchenstücke als auf dem blauen. Aber wie viele mehr?

a) Skizzieren, Antworten, Ideen, Rechnungen:

b) Notieren Sie mögliche Gleichungen:

c) Plus oder Minus? Welche Gleichung passt zum Text? Lässt sich die Lösung direkt aus der Gleichung berechnen?



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

3. Die ungleiche Verteilung auf den Kuchentellern gefällt Ihnen nicht. Vielleicht sollten Sie schnell beim Bäcker noch einige Stücke nachkaufen und dazulegen, damit auf beiden Tellern gleich viele Stücke liegen? Wie viele wären das?

a) Skizzen, Antworten, Ideen, Rechnungen:

b) Notieren Sie mögliche Gleichungen:

c) Plus oder Minus? Welche Gleichung passt zum Text? Lässt sich die Lösung direkt aus der Gleichung berechnen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4. Jedoch wäre es auch verlockend, die überzähligen Stücke einfach vom weißen Teller wegzunehmen und sie für den nächsten Tag aufzuheben (oder sie aufzuessen). Wie viele Stücke wären in diesem Fall wegzunehmen?

a) Skizzen, Antworten, Ideen, Rechnungen:

b) Notieren Sie mögliche Gleichungen:

c) Plus oder Minus? Welche Gleichung passt zum Text? Lässt sich die Lösung direkt aus der Gleichung berechnen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5. Ihr Bruder kommt mit einem leeren Teller in der Hand zu Ihnen und teilt Ihnen mit, dass seine Frau und seine Tochter heute leider nicht dabei sein können. Es sei doch sicher in Ordnung, wenn er drei Stücke Kuchen für die beiden einpacken würde. Ihr Neffe sieht seinen Onkel mit den drei Kuchenstücken verschwinden und blickt auf die restlichen 13 Stücke auf den Tellern. Er fragt sich, wie viele Kuchenstücke wohl ursprünglich da waren.

a) Skizzen, Antworten, Ideen, Rechnungen:

b) Notieren Sie mögliche Gleichungen:

c) Plus oder Minus? Welche Gleichung passt zum Text? Lässt sich die Lösung direkt aus der Gleichung berechnen?

Addition und Subtraktion können interpretiert werden als Beschreibung des Umgangs mit Mengen in unterschiedlichen Situationen. Hierbei ist es unerheblich, ob die Mengen real vorliegen oder nur in unserer Vorstellung existieren. Formulieren Sie Sachsituationen, Fragestellungen, Rechengeschichten, die aus Ihrer Sicht durch eine Addition oder Subtraktion beschrieben werden. Versuchen Sie außerdem eine passende Gleichung zu formulieren. Diskutieren Sie anschließend Ihre Ergebnisse in der Gruppe.

[illegible]

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

7.1e Textaufgaben zu Gleichungen mit einer Variablen

Bevor Sie mit der Berechnung der folgenden Aufgaben beginnen, überlegen Sie sich bitte, welche Mengenhandlung, Mengen- bzw. Größenbetrachtung hier bei jeder Aufgabe vorliegt. Notieren Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen.

1. Zeichnen Sie eine 8 cm lange Linie. Zeichnen Sie unmittelbar darunter eine zweite Linie mit einer Länge von 5 cm, z. B. mit einer anderen Farbe oder gestrichelt.

a) Formulieren Sie eine Frage.

b) Stellen Sie eine zur Frage passende Gleichung auf. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter (___, □, ...).

c) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

2. Ihre Aufgabe besteht darin, eine Stange aus blauen und roten Steckwürfeln zu bauen. Stecken Sie zunächst 9 rote Steckwürfel zusammen und ergänzen Sie die Stange mit einer Anzahl von den blauen Steckwürfeln so, dass insgesamt 12 Steckwürfel verbaut sind.

a) Zeichnen Sie eine Skizze.

b) Formulieren Sie eine Frage.

c) Stellen Sie eine zur Frage passende Gleichung auf. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter (__, □, ...).

d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

3. Gehen Sie 7 Schritte vor und dann 4 Schritte zurück.

a) Zeichnen Sie eine Skizze.

b) Formulieren Sie eine Frage.

c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter (__, □, ...).

d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4. In Ihr CD-Regal passen 44 CDs. Sie verfügen jedoch über 52 CDs.

a) Zeichnen Sie eine Skizze.

b) Formulieren Sie eine Frage.

c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter (__, □, ...).

d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

5. Sie haben im Möbelhaus ein großes und ein kleines Regal gekauft. Beide müssen noch zusammengebaut werden. Für das kleine veranschlagen Sie 2 Stunden, für das große 3 Stunden.

a) Zeichnen Sie eine Skizze.

b) Formulieren Sie eine Frage.

c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($__$, $\square$, $\dots$).

d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

6. In der Vereinskasse befinden sich heute noch 25,00€. Die Mitglieder haben gestern auf einem Ausflug 45,00€ ausgegeben.

a) Zeichnen Sie eine Skizze.

b) Formulieren Sie eine Frage.

c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($__$, $\square$, $\dots$).

d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

7. Für die Getränkeversorgung Ihres Teams sind diesmal Sie verantwortlich und haben zwei Kisten Mineralwasser, also 24 Flaschen gekauft. Natürlich haben Sie während des Spiels nicht darauf achten können, wie groß der Durst war, aber klar ist, dass eine Menge Flaschen nun leer ist. Nach dem Spiel befinden sich noch 7 ungeöffnete Flaschen in den Kästen.

a) Zeichnen Sie eine Skizze.

b) Formulieren Sie eine Frage.

c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($__$, $\square$, $\dots$).

d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

8. Zeichnen Sie zwei sich schneidende Geraden. Bezeichnen Sie die vier entstandenen Winkel, z. B. nacheinander mit α , β , γ , δ .
(Anmerkung: zwei benachbarte Winkel ergeben zusammen 180°)

a) Zeichnen Sie eine Skizze.

b) Formulieren Sie eine Frage.

c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($___$, $\square$, $\dots$).

d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

9. Rechengeschichten finden:

- Entwickeln Sie bitte zu weiteren Gleichungen eigene Rechengeschichten.
- Formulieren Sie eine oder mehrere Fragen zu jeder Geschichte und dann die Gleichungen zu den Fragen.
- Berechnen Sie anschließend die Lösung. Lassen Sie Ihrer Fantasie freien Lauf. Hauptsache ist, dass Sie Additions- und Subtraktionshandlungen finden.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

7.1a LÖSUNGEN – Überall Äpfel

Auf einem Tisch steht eine Schüssel. Es liegen sowohl Äpfel in der Schüssel als auch daneben.

1. Beschreiben Sie mögliche Blickwinkel auf die jeweilige Situation.
2. Schreiben Sie passende Gleichungen auf: erst mit Zahlen, dann mit Mengen (TM für Teilmenge, GM für Gesamtmenge)

Situation	Blick auf...	Gleichung mit Zahlen	Gleichung mit TM/GM
	Gesamt-situation	$2 + 3 = 5$ oder $3 + 2 = 5$	$TM + TM = GM$
	Schüssel	$5 - 2 = 3$	$GM - TM = TM$
	Tisch	$0 + 2 = 2$	$TM + TM = GM$
	Tisch	$5 - 3 = 2$	$GM - TM = TM$
	Schüssel	$0 + 3 = 3$	$TM + TM = GM$
	Tisch	$2 + 3 = 5$	$TM + TM = GM$
	Schüssel	$3 - 3 = 0$	$GM - TM = TM$
	Tisch	$2 - 2 = 0$	$GM - TM = TM$
	Schüssel	$3 + 2 = 5$	$TM + TM = GM$
	Tisch	$2 - 2 = 0$	$GM - TM = TM$
	Gesamtsit.	$5 - 2 = 3$	$GM - TM = TM$
	Schüssel	$3 - 3 = 0$	$GM - TM = TM$
	Gesamtsit.	$5 - 3 = 2$	$GM - TM = TM$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

3. Was fällt Ihnen bei den Gleichungen zu den Skizzen auf?
Beschreiben Sie vorhandene Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

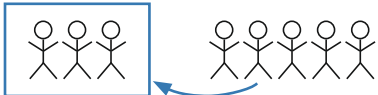
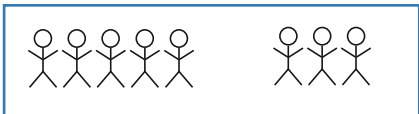
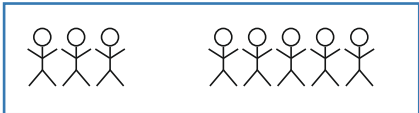
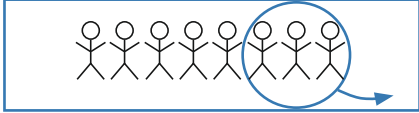
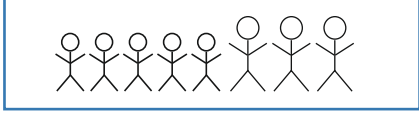
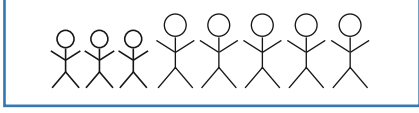
Antwort-Beispiel: In der dritten und letzten Skizze sind zwei Gleichungen identisch: in der 3. die Sicht auf den Tisch mit $5 - 3 = 2$, in der letzten die Sicht auf die Gesamtsituation ebenfalls mit $5 - 3 = 2$.

Mögliche Deutung der Situation: In der 3. Situation werden von 5 Äpfeln auf dem Tisch 3 Äpfel in die Schüssel gelegt, in der letzten Situation werden von 5 Äpfeln auf dem Bild 3 Äpfel z. B. verzehrt. Dieselbe Gleichung steht also für unterschiedliche Handlungen.

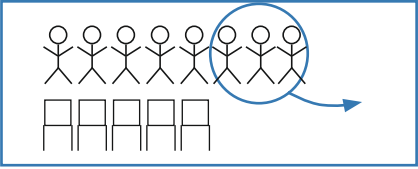
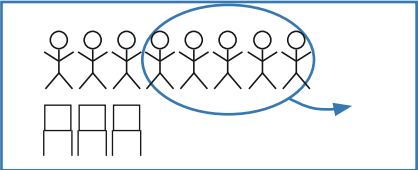
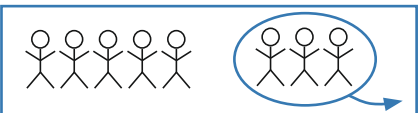
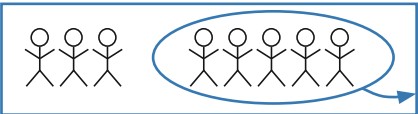
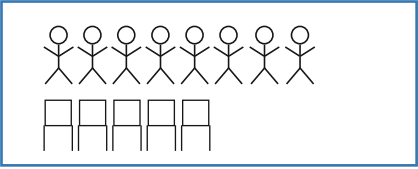
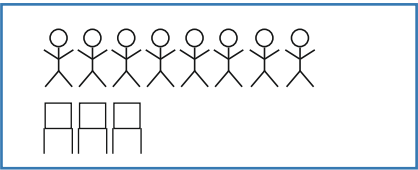
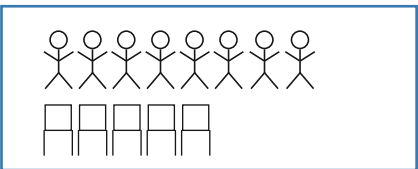
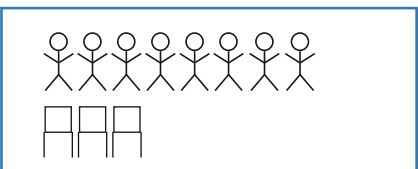
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

7.1b LÖSUNGEN – Teile und Ganzes – Reise nach Jerusalem

Skizzieren Sie die beschriebenen Situationen und ergänzen Sie zu den Texten eine oder mehrere passende Gleichungen.

Beschreibung der Situation		Skizzen & Gleichungen
1.	Fünf Personen befinden sich im Raum und drei weitere kommen herein. Wie viele Personen befinden sich nun insgesamt im Raum?	 $5 + 3 = 8$
	Drei Personen befinden sich im Raum und fünf weitere kommen herein. Wie viele Personen befinden sich nun insgesamt im Raum?	 $3 + 5 = 8$
2.	Auf der linken Seite befinden sich fünf Personen, auf der rechten Seite drei. Wie viele Personen befinden sich insgesamt im Raum?	 $5 + 3 = 8$
	Auf der linken Seite befinden sich drei Personen, auf der rechten Seite fünf. Wie viele Personen befinden sich insgesamt im Raum?	 $3 + 5 = 8$
3.	Acht Personen befinden sich im Raum. Dann gehen fünf Personen. Wie viele Personen bleiben zurück?	 $8 - 5 = 3$
	Acht Personen befinden sich im Raum. Dann gehen drei. Wie viele Personen bleiben zurück?	 $8 - 3 = 5$
4.	Im Raum befinden sich acht Personen. Davon sind fünf jünger als 25 Jahre. Wie viele Personen im Raum sind 25 Jahre oder älter?	 $8 - 5 = 3$
	Im Raum befinden sich acht Personen. Davon sind drei jünger als 25 Jahre. Wie viele Personen im Raum sind 25 Jahre oder älter?	 $8 - 3 = 5$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

	Beschreibung der Situation	Skizzen & Gleichungen
5.	Im Raum befinden sich acht Personen und fünf Stühle. Wie viele Personen müssen den Raum verlassen, damit alle verbleibenden Personen einen Stuhl haben?	 $8 - 5 = 3$
	Im Raum befinden sich acht Personen und drei Stühle. Wie viele Personen müssen den Raum verlassen, damit alle verbleibenden Personen einen Stuhl haben?	 $8 - 3 = 5$
6.	Drei Personen haben während des Kurses den Raum verlassen, fünf sind noch im Raum. Wie viele Personen befanden sich zu Beginn insgesamt im Raum?	 $3 + 5 = 8$
	Fünf Personen haben während des Kurses den Raum verlassen, drei sind noch im Raum. Wie viele Personen befanden sich zu Beginn insgesamt im Raum?	 $5 + 3 = 8$
7.	Im Raum befinden sich acht Personen und fünf Stühle. Wie viele Personen sind es mehr als Stühle?	 $8 - 5 = 3$
	Im Raum befinden sich acht Personen und drei Stühle. Wie viele Personen sind es mehr als Stühle?	 $8 - 3 = 5$
8.	Im Raum befinden sich acht Personen und fünf Stühle. Wie viele Stühle sind es weniger als Personen?	 $8 - 5 = 3$
	Im Raum befinden sich acht Personen und drei Stühle. Wie viele Stühle sind es weniger als Personen?	 $8 - 3 = 5$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

7.1c LÖSUNGEN – Teile und Ganzes – Kuchen am Sonntagnachmittag

1. Sie haben 10 Stücke Kuchen auf den weißen Teller gelegt, Ihre Schwester wollte ebenfalls Kuchen mitbringen. Dafür stellen Sie einen blauen Teller bereit. Ihre Schwester schreibt per SMS:

Sie erwarten 11 Gäste. Um entscheiden zu können, ob der Kuchen reicht, müssen Sie zunächst einmal wissen, wie viele Stücke es insgesamt sind.

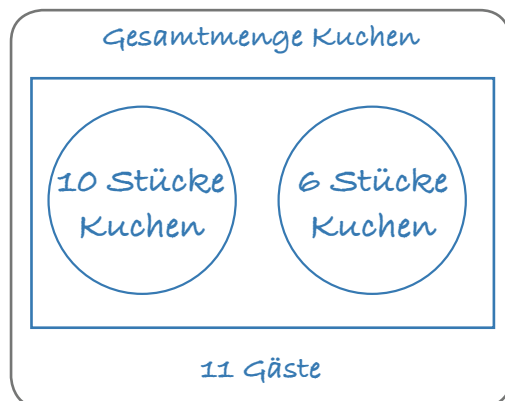
(Wie viele Stücke die einzelnen Gäste essen, ist leider nicht berechenbar!)

Bringe 6 Stücke Kuchen mit, hoffe das reicht.

Kuss 🍷

10:32 ✓✓

- a) Skizzen, Antworten, Ideen, Rechnungen:



Ich rechne die Zahlen auf beiden Tellern zusammen und wenn jeder Gast ein Stück Kuchen isst, werden die Stücke insgesamt reichen. Denn auf beiden Tellern zusammen liegen 16 Kuchenstücke:
 $10 + 6 = 16$.

- b) Notieren Sie mögliche Gleichungen:

$$10 + 6 = x$$

$$16 - 11 = x$$

$$6 + 10 = x$$

$$11 + x = 16$$

- c) Plus oder Minus? Welche Gleichung passt zum Text? Lässt sich die Lösung direkt aus der Gleichung berechnen?

$$10 + 6 = x$$

→ Ja, direkt berechenbar: $10 + 6 = 16$

$$6 + 10 = x$$

→ Ja, direkt berechenbar: $6 + 10 = 16$

$$16 - 11 = x$$

→ Ja, direkt berechenbar: $16 - 11 = 5$ Stücke bleiben übrig, wenn jede/r ein Stück isst.

$$11 + x = 16$$

→ Nein, nicht direkt berechenbar, Umkehrung: $16 - 11 = 5$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

2. Offensichtlich befinden sich auf dem weißen Teller mehr Kuchenstücke als auf dem blauen. Aber wie viele mehr?

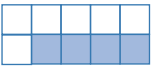
a) Skizzen, Antworten, Ideen, Rechnungen:

Mengenvergleich

10 

6  
  Unterschied

10 

6 
  Unterschied

Ich rechne 10 minus 6. Es sind vier Stücke mehr auf dem weißen Teller. $10 - 6 = 4$ oder 6 „ergänzt bis 10“ = 4, also $6 + \underline{\quad} = 10$

b) Notieren Sie mögliche Gleichungen:

$$10 - 6 = x \quad 10 - x = 6$$

$$6 + x = 10 \quad x + 6 = 10$$

c) Plus oder Minus? Welche Gleichung passt zum Text? Lässt sich die Lösung direkt aus der Gleichung berechnen?

$6 + x = 10 \rightarrow$ Nein, nicht direkt berechenbar.

Umkehraufgabe: $10 - 6 = x \rightarrow x = 4$

Oder mittels $10 - 6 = x$ als Bestimmung des Unterschieds

zwischen 10 und 6, dann auch direkt bestimmbar, $10 - 6 = 4$

3. Die ungleiche Verteilung auf den Kuchentellern gefällt Ihnen nicht. Vielleicht sollten Sie schnell beim Bäcker noch einige Stücke nachkaufen und dazulegen, damit auf beiden Tellern gleich viele Stücke liegen? Wie viele wären das?

a) Skizzen, Antworten, Ideen, Rechnungen:

Gleichheit herstellen

10 

6 
  Dazu kaufen

Genauso viele, wie auf dem blauen Teller weniger liegen. Ich rechne, wie viele von 6 bis 10 fehlen. Es sind vier Stück, die ich noch besorgen müsste, damit auf beiden Tellern gleich viele Kuchenstücke liegen. $10 - 6 = 4$ oder 6 „ergänzt bis 10“ = 4.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

b) Notieren Sie mögliche Gleichungen:

$$10 - 6 = x$$

$$10 - x = 6$$

$$6 + x = 10$$

$$x + 6 = 10$$

c) Plus oder Minus? Welche Gleichung passt zum Text? Lässt sich die Lösung direkt aus der Gleichung berechnen?

$$10 - x = 6 \text{ bzw. } 10 - \underline{\quad} = 6$$

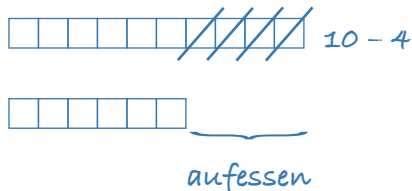
(nicht direkt lösbar, nur über: $10 - 6 = 4$) oder

$$6 + x = 10 \text{ bzw. } 6 + \underline{\quad} = 10$$

(nicht direkt lösbar, nur über Umkehrung: $10 - 6 = 4$)

4. Jedoch wäre es auch verlockend, die überzähligen Stücke einfach vom weißen Teller wegzunehmen und sie für den nächsten Tag aufzuheben (oder sie aufzuessen). Wie viele Stücke wären in diesem Fall wegzunehmen?

a) Skizzen, Antworten, Ideen, Rechnungen:



Genauso viele, wie auf dem weißen Teller mehr liegen. Ich rechne, wie viele ich vom weißen wegnehmen kann, bis nur noch 6 da liegen. Bis auf beiden Tellern gleich viele Kuchenstücke liegen, kann ich vier Kuchenstücke weg nehmen. $10 - 6 = 4$ oder 6 „ergänzt bis 10“ = 4 oder 10 „runtergerechnet bis 6“ sind 4.

b) Notieren Sie mögliche Gleichungen:

$$10 - 6 = x$$

$$10 - x = 6$$

$$6 + x = 10$$

$$x + 6 = 10$$

c) Plus oder Minus? Welche Gleichung passt zum Text? Lässt sich die Lösung direkt aus der Gleichung berechnen?

$$10 - x = 6 \text{ bzw. } 10 - \underline{\quad} = 6, \text{ nicht direkt bestimmbar,}$$

sondern via: $10 - 6 = 4$

$$6 + x = 10 \text{ bzw. } 6 + \underline{\quad} = 10, \text{ nicht direkt bestimmbar,}$$

sondern via: $10 - 6 = 4$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

5. Ihr Bruder kommt mit einem leeren Teller in der Hand zu Ihnen und teilt Ihnen mit, dass seine Frau und seine Tochter heute leider nicht dabei sein können. Es sei doch sicher in Ordnung, wenn er drei Stücke Kuchen für die beiden einpacken würde. Ihr Neffe sieht seinen Onkel mit den drei Kuchenstücken verschwinden und blickt auf die restlichen 13 Stücke auf den Tellern. Er fragt sich, wie viele Kuchenstücke wohl ursprünglich da waren.

- a) Skizzen, Antworten, Ideen, Rechnungen:

Er muss ausrechnen, wie viele Stücke da waren, bevor 3 weggenommen wurden. Da nun noch 13 da sind, muss er 3 und 13 addieren: $13 + 3 = 16$

- b) Notieren Sie mögliche Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} x - 3 = 13 & 13 + 3 = x \\ x - 13 = 3 & 3 + 13 = x \end{array}$$

- c) Plus oder Minus? Welche Gleichung passt zum Text? Lässt sich die Lösung direkt aus der Gleichung berechnen?

$x - 3 = 13$ bzw. $__ - 3 = 13$, nicht direkt bestimmbar, sondern durch Umkehrung: $13 + 3 = 16$ oder $3 + 13 = 16$ oder $13 + 3 = x$ bzw. $13 + 3 = __$, direkt bestimmbar.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

7.1d LÖSUNGEN – Teile und Ganzes – Rechnen im Alltag

Addition und Subtraktion können interpretiert werden als Beschreibung des Umgangs mit Mengen in unterschiedlichen Situationen. Hierbei ist es unerheblich, ob die Mengen real vorliegen oder nur in unserer Vorstellung existieren. Formulieren Sie Sachsituationen, Fragestellungen, Rechengeschichten, die aus Ihrer Sicht durch eine Addition oder Subtraktion beschrieben werden. Versuchen Sie außerdem eine passende Gleichung zu formulieren. Diskutieren Sie anschließend Ihre Ergebnisse in der Gruppe.

Addition

- Ich habe etwas, tue noch was dazu und habe dann entsprechend mehr.
- Ich kaufe mir ein Paar Schuhe, 12 Paar hatte ich schon, nun sind es 13 Paar: $12 + 1 = 13$.
- In meiner Klasse sind wir 23 Schüler/innen, in der Parallelklasse sind es 27. In beiden Klassen zusammen befinden sich 50 Schüler/innen: $23 + 27 = 50$.

Subtraktion

- Ich habe etwas, nehme davon etwas weg und behalte einen Rest.
- Vor dem Kauf meiner Schuhe hatte ich 100 € im Portemonnaie, die Schuhe haben 60 € gekostet, da bleiben mir nur noch 40 €. $100 € - 60 € = 40 €$
- Ich habe 8 Stifte, davon sind 5 blau. Die restlichen 3 sind rot: $8 - 5 = 3$.
- In meiner Klasse sind 4 Kinder weniger als in der Parallelklasse: $27 - 4 = 23$.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

7.1e LÖSUNGEN – Textaufgaben zu Gleichungen mit einer Variablen

Bevor Sie mit der Berechnung beginnen, überlegen Sie sich bitte, welche Mengenhandlung, Mengen- bzw. Größenbetrachtung hier bei jeder Aufgabe vorliegt. Notieren Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen.

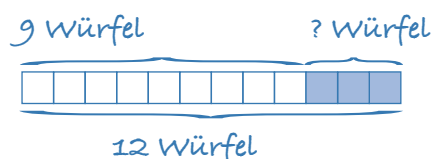
- Zeichnen Sie eine 8 cm lange Linie. Zeichnen Sie unmittelbar darunter eine zweite Linie mit einer Länge von 5 cm, z. B. mit einer anderen Farbe oder gestrichelt.



- Formulieren Sie eine Frage.
 - Wie groß ist der Unterschied zwischen den Linien?
 - Um wie viel ist die erste Linie länger als die farbige/gestrichelte?
 - Um wie viel ist die farbige/gestrichelte Linie kürzer als die erste Linie?
- Stellen Sie eine zur Frage passende Gleichung auf. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($\square$, $\square$, ...).
 - $8 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = \square \text{ cm}$ oder $\square \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$
 - $5 \text{ cm} + \square \text{ cm} = 8 \text{ cm}$
 - $8 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = \square \text{ cm}$
- Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?
 - Ja oder durch Umformung: $8 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

- Ihre Aufgabe besteht darin, eine Stange aus blauen und roten Steckwürfeln zu bauen. Stecken Sie zunächst 9 rote Steckwürfel zusammen und ergänzen Sie die Stange mit einer Anzahl von den blauen Steckwürfeln so, dass insgesamt 12 Steckwürfel verbaut sind.

- Zeichnen Sie eine Skizze.



- Formulieren Sie eine Frage.
 - Wie viele blaue Steckwürfel werden benötigt? Wie viele Würfel kommen dazu?
 - Wie groß ist der Unterschied zwischen der Gesamtmenge an Würfeln und den roten Würfeln?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

- c) Stellen Sie eine zur Frage passende Gleichung auf. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($\square$, $\square$, ...).

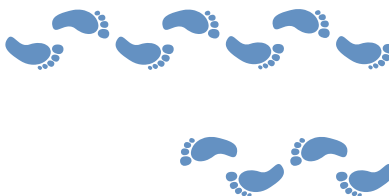
• $9 + \square = 12$ $12 - 9 = \square$ $9 + \square = 12$

- d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

- *Nein: $9 + \square = 12$ muss umgeformt werden: $12 - 9 = \square$*
 • *Ja: $12 - 9 = 3$*

3. Gehen Sie 7 Schritte vor und dann 4 Schritte zurück.

- a) Zeichnen Sie eine Skizze.



- b) Formulieren Sie eine Frage.

- *Wie viele Schritte haben Sie sich von Ihrem Ausgangspunkt entfernt?*
 • *Wie groß ist der Unterschied?*

- c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($\square$, $\square$, ...).

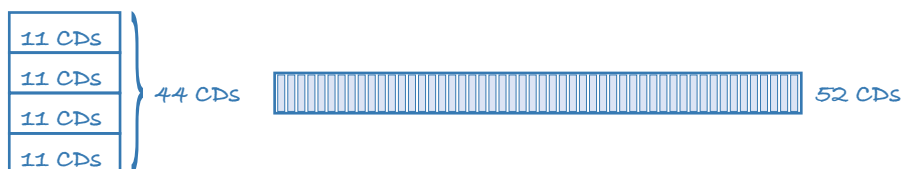
• $0 + 7 - 4 = \square$ $7 - 4 = \square$

- d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

- *Ja: $0 + 7 - 4 = \square$ ist identisch mit $7 - 4 = 3$*
 • *Ja: $7 - 4 = 3$*

4. In Ihr CD-Regal passen 44 CDs. Sie verfügen jedoch über 52 CDs.

- a) Zeichnen Sie eine Skizze.



- b) Formulieren Sie eine Frage.

- *Wie viele CDs passen nicht in das Regal?*
 • *Wie groß ist der Unterschied?*

- c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($\square$, $\square$, ...).

• $52 - 44 = \square$ $44 + \square = 52$.

- d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

• *Ja: $52 - 44 = 8$*

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

5. Sie haben im Möbelhaus ein großes und ein kleines Regal gekauft. Beide müssen noch zusammengebaut werden. Für das kleine veranschlagen Sie 2 Stunden, für das große 3 Stunden.

a) Zeichnen Sie eine Skizze.



b) Formulieren Sie eine Frage.

- Für welches Regal braucht man mehr Zeit?
- Wie lange dauert es, bis beide Regale fertig sind?
- Es ist jetzt 15:00 Uhr, um 20:00 Uhr fängt der Kinofilm an – schafft man den Zusammenbau beider Regale vorher?

c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($\square$, ...).

- $3 \text{ h} > 2 \text{ h}$, für das größere Regal braucht man mehr Zeit:
 $3 \text{ h} - 2 \text{ h} = 1 \text{ h}$
- $2 \text{ h} + 3 \text{ h} = \square \text{ h} \rightarrow 5 \text{ h}$
- Wohl kaum, da es von 15:00 Uhr bis 20:00 Uhr noch 5 Stunden sind und man noch zum Kino gehen/fahren muss. Zudem braucht man wahrscheinlich noch Zeit, um etwas zu essen und sich frisch zu machen und umzuziehen.

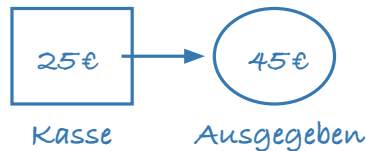
d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

- Die Ungleichung $3 \text{ h} > 2 \text{ h}$ genügt zur Beantwortung der Frage. Zur Ermittlung der Differenz beider Zeiten ermittelt man die Differenz via $3 \text{ h} - 2 \text{ h} = 1 \text{ h}$
- Ja: $2 \text{ h} + 3 \text{ h} = 5 \text{ h}$
- Nein: Zunächst ist zu berechnen, wie viel Zeit es noch ist bis zum Kino: $15:00 \text{ Uhr} + \square \text{ h} = 20:00 \text{ Uhr}$, da es sich hier um volle Stunden handelt, kann man durch Umformung zu $20 - 15 = 5$ ermitteln, dass es noch 5 Stunden sind.
Da auch der Regalbau 5 Stunden dauern wird, ist es nicht möglich, pünktlich zum Filmbeginn im Kino zu sein – es sei denn, man verzichtet auf den Werbeblock und fährt später ins Kino.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

6. In der Vereinskasse befinden sich heute noch 25,00€. Die Mitglieder haben gestern auf einem Ausflug 45,00€ ausgegeben.

a) Zeichnen Sie eine Skizze.



b) Formulieren Sie eine Frage.

- Wie groß ist der Unterschied zwischen dem vorhandenen Betrag und dem ausgegebenen Betrag?
- Wie viel Geld war vorher in der Kasse?
- Können die Mitglieder denselben Ausflug nochmal machen?

c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter (__, □, ...).

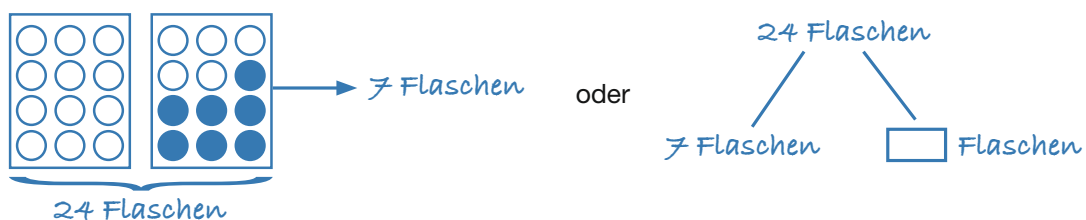
- $45,00\text{€} - 25,00\text{€} = \square\text{€}$
- $\square\text{€} - 45,00\text{€} = 25,00\text{€}$ oder $25,00\text{€} + 45,00\text{€} = \square\text{€}$
- $25,00\text{€} = 45,00\text{€}?$

d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

- Ja: $45,00\text{€} - 25,00\text{€} = 20,00\text{€}$
- $\square\text{€} - 45,00\text{€} = 25,00\text{€}$ ist umzuformen in $25,00\text{€} + 45,00\text{€} = 70,00\text{€}$
- Da $25,00\text{€} < 45,00\text{€}$ kann kein weiterer Ausflug gemacht werden.

7. Für die Getränkeversorgung Ihres Teams sind diesmal Sie verantwortlich und haben zwei Kisten Mineralwasser, also 24 Flaschen gekauft. Natürlich haben Sie während des Spiels nicht darauf achten können, wie groß der Durst war, aber klar ist, dass eine Menge Flaschen nun leer ist. Nach dem Spiel befinden sich noch 7 ungeöffnete Flaschen in den Kästen.

a) Zeichnen Sie eine Skizze.



b) Formulieren Sie eine Frage.

- Wie groß ist der Unterschied zwischen den leeren und den vollen Flaschen?
- Wie viele Flaschen sind leer?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($\square$, $\square$, ...).

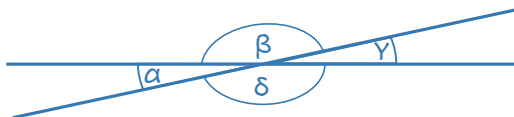
• $24 \text{ Flaschen} - 7 \text{ Flaschen} = \square \text{ Flaschen}$

d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

• Ja $\rightarrow 24 \text{ Flaschen} - 7 \text{ Flaschen} = 17 \text{ Flaschen}$

8. Zeichnen Sie zwei sich schneidende Geraden. Bezeichnen Sie die vier entstandenen Winkel, z. B. nacheinander mit α , β , γ , δ .
(Anmerkung: zwei benachbarte Winkel ergeben zusammen 180°)

a) Zeichnen Sie eine Skizze.



b) Formulieren Sie eine Frage.

- Wie groß sind die vier Winkel jeweils?
- Wie groß ist der Unterschied zwischen dem Winkel α und dem Winkel β ?
- Wie groß sind die Winkel α und γ zusammen?

c) Notieren Sie eine zur Frage passende Gleichung. Schreiben Sie für die gesuchte Größe einen Platzhalter ($\square$, $\square$, ...).

- $180^\circ - \alpha = \beta$ und/oder $180^\circ - \gamma = \delta$
- $\beta - \alpha = \square$
- $\alpha + \gamma = \square$

d) Lässt sich aus Ihrer notierten Gleichung die Lösung direkt berechnen?

- Nein. Zunächst weiß man, dass $\alpha + \beta = 180^\circ$. Einen der beiden Winkel muss man nun ausmessen, hier $\alpha = 20^\circ \rightarrow 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$.
Da $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ gilt: $\alpha = \gamma = 20^\circ$ und $\beta = \delta = 160^\circ$.
Prüfung des Ergebnisses: alle vier Winkel müssen zusammen 360° ergeben:
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 20^\circ + 160^\circ + 20^\circ + 160^\circ = 360^\circ$.
- Nein, man muss zunächst den Winkel β berechnen: $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$, dann lässt sich der Unterschied bestimmen: $160^\circ - 20^\circ = 140^\circ$
- $\alpha = \gamma = 20^\circ$, daher: $\alpha + \gamma = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9. Rechengeschichten finden:

- Entwickeln Sie bitte zu weiteren Gleichungen eigene Rechengeschichten.
- Formulieren Sie eine oder mehrere Fragen zu der Geschichte und dann die Gleichungen zu den Fragen.
- Berechnen Sie anschließend die Lösung. Lassen Sie Ihrer Fantasie freien Lauf. Hauptsache ist, dass Sie Additions- und Subtraktionshandlungen finden.

• $16 - 9 = x$

Beispiel-Geschichte:

Von 16 Urlaubstagen sind 9 Tage bereits vergangen.

Fragen:

Wie viele Tage bleiben noch?

Wie groß ist der Unterschied zwischen den vergangenen und den verbleibenden Tagen?

Lösungen:

$16 - 9 = 7$ $9 - 7 = 2$

• $12 + x = 18$

Beispiel-Geschichte:

Es stehen 12 Stücke Kuchen auf dem Tisch, eine Freundin bringt noch welche mit, dann sind es zusammen 18 Stücke.

Fragen:

Wie viele Kuchenstücke kommen dazu?

Wie groß ist der Unterschied zwischen den vorhandenen und den mitgebrachten Stücken?

Lösungen:

$18 - 12 = 6$ $12 - 6 = 6$

• $x - 8 = 6$

Beispiel-Geschichte:

Von den Saftflaschen wurden 8 ausgetrunken, 6 sind noch voll.

Fragen:

Wie viele Saftflaschen waren es?

Wie groß ist der Unterschied zwischen den getrunkenen und den vollen Flaschen?

Lösungen:

$6 + 8 = 14$ $8 - 6 = 2$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

- $13 + 9 = x$

Beispiel-Geschichte:

An der Ampel stehen 13 Autos, 9 Autos kommen dazu.

Fragen:

Wie viele Autos sind es zusammen?

Wie groß ist der Unterschied zwischen den stehenden und den dazukommenden Autos?

Lösungen:

$$13 + 9 = 22$$

$$13 - 9 = 4$$

- $19 - x = 7$

Beispiel-Geschichte:

Von den 19 Party-Gästen sind schon einige gegangen, 7 Gäste sind noch da.

Fragen:

Wie viele Gäste sind schon gegangen?

Wie groß ist der Unterschied zwischen den gegangenen und den gebliebenen Gästen?

Lösungen:

$$19 - 7 = 12$$

$$12 - 7 = 5$$

Inhaltsverzeichnis

9 IMMER ZEHN – DAS BÜNDELUNGSPRINZIP (Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I	Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?	2
II	Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?	2
III	An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?	3
IV	Wo finden sich didaktische Erläuterungen?	3
V	Welche Materialien werden benötigt?	3
9.1	Strukturen, Bündel, Muster, Einheiten	4
9.1.1	Gruppenarbeit – Zehn Elemente bündeln	4
9.1.2	Aufgabenblatt und Kursgespräch – Bündeln in Zehner und in Siebener	8
9.1.3	Aufgabenblatt und Kursgespräch – Bündeln in Zehner und in Fünfer	12
9.1.4	Vortrag Kursleitung – Bündelung	17
9.2	Zehnerbündel im Stellenwertsystem	18
9.2.1	Spiel – Bündelung von Einern zu Zehnern und Hundertern	18
9.2.2	Kursgespräch – Einführung des Stellenwertsystems	20
9.2.3	Kursgespräch und Aufgabenblatt – Stellenwerte eintragen	27
9.3	Zahlen hören, sprechen und schreiben	29
9.3.1	Vortrag – Zehn Ziffern	29
9.3.2	Aufgaben – Zahlendiktate	35
9.3.3	Aufgabenblatt und Unterrichtsgespräch – Zahlenschreibweise	36
9.4	Zahlen visualisieren	38
9.4.1	Hausaufgabe – Zehnerbündel im Alltag	38
9.4.2	Aufgabenblatt und Kursgespräch – Darstellung von Zahlen	39
9.4.3	Gruppenarbeit und Kursgespräch – Anordnung von 100 Elementen	41
9.4.4	Aufgabenblatt und Kursgespräch – Hunderterfeld/Hundertertafel	47
9.4.5	Kursgespräch – Wie werden Längen eingeteilt?	49

9 IMMER ZEHN – DAS BÜNDELUNGSPRINZIP

(Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Der Zahlbereich wird von 10 auf 100 erweitert. Zunächst mit Mengenbetrachtungen. Um die Anzahl der Elemente größerer Mengen zu erfassen, hilft das *Bündeln* in Zehnereinheiten. Dieses Zusammenfassen von zehn Einern zu einem Zehner und das Zusammenfassen von zehn Zehnern zu einem Hunderter kann vielfältig visualisiert werden. Den Teilnehmer/-innen soll es dabei gelingen, die in den Darstellungen erkannte Ordnung und Struktur zu verallgemeinern und auf das Zahlssystem zu übertragen.

In den vorangegangenen Kapiteln wurde der Zahlbereich bis zehn als eine Einheit dargestellt.

Alle Zahlbeziehungen von eins bis zehn sind so grundlegend, dass sie sich auf größere Zahlen (Zahlbereiche) übertragen lassen. Die Einteilung der Unterrichtskonzepte in Zahlbereiche bis 10, bis 100, bis 1000 usw. ergibt sich einerseits aus Erfahrungen des mathematischen Unterrichtens, andererseits aus der Struktur des Dezimalsystems, das es hier zu erarbeiten und zu verstehen gilt.

Schwerpunkt dieses Kapitels ist es, eine weitere grundlegende Erkenntnis zu erarbeiten: Zehn Einer werden zu einer neuen Einheit zusammengefasst. Dabei von einem *Bündelungsprinzip* zu sprechen, trifft den Kern sehr gut, denn zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt. Das Wort *Bündeln* lässt die Schlussfolgerung zu, wie eng Mengenebene und Zahlenebene miteinander verknüpft sind. *Etwas zu bündeln*, assoziiert eine *Mengenhandlung*. Tatsächlich kann diese Bündelung zum Beispiel sehr gut auf den Umgang mit Geld übertragen werden – Geldbündel. Dennoch soll im Endeffekt das System Einer und Zehner *auf der Zahlenebene* verstanden werden.

Die Zehn ist die maßgebliche Bezugseinheit für das gesamte, heute gebräuchliche *dezimale Zahlssystem*. Zehn Einer werden zu einem Zehner zusammengefasst. Zehn Zehner werden zu einem Hunderter zusammengefasst. Zehn Hunderter zu einem Tausender usw. Entlang dieses Bündelungsprinzips ist das *Stellenwertsystem* aufgebaut. Die Bündel werden Stellen zugeordnet.

Es ist ein Ordnungsprinzip, das Zahlen strukturiert und aus dem die Werte der Zahlen ablesbar sind. Alle Zahlen im dekadischen Zahlssystem können mit nur zehn Ziffern notiert/konstruiert werden.

Für das Stellenwertsystem gilt: Wenn es zehn auf einer Stelle sind, dann wird eine neue Stelle besetzt. Diese Stelle wird links davor geschrieben. Beginnend mit Einern heißt das, wenn es zehn Einer sind, wird die Stelle links davor besetzt – die Zehnerstelle. Die Zahl ist zweistellig. Wenn es zehn Zehner sind, wird die Stelle links davor besetzt – die Hunderterstelle. Jetzt ist die Zahl dreistellig. Das Stellenwertsystem ist damit beliebig erweiterbar. Wenn eine Stelle nicht besetzt ist, wird dafür eine Null geschrieben.

Die Schreib- und Sprechweisen der Zahlen bis 100 weisen einige Unregelmäßigkeiten auf. Bedeutend ist die Erkenntnis, dass die Zehner und Einer in einer anderen Reihenfolge aufgeschrieben werden als das Zahlwort gesprochen wird: Für dreizehn wird 13 aufgeschrieben, für vierundsechzig wird 64 aufgeschrieben.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Das geniale Zahlssystem, basierend auf der Zehn, zu entwickeln, dauerte sehr, sehr lange. Jahrhunderte. Die Teilnehmer/-innen sollen jetzt das Dezimalsystem in all seiner Komplexität in Kürze erfassen und verstehen. Das ist eine große Herausforderung.

Die Zahlenschreibweise weicht von der Sprechweise ab. Das ist verwirrend und bereitet vielen Menschen im Umgang mit Zahlwörtern und mehrstelligen Zahlen Schwierigkeiten. Geschrieben wird zuerst der Zehner und danach der Einer – 32 (also drei zwei). Gesprochen wird zuerst der Einer und danach der Zehner – zweiunddreißig. Häufig lehnen Teilnehmer/-innen die Notation an die Sprechweise an und schreiben zunächst den Einer auf und danach den Zehner. Richtig ist es, den Zehner vor dem Einer zu schreiben. Die Verwirrung, die sich ergeben kann, manifestiert sich in sogenannten Zahlendrehern. Sechsendvierzig wird dabei möglicherweise als 64 notiert – die Sechs wird demnach zuerst gesprochen *und* geschrieben.

Manche Teilnehmer/-innen werden auch weiterhin Schwierigkeiten haben, in Mengenbetrachtungen und Zahlbetrachtungen zu differenzieren. Zahlbetrachtungen sind mentale Konstrukte, die sich einigen Teilnehmerinnen und Teilnehmern langsamer erschließen. Bezüge zu Mengen sind zunächst fassbarer. Zusammenhänge können mit Material oder Visualisierungen direkt und reproduzierbar belegt werden. In mentalen Konstrukten diese Reproduzierbarkeit und die Zahlbeziehungen zu erkennen, stellt eine große Herausforderung dar.

Einige Teilnehmer/-innen werden noch immer zählen. Zählende Lösungen von Rechenaufgaben sind nicht mehr angebracht, wenn verstanden wurde, welche Beziehungen Zahlen zueinander haben, wie Zahlen zu zerlegen sind und was es mit Rechenoperationen auf sich hat.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Voraussetzung, um sich den Zahlbereich bis 100 zu erschließen, sind Basiskonzepte über den Zahlbereich bis 10. An dieser Stelle haben die Teilnehmer/-innen Zahlen bereits als mentale Konstrukte verstanden und es ist ihnen möglich, Mengenbezüge immer wieder herzustellen.

Bekannt ist:

- Zahlen können in Einer zerlegt werden.
- Vorgänger und Nachfolger einer Zahl unterscheiden sich um genau eins von der Zahl.
- Die Einer können unterschiedlich zusammengefasst werden, sodass Zahlen in andere Zahlen zerlegt werden können.
- Immer einer mehr führt zu immer größeren Zahlen.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Gaidoschik, Michael (2015): Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. G&G Verlag, Wien. (8. Auflage) S. 162 ff.
Das Buch von Michael Gaidoschik ist bestens geeignet, um weitere didaktische Erläuterungen nachzulesen. (*Es wird wortidentisch vom Persen-Verlag, Buxtehude, unter dem Titel: „Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis“ vertrieben. Die Änderung von Titel und Cover erfolgte ohne Einwilligung des Autors.*)
- Kutzer, Reinhard (2001): Mathematik entdecken und verstehen. Band 2. Frankfurt am Main. S. 71 ff.
Reinhard Kutzer gibt viele Anregungen zum *Bündeln*.
- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
 - > Stufe 1 – Zahlbereich bis 30, S. 39 ff.
 - > Stufe 1 – Die Begriffe Zehner/Einer werden ab S. 40 eingeführt.
 - > Stufe 2 – Die Grundlagen für das Verständnis zweistelliger Zahlen werden ab S. 51 didaktisch erläutert.
 - > Stufe 2 – Speziell die Bündelung und die Stellenwerte, S. 52 ff.
 - > Stufe 2 – Die Benennung zweistelliger Zahlen, S. 55 f.www.grundbildung.de/unterricht

V Welche Materialien werden benötigt?

- Steckwürfel
- Holzwürfel, Zehnerstangen, Hunderterplatten – Mehrsystemblöcke, z. B. Dienes-Material
- Chips, Knöpfe o. Ä. – Gefäße zur Bündelung (kleine Dosen, Teller, Schachteln)
- Spielgeld
- Zehnerwürfel
- Metermaß mit Zentimetereinteilung
- Lineal mit Millimeter- und Zentimetereinteilung
- Uhr mit beweglichen Stunden- und Minutenzeigern

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Schlagwörter: Bündeln • Dezimalsystem • Gruppenarbeit • Kursgespräch • Mengen • Stellenwertsystem • Vortrag • Zahlen bis 100

9.1 Strukturen, Bündel, Muster, Einheiten

Exploration

Die Anzahl einer größeren Menge lässt sich leichter bestimmen, wenn Elemente *gebündelt* werden. Die Menge wird strukturiert. Damit werden Verzählfehler bei Anzahlbestimmungen minimiert. Wird jedes Element einzeln gezählt, kann der Prozess der Anzahlbestimmung sehr lange dauern. Die Zahlwortreihe wird innerlich aufgesagt. Jedes einzelne Element darf dabei nur einmal gezählt werden (meistens wird es angetippt). Je größer die Mengen werden, umso konzentrierter muss agiert werden. Verzählfehler sind nicht ausgeschlossen. Oft muss mehrfach gezählt werden. Werden jedoch die Elemente zu Zehnerbündeln zusammengefasst und damit geordnet, vereinfacht sich das Zählen immens (vgl. RC Rechnen, Stufe 1, S. 39 ff.).

9.1.1 Gruppenarbeit – Zehn Elemente bündeln

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Teilnehmer/-innen werden in Gruppen von je drei bis vier Personen eingeteilt. Im Raum werden Tische so aufgestellt, dass sich je eine Gruppe um einen Tisch platzieren kann. Auf manchen Tischen liegt eine große Menge Steckwürfel und auf den anderen Tischen liegt eine größere Menge Ein-Euro-Münzen (Spielgeld) – jeweils nicht mehr als 99.

Außerdem legt die Kursleitung zehn Zehn-Euro-Scheine bereit. Diese werden jedoch erst im zweiten Teil der Übung benötigt. Die Kursleitung erläutert die Aufgabe:

Bitte bestimmen Sie die genaue Anzahl der Elemente auf Ihrem Tisch. Wie viele sind es? Tauschen Sie sich in Ihrer Gruppe aus, welches die geschickteste Vorgehensweise ist. Sind Sie sicher, dass Sie sich nicht verzählt haben? Wenn ja, wie begründen Sie das?

Mögliche Herangehensweisen der Teilnehmer/-innen können sein:

- Ein Gruppenmitglied zählt jedes Element und schiebt dieses dabei etwas zur Seite. Damit wird ausgeschlossen, dass ein Element doppelt gezählt wird.
Möglicherweise prüft ein weiteres Gruppenmitglied, ob die ermittelte Zahl korrekt ist, und zählt erneut. Die Anzahl wird in der Regel korrekt bestimmt. Der Prozess des Zählens nimmt einige Zeit in Anspruch.
- Jedes Element wird durch Antippen gezählt. Häufig muss der Zählprozess neu gestartet werden, weil die Teilnehmer/-innen nicht sicher sind, welches Element bereits gezählt wurde. Möglicherweise liegt im Ergebnis ein Verzählfehler vor.
- Manche Zählungen werden durch die Frage unterbrochen: „Wo war ich gerade?“
Es ist eine hohe Konzentrationsleistung, einen vielschrittigen Zählprozess durchzuführen. Dabei sind die Teilnehmer/-innen häufig nicht sicher, ob das Ergebnis stimmt.
- Dem Team ist bereits der Bündelungsprozess vertraut und es bildet zum Beispiel Fünfer- oder Zehnergruppen. Diese werden anschließend zusammenfassend in Fünfer- oder Zehnerschritten gezählt und die übrig gebliebenen Einer weiterzählend ergänzt. Dieser Fall wird häufiger an dem Tisch mit Euro-Münzen eintreten. Das Eintauschen von zehn Ein-Euro-Stücken in Zehn-Euro-Scheine ist sicher einigen Teilnehmern und Teilnehmerinnen aus ihrem Alltag bekannt.

In einer losen Runde, am besten stehend um den jeweiligen Tisch, erläutern sich die Gruppen gegenseitig, wie sie vorgegangen sind, und stellen für sich fest, welche Vorgehensweisen geschickt und welche fehleranfällig sind.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Anmerkung:

Möglicherweise gibt es Teilnehmer/-innen, denen der Zählprozess bis 100 noch nicht vertraut ist. Die Kursleitung beobachtet unter diesem Aspekt vor allem die zurückhaltenden Teilnehmer/-innen. Für diesen Fall wird auf das Kapitel *Zahlen hören, sprechen und schreiben* verwiesen (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 2, Kapitel 9.3).

Falls keines der Teams die Anzahlbestimmung mithilfe von Zehnergruppen vorgeschlagen hat, regt die Kursleitung an, dass jeweils zehn Elemente zu einem Zehner zusammengefasst werden können, und bittet die Teilnehmer/-innen, es selbst zu probieren.

Variante 1: Es werden jeweils zehn Steckwürfel zu einer Zehnerstange gesteckt. Zum Beispiel liegen 54 Steckwürfel auf dem Tisch. Es wird ermittelt, wie viele Zehnerstangen gebündelt werden können: fünf Zehnerstangen. Anschließend wird in Zehnerschritten gezählt: zehn, zwanzig, dreißig, vierzig, fünfzig. Die übrig gebliebenen vier Einer werden dazugezählt: 51, 52, 53, 54. Vier Einer sind nicht ausreichend, um in einer Zehnerstange zusammengefasst zu werden. Die ermittelte Zahl wird mit dem Ergebnis der ersten Übung verglichen. Die Kursleitung fragt nach, welchem Ergebnis die Teilnehmer/-innen mehr trauen. In einer Tabelle an der Tafel wird die Anzahl der Steckwürfel folgendermaßen vermerkt:

Zehnerstangen – Steckwürfel	Übrige Einer
Zehner	Einer
5	4

Abbildung 9.1-1: Zehn Elemente bündeln – Variante 1

Variante 2: Die Kursleitung benötigt hierfür die bereitgelegten Zehn-Euro-Scheine. Es werden jeweils zehn Ein-Euro-Münzen in einen Zehn-Euro-Schein getauscht und wie oben verfahren. Beispielsweise liegen bei der Anzahl 75 sieben Zehn-Euro-Scheine und fünf Ein-Euro-Münzen auf dem Tisch. Die Kursleitung notiert an der Tafel:

Zehn-Euro-Scheine	Ein-Euro-Münzen
Zehner	Einer
7	5

Abbildung 9.1-2: Zehn Elemente bündeln – Variante 2

Die Kursleitung weist bei den Notationen darauf hin, dass bei Variante 1 fünf Zehnerstangen gesteckt/gebündelt wurden. Es wurden fünf *Zehner* gebündelt und notiert. Vier Einer konnten nicht zu einer Zehnerstange zusammengefasst werden und diese wurden deswegen als *Einer* notiert. Die Kursleitung hebt hervor, dass das Zusammenfassen (Zusammenstecken) der Einer zu Zehnern auch *als Bündeln von Einern zu Zehnern* bezeichnet wird.

In Variante 2 wurden sieben Zehn-Euro-Scheine und fünf einzelne Ein-Euro-Münzen ermittelt. Auch hier weist die Kursleitung darauf hin, dass Einer zu Zehnern *gebündelt* wurden.

Die Teams sollten für weitere, größere Mengen (maximal 99 Elemente) die Anzahlen bestimmen. Es eignen sich neben den Steckwürfeln, dem Spielgeld, dem Holzmaterial auch Chips, Stifte, Knöpfe usw. Außerordentlich wichtig ist es für die Teilnehmer/-innen, es tatsächlich zu tun — also selbst Einer zu Zehnern zu bündeln. Diese Handlungen am Material erhöhen die Chance, dass die Bündelung von Einern zu Zehnern langfristig verstanden wird.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Die Kursleitung variiert dafür das Material:

- Steckwürfel: Übungen mit Steckwürfeln haben den Vorteil, dass zehn einzelne Steckwürfel direkt zu einer Stange zusammengesteckt werden können. Sie haben allerdings auch den Nachteil, dass nicht auf einen Blick erkennbar ist, dass hier genau zehn Elemente gebündelt sind (und nicht etwa 8 oder 9 oder 11). Die Zehnheit muss also sprachlich gekennzeichnet werden.



Abbildung 9.1-3: Beispiel für Steckwürfel

- Sogenannte Mehrsystemblöcke oder Ein-Euro-Münzen/Zehn-Euro-Scheine: Bei den Mehrsystemblöcken können, ähnlich wie beim Geld, zehn Einer (Holzwürfel) in einen Zehner (Zehnerstange) *getauscht* werden. Auch hier ist es wichtig, den Tausch tatsächlich zu vollziehen, weil dieses *Tauschen* bei Stellenwertumwandlungen vollzogen wird – allerdings dann mental.

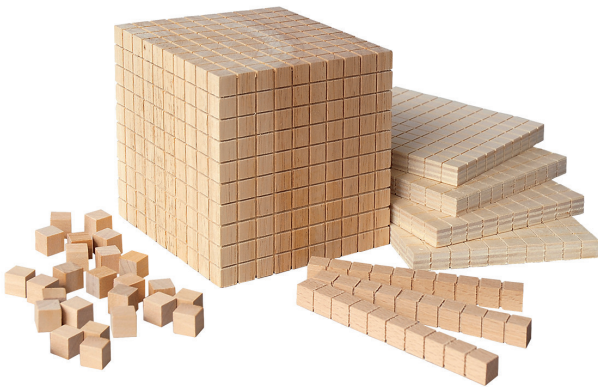


Abbildung 9.1-4: Beispiel für Mehrsystemblöcke



Abbildung 9.1-5: Beispiel für Spielgeld

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

- Material, das nicht gebündelt (zusammengesteckt) oder in Zehnerbündel (Zehnerstangen, Zehn-Euro-Scheine) getauscht werden kann, sollte in Gefäße gebündelt/geordnet werden, z. B. Knöpfe in kleinen Dosen o. Ä.

Möglicherweise fällt den Teilnehmern und Teilnehmerinnen bereits an dieser Stelle der Zusammenhang zwischen Zehnerbündelung und Zahlenschreibweise auf: Bei der Zahl 54 stehen die gebündelten Zehner an erster Stelle (links) und die ungebündelten Einer an zweiter Stelle (rechts).

Die Kursleitung beobachtet die Handlungen und den Austausch untereinander, vor allem um festzustellen, wer nicht aktiv ist und möglicherweise nicht bis 100 zählen kann.

Jeweils ein Teammitglied fasst die Ergebnisse am jeweiligen Tisch für alle mündlich zusammen.

Nachfragen der Kursleitung könnten sein:

*Wie viele Zehner haben Sie gebündelt? Wie viele Einer konnten Sie nicht bündeln?
Welche Anzahl ergibt das? Wie notieren Sie die ermittelten Zehner und Einer?*

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Um bei unstrukturierten Mengen die Anzahl der Elemente zu bestimmen, werden immer zehn Elemente zu einem Zehner zusammengefasst, oder anders gesagt: gebündelt.
- Danach kann zunächst in Zehnerschritten gezählt werden.
- Die ungebündelten Einer werden zählend ergänzt.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

9.1.2 Aufgabenblatt und Kursgespräch – Bündeln in Zehner und in Siebener

Exploration

Die bisher an greifbarem Material durchgeführten Bündelungen vollziehen die Teilnehmer/-innen in einem nächsten Abstraktionsschritt mit visualisierten Mengen.

Ziel der Bearbeitung des **Aufgabenblattes 9.1a** (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) ist es, herauszuarbeiten, dass mithilfe der Zehnerbündelung sofort auf die Anzahl geschlossen werden kann. Bei einer Siebenerbündelung ist es (entlang der gebräuchlichen Gewohnheit, Zahlen zu lesen) weitaus schwieriger, auf die Anzahl zu schließen. Werden gebündelte Zehner und ungebündelte Einer nebeneinander geschrieben, ergibt sich direkt die Zahl, die für die Anzahl steht. Aus der Zahl der Siebenerbündel kann nur durch Addition oder Multiplikation von sieben auf die Anzahl geschlossen werden.

Parallel verdeutlichen sich die Teilnehmer/-innen, dass in einem Bündel immer eine entsprechende Anzahl von Einern zusammengefasst wurde: Im Zehner sind zehn Einer enthalten. Im Siebener sind sieben Einer enthalten.

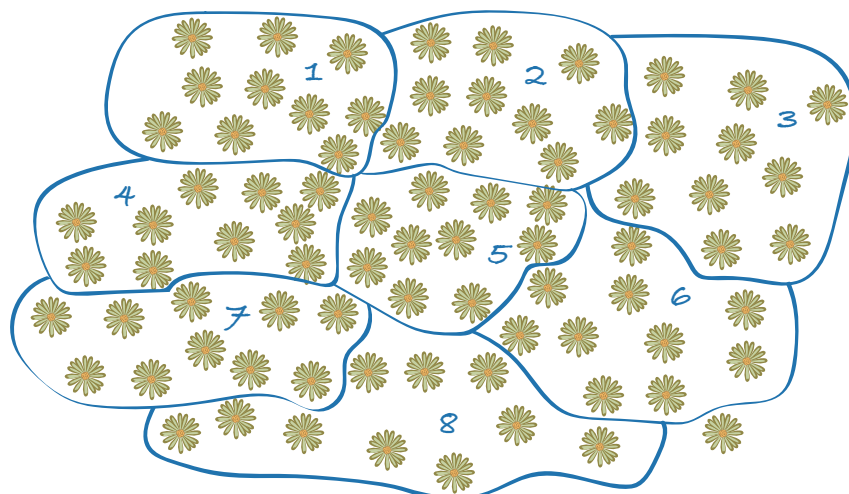
Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 9.1a

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer/-innen, das **Aufgabenblatt 9.1a** Bündelung (10er und 7er) zu bearbeiten. Eine identische Blütenmenge soll zweimal auf unterschiedliche Weise gebündelt werden. Dafür werden die entsprechenden Bündel mit einem Stift eingekreist. Zunächst werden Zehnerbündel mit einem Stift umrundet. Danach ermitteln die Teilnehmer/-innen die Anzahl der umrundeten Zehner und tragen diese in die entsprechende Spalte der Tabelle ein. Anschließend wird die Anzahl der nicht gebündelten Blüten in die Spalte der Einer eingetragen.

Auf der zweiten Seite des **Aufgabenblattes 9.1a** werden jeweils sieben Blüten gebündelt – diese Siebenerbündel sind mit einem Stift zu umkreisen. Die Anzahl der Siebenerbündel und die Anzahl der übrigen einzelnen Blüten werden in die Tabelle eingetragen. Nachdem alle Teilnehmer/-innen die Aufgaben umgesetzt haben, wird im Unterricht besprochen, was dabei aufgefallen ist.

Die Kursleitung präsentiert nachfolgend eine mögliche Lösung – Teil 1.



Anzahl	81
--------	----

Zehnersträube	Einzelne Blüten
Zehner	Einer
8	1

Abbildung 9.1-6: Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1a – Teil 1

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

AUFGABENBLATT 9.1a

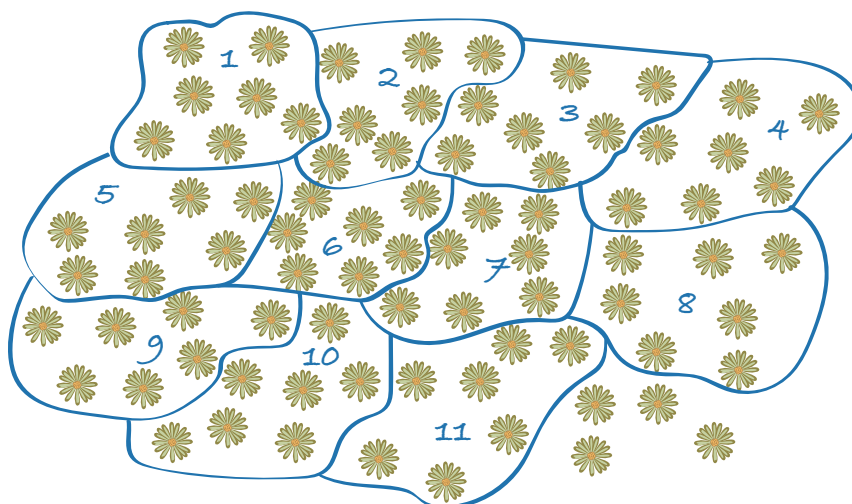
Die Kursleitung beschreibt, wie sie vorgegangen ist, um die zehn Blüten auf dem Aufgabenblatt zu umrunden:

Man kann z. B. immer fünf Blüten und weitere fünf Blüten mit den Augen erfassen und die beiden Fünfermengen mit dem Stift umkreisen. Es lassen sich ebenso vier, vier und zwei Blüten mit den Augen erfassen oder drei, drei, drei und eine Blüte. Denn die Zahl 10 kann in fünf und fünf (oder vier/vier/zwei oder drei/drei/drei/eins u. a.) zerlegt werden. Immer zehn abzuzählen, ist nicht so effektiv und fordert noch mehr Konzentration.

Die Kursleitung fragt nach, wie die Teilnehmer/-innen vorgegangen sind.

Beim Notieren der Anzahl in die vorgesehene Tabelle fällt auf, dass die Zehner (8) links aufgeschrieben werden und die ungebündelten Einer (1) rechts. Das stimmt direkt mit der Zahl 81 überein. Im Umkehrschluss heißt das, dass auf der linken Seite der Zahl gebündelte Zehner stehen (nämlich acht Zehner) und auf der rechten Seite ungebündelte Einer (nämlich ein Einer).

Im zweiten Teil des **Aufgabenblattes 9.1a** haben die Teilnehmer/-innen Siebenerbündel erzeugt. Dafür wurden immer sieben Blüten mit dem Stift umrundet.



Anzahl	81
--------	----

$$11 \cdot 7 = 77$$

Siebenersträuße	Einzelne Blüten
Siebener	Einer
11	4

Abbildung 9.1-7: Siebener-Bündelung Aufgabenblatt 9.1a – Teil 2

Auch hier fragt die Kursleitung, ob die Teilnehmer/-innen die Sieben in fünf und zwei zerlegt denken oder in vier und drei oder in anderen Zerlegungen. Anschließend beschreibt sie ihre Vorgehensweise bei der Lösung des Aufgabenblattes:

*Mit den Augen immer fünf und zwei Blüten (oder vier und drei Blüten) erfassen und dabei mit dem Stift umrunden.
Wie haben Sie die sieben Blüten gebündelt? Immer sieben Blüten einzeln gezählt?
Wenn es immer sieben sein sollen, welcher Weg wäre geschickt, um die Anzahl schnell zu bestimmen?*

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Erinnern Sie sich an die Zahlzerlegung der Sieben? Zum Beispiel sind in der Sieben die Fünf und die Zwei enthalten oder die Drei und die Vier. Beim Bündeln könnten Sie mit den Augen jeweils vier und drei Blüten erfassen und dabei mit dem Stift umrunden.

Wenn die Anzahl der Siebenerbündel und die ungebündelten Einer in die Tabelle eingetragen werden, ergibt sich 11 und 4. Die Kursleitung überprüft, welche Zahlen die Teilnehmer/-innen ermittelt haben. Was kann damit angefangen werden? Wie kann daraus auf die Anzahl geschlossen werden? Die Teilnehmer/-innen erkennen, dass der direkte Rückschluss auf die Anzahl, ausgehend von Siebenerbündeln, nicht ohne Weiteres möglich ist. Die Kursleitung überprüft die Ergebnisse, die die Teilnehmer/-innen erzielt haben.

Exkurs 1:

Wie kann aus Siebenerbündeln die Anzahl aller Blüten ermittelt werden?

Es liegen hier elf Bündel mit je sieben Elementen vor. Diese könnten auf zwei Wegen zusammengefasst werden: elfmal die Sieben addieren oder multiplizieren.

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 77$$

$$11 \cdot 7 = 77$$

Die restlichen vier Einer werden addiert: $77 + 4 = 81$

Beide Anzahlen stimmen überein. Interessanterweise wird die Anzahl bei einer Zehnerbündelung (wie im oberen Beispiel) auch durch Addition oder Multiplikation ermittelt. Indem zehn, zwanzig, dreißig, vierzig, fünfzig, sechzig, siebenzig, achtzig gezählt werden, wird eigentlich eine schrittweise Addition mit zehn vollzogen. $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$ oder $8 \cdot 10$ ergeben 80. Mit dem ungebündelten Einer sind es zusammen 81.

Exkurs 2:

Manche Teilnehmer/-innen konnten sich in ihren früheren Lernprozessen nicht die Struktur des Stellenwertsystems erschließen, weil ihnen nicht klar war, warum gerade immer zehn gebündelt werden. Ihnen hilft vielleicht die Erkenntnis, dass es eine Art historischer Zufall ist, dass ausgerechnet immer zehn Einheiten zu einer neuen Einheit gebündelt werden. Dies ist keineswegs notwendig: Im Siebenersystem könnten die elf Siebener auch erneut gebündelt werden: Es würden aus sieben Siebenern ein Sieben-Siebener gebündelt werden (analog würde der Hunderter *Zehner-Zehner* heißen). Es bleiben dann neben diesem einen *Sieben-Siebener* noch vier Siebener und die vier Einer. Die Zahl hieße dann im Siebener-System 144. Diese Zahl gibt ebenso die dargestellte Anzahl an wie die dezimale Zahl 81. Es ist eine reine Frage der Routine des Umgangs mit Zahlen, dass schneller eine ungefähre Vorstellung davon entwickelt werden kann, wie viele Mengenelemente mit der Zahl 81 gemeint sind. Hätte die Sozialisation im Siebenersystem stattgefunden, dann fiel es leicht, mit der Zahl 144 eine entsprechende Zahlvorstellung zu verbinden.

In der Geschichte gab es auch Zahlssysteme, die mit anderen Bezugswerten als Zehn gearbeitet haben. Die Zehn hat sich wahrscheinlich durchgesetzt, weil allen Menschen mit zehn Fingern ein gutes Hilfsmittel zum Rechnen im Zehnersystem zur Verfügung steht.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Die Bündelung von immer zehn Einern zu einem Zehner erleichtert die Anzahlbestimmung in größeren ungeordneten Mengen.
- Wird die ermittelte Zahl der Zehner links notiert und die Zahl der ungebündelten Einer rechts notiert, ergibt sich direkt die Zahl (Anzahl) der Elemente dieser ungeordneten Menge.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.1.3 Aufgabenblatt und Kursgespräch – Bündeln in Zehner und in Fünfer

Exploration

In bereits geordneten Mengen fällt die Bündelung leichter. Wenn eine Fünfer- oder Zehnermenge, zum Beispiel durch Umrunden mit einem Stift, ermittelt wird, kann optisch schnell auf die nächste Bündelungsmenge geschlossen werden, denn die Elemente sind wie ein Muster abgebildet. Auf das bereits vorliegende Muster kann das Bündelungsmuster übertragen werden. Dass Zehnerbündelungen gut geeignet sind, um Anzahlen größerer Mengen zu ermitteln, sollte den Teilnehmerinnen und Teilnehmern bereits mit der Bearbeitung des **Aufgabenblattes 9.1a** klargeworden sein. Jedoch musste dort jede Zehnermenge einzeln ermittelt werden. Aus diesem hier vorliegenden **Aufgabenblatt 9.1b** lässt sich deutlich die Verbindung zwischen Bündel, Ordnung, Einheit oder Muster erkennen. Wenn ein Zehner (Fünfer) umrundet ist, kann sofort der nächste Zehner (Fünfer) gesehen werden.

Hinzu kommt, dass die Teilnehmer/-innen verstehen sollen, dass zwei Fünferbündel zu einem Zehnerbündel zusammengefasst werden. Das heißt im Umkehrschluss bei 75, es liegen immer doppelt so viele Fünferbündel (14) wie Zehnerbündel (7) vor. Hier bei 75 sogar noch ein Fünferbündel mehr, da die verbliebenen Einer zwar zu einem Fünfer, jedoch noch nicht zu einem Zehner gebündelt werden können.

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 9.1b

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer/-innen, **Aufgabenblatt 9.1b Bündelung (10er und 5er)** (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) zu bearbeiten. Hier gilt es, die Anzahl der Stifte aus einer bereits geordneten Menge zu ermitteln.

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer/-innen, zunächst zu ermitteln, wie viele Stifte jeweils in einer Reihe liegen. Es sind 15.

Ist es hilfreich für Sie, dass Sie wissen, dass auf dem Aufgabenblatt fünf Reihen mit jeweils 15 Stiften abgebildet sind? Die Stifte sind geordnet. Es sieht wie ein Muster aus. Es wird Ihnen auf jeden Fall leichter fallen, hier die Zehnerbündelung durch Umkreisen mit einem Stift zu vollziehen. Aufgrund der geordneten Anordnung der Stifte sehen Sie sofort, wenn Sie einen Zehner umrandet haben, wo der nächste liegt, entsprechend auch bei den Fünfern.

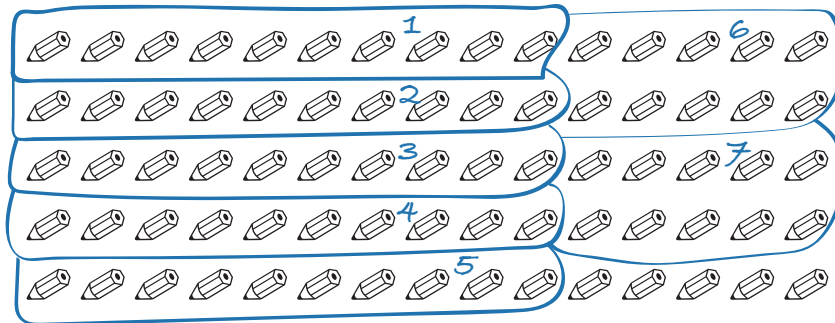
Die Kursleitung bittet die Teilnehmer/-innen, zunächst die Bündelung in Zehnerpakete und danach im zweiten Teil des Aufgabenblattes in Fünferpakete vorzunehmen und entsprechend die Zahlen in die Tabellen einzutragen. Es ist jeweils die gleiche Menge von Stiften abgebildet.

Bündeln Sie die Stifte zu Zehnerpaketen (Fünferpaketen), indem Sie immer zehn (fünf) Stifte markieren. Notieren Sie anschließend in der Tabelle, wie viele Zehnerpakete (Fünferpakete) Sie erhalten haben. Wie viele Stifte sind es? Tragen Sie die Anzahl ein.

Nachdem die Teilnehmer/-innen das **Aufgabenblatt 9.1b** bearbeitet haben, werden die Ergebnisse gemeinsam besprochen. Die Kursleitung stellt verschiedene Vorschläge für die Lösung zur Diskussion.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Zehner zu umrunden, ist auf unterschiedliche Weise möglich. Bei geordneten Mengen ist es einfacher zu bewerkstelligen als bei ungeordneten. Wenn ein Zehner ermittelt wurde, können sehr schnell weitere Zehner erkannt werden. Die geordnete Struktur macht das möglich.



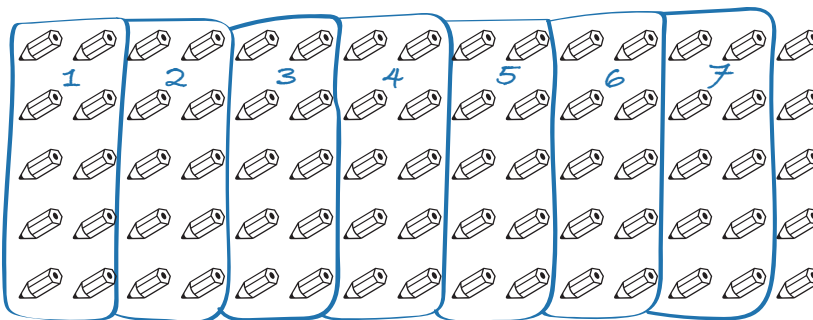
Anzahl	75
--------	----

Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer
7	5

Abbildung 9.1-8: Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 1

Zum Beispiel ist es leicht, zehn Einer in einer Reihe angeordnet zu erkennen. So lassen sich zunächst fünf Zehner untereinander umrunden. Die restlichen Stifte wurden zu jeweils fünf und fünf gebündelt. Es wurden insgesamt sieben Zehner und fünf Einer ermittelt. Das entspricht der Anzahl 75. Die Zehner links notiert, die Einer rechts notiert.

Die Kursleitung spricht an dieser Stelle bewusst von Zehnern und Einern – nicht mehr von Zehnerpaketen, Zehnerbündeln, ungebündelten Einern usw., denn Zehner und Einer sind bereits eingeführte Begriffe.



Anzahl	75
--------	----

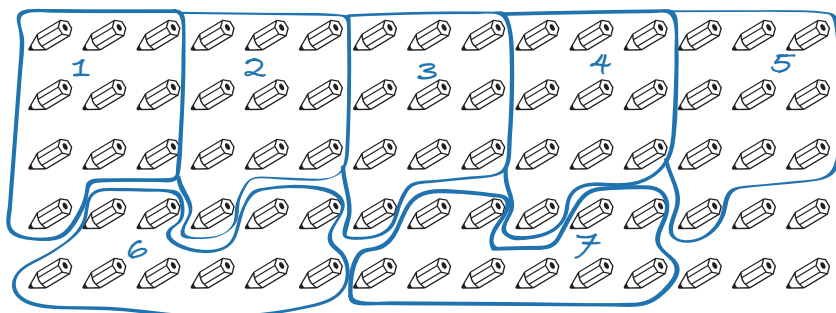
$$10 \cdot 7 = 70$$

Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer
7	5

Abbildung 9.1-9: Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 2

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

In der Abbildung ist eine weitere Version, Zehner zu bündeln, dargestellt. Jeweils zweimal fünf Einer sind ein Zehner. Insgesamt sind es auch hier sieben Zehner und fünf Einer.



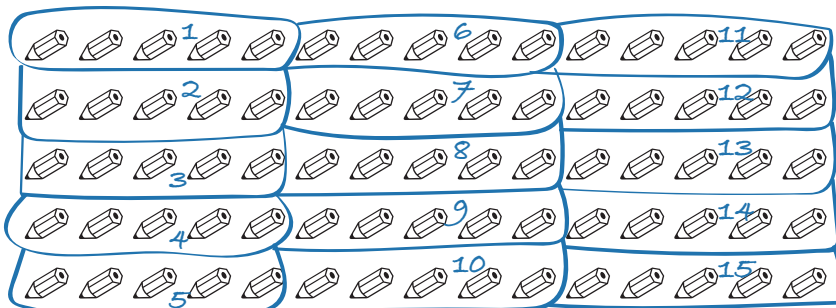
Anzahl	75
--------	----

Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer
7	5

Abbildung 9.1-10: Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 3

Auch drei, drei, drei und einen Einer zu einem Zehner zusammenzufassen, lässt ein Muster erkennen. Es wurden ebenfalls sieben Zehner und fünf Einer ermittelt.

Die Lösungen für den zweiten Teil des Aufgabenblattes zeigen ähnliche Muster. Da es im oberen und im unteren Teil des Aufgabenblattes die gleichen Mengen sind, müssen doppelt so viele Fünfer ermittelt werden. Denn in jedem Zehner sind zwei Fünfer enthalten. Drei verschiedene Möglichkeiten, Fünfer zu bündeln, sind in den nachfolgenden Abbildungen aufgezeigt.



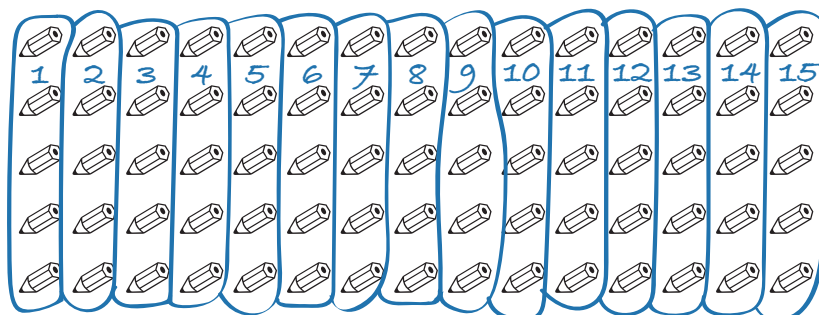
Anzahl	75
--------	----

Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünfer	Einer
15	/

Abbildung 9.1-11: Fünferbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 1

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

AUFGABENBLATT 9.1b

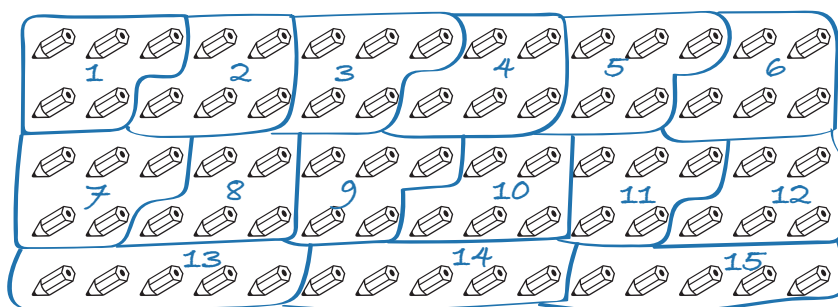


Anzahl	75
--------	----

$$15 \cdot 5 = 75$$

Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünfer	Einer
15	/

Abbildung 9.1-12: Fünferbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 2



Anzahl	75
--------	----

Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünfer	Einer
15	/

Abbildung 9.1-13: Fünferbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 3

Es wurden bei allen Versionen immer 15 Fünfer ermittelt.

- Daraus die Anzahl zu bestimmen, ist rechnerisch möglich über $15 \cdot 5 = 75$, das dürfte aber noch nicht von allen Teilnehmern und Teilnehmerinnen erkannt werden.
- Die Anzahl kann in Fünfer-Schritten zählend ermittelt werden: 5, 10, 15, 20, 25, ..., 75.
- Zwei Fünfer können jeweils zu einem Zehner zusammengefasst werden. Somit werden sieben Zehner ermittelt und fünf Einer bleiben ungebündelt: 75.

Werden zwei Fünfer zu einem Zehner zusammengefasst, wurde zwar formal eine Fünferbündelung vorgenommen, aber die Fünfer wurden im zweiten Schritt zu einem Zehner zusammengeführt.

Bei der Bestimmung der Anzahl großer Mengen ist die Bündelung von Fünfern im ersten Schritt möglicherweise einfacher. Danach werden jeweils zwei Fünfer zu einem Zehner zusammengefasst. Ob diese Methode oder die Methode, sofort Zehner zu bündeln, effektiver ist, sollte jede/jeder für sich entscheiden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Exkurs:

Die Kursleitung fragt nach anderen Vorschlägen, die Anzahl der Stifte auf dem **Aufgabenblatt 9.1b** zu bestimmen.

Zum Beispiel dieser: Da bereits ermittelt wurde, dass in einer Reihe 15 Stifte angeordnet sind und es fünf Reihen davon gibt, könnte addiert oder multipliziert werden. $15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 75$ oder $5 \cdot 15 = 75$. Wenn Teilnehmer/-innen bereits über dieses Wissen verfügen, gilt es, individuell festzustellen, mit welchen Lerninhalten diese Teilnehmer/-innen gefördert werden müssen. Sehr wahrscheinlich liegen keine besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen im Zahlbereich bis 100 vor.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

9.1.4 Vortrag Kursleitung – Bündelung

Exploration

Sie haben gelernt, wie Sie auf der Mengenebene jeweils zehn Elemente bündeln und wie Sie notieren, aus wie vielen Elementen eine größere Menge besteht – unerheblich, ob die Menge geordnet oder ungeordnet ist. Bündeln ist eine einfache Art und Weise, um große Anzahlen zu-erst übersichtlich zu strukturieren und dann zu notieren. Die Anzahl der Zehner wird links/vorne aufgeschrieben, die Anzahl der restlichen Einer rechts/hinten. Dass die Zehner vor¹ den Einern notiert werden, ist eine gesellschaftliche Übereinkunft. Die Bündel haben Sie in einer Zehner/Einer-Tabelle notiert.

Zehner	Einer

Diese Zehner/Einer-Tabelle werden wir in der nächsten Unterrichtssequenz erneut aufgreifen, um uns mit dem Stellenwertsystem zu befassen.

Wenn Sie dieses Wissen auf die Zahlenebene übertragen, bedeutet das, in Einern und Zehnern zu denken. In Zehnern sind zehn Einer zusammengefasst. **Damit wird eine neue Denk-Einheit geschaffen.**

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Auf der Mengenebene wurden verschieden große Einheiten gebündelt oder – anders ausgedrückt – zusammengefasst: Zehner, Siebener, Fünfer.
- Die Begriffe *Einheiten* oder *Bündel* können synonym verwendet werden.
- Besonders in geordneten Mengen sind Bündelungsmuster leicht zu erkennen.
- Das System, auf das bei Bündelungen zurückgegriffen wird, besteht darin, immer wieder eine bestimmte, gleich große Anzahl von Elementen zusammenzufassen. So oft es möglich ist: fünf Elemente zu einem Fünfer, zehn Elemente zu einem Zehner usw.
- Die Anzahl einer größeren Menge lässt sich bestimmen, indem das Zehner-Bündelungsprinzip angewandt wird.
- Es wurden erste Hinweise zum Stellenwertsystem gegeben: Zehner werden links notiert und Einer (ungebündelt) rechts. In Zehnern sind zehn Einer zusammengefasst.

¹ Vor im Sinne unserer Schreibrichtung von links nach rechts.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Schlagwörter: Bündeln • Dezimalsystem • Kursgespräch • Mengen • Spiel • Stellenwertsystem • Zahlen bis 100

9.2 Zehnerbündel im Stellenwertsystem

Exploration

Es wird das Stellenwertsystem eingeführt. Dafür ist zunächst eine Stellenwerttabelle hilfreich. Die Grundregel der Nutzung der Stellenwerttabelle lautet: Wenn es auf einer Stelle zehn oder mehr sind, wird eine neue Stelle besetzt bzw. der linke Stellenwert wird um eins oder mehr erhöht. Sind auf einer Stelle zum Beispiel zwanzig eingetragen, wird die linke Stelle um zwei erhöht usw. Ausgehend von Mengenbetrachtungen soll verallgemeinert und verstanden werden, wie das dekadische Zahlssystem aufgebaut ist.

Vorab haben die Teilnehmer/-innen einzelne Elemente zu Zehnerbündeln zusammengefasst. Ziel der vorangegangenen Kapitel im Zahlbereich bis 10 war, Zahlen kardinal zu verstehen. Hier gilt es nun, dieses Wissen auf größere Zahlen zu übertragen. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern soll es gelingen, Einer, Zehner, Hunderter usw. als Zahlen zu denken, aus denen weitere Zahlen aufgebaut sind. Die Stellenwerttabelle ist dabei ein Hilfsmittel. Aus der Position in der Stellenwerttabelle kann darauf geschlossen werden, ob es sich um Einer, Zehner oder Hunderter handelt. Die Zahl des jeweiligen Stellenwertes gibt an, wie viele Einer, Zehner oder Hunderter vorhanden sind.

Die Prinzipien der Notation sind: Immer wenn es zehn sind, wird eine neue Stelle gebildet oder es kann in eine neue Stelle umgewandelt werden. Rechts werden Einer notiert, links davon Zehner und links von den Zehnern Hunderter. Ist eine Stelle nicht besetzt, wird dafür eine Null notiert. Dieses Prinzip kann auf das gesamte dekadische Zahlssystem übertragen werden. Aus der Notation 147 lässt sich folglich ableiten, dass es sich um einen Hunderter, vier Zehner und sieben Einer handelt (vgl. RC Rechnen, Stufe 2, S.51 ff.).

9.2.1 Spiel – Bündelung von Einern zu Zehnern und Hundertern

Exploration

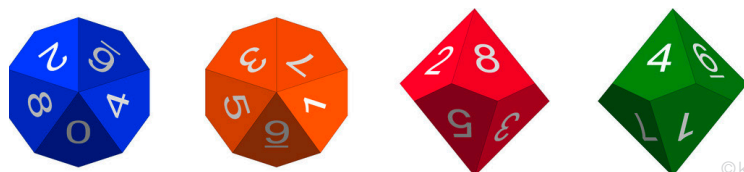
Im nachfolgenden Spiel verdeutlichen sich die Teilnehmer/-innen – indem sie es selbst tun – wie Schritt für Schritt ein Zehner nach dem anderen aus zehn Einern gebündelt wird, bis es schließlich zehn Zehner sind, die zu einem Hunderter gebündelt werden.

Diese Aufgabe dient dazu, ein Gefühl dafür zu bekommen, welche Mengenhandlungen mit den Bündelungen zum Zehner und zum Hunderter verbunden sind.

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 9.2 a

Die Teilnehmer/-innen finden sich in Zweiergruppen zusammen, um ein Spiel zu spielen. Jede Gruppe benötigt dafür einen Zehnerwürfel, zwei **Aufgabenblätter 9.2 a Stellenwerte** (Bearbeitungsdauer ca. 15 Minuten), 20 einzelne Holzwürfel sowie 20 Zehnerstangen und zwei Hunderterplatten. Ebenso geeignet ist strukturiertes Material mit Einern, Zehnern, Hundertern – zum Beispiel 20 Ein-Euro-Stücke, 20 Zehn-Euro-Scheine, zwei Hundert-Euro-Scheine.



©kpepin/Fotolia

Abbildung 9.2-1: Zehnerwürfel

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

AUFGABENBLATT 9.2 a

Die Kursleitung erläutert die Spielregeln.

Sie würfeln abwechselnd mit Ihrem Spielpartner/Ihrer Spielpartnerin. Vor Ihnen liegen das **Aufgabenblatt 9.2a**, das strukturierte Material und ein Zehnerwürfel. Der/Die Jüngste beginnt.

Sie würfeln eine Zahl mit dem Zehnerwürfel, z. B. eine Acht. Dafür nehmen Sie sich die entsprechende Anzahl (acht) Holzwürfel und legen diese in das Einerfeld. Danach würfelt der/die andere. Beim nächsten Mal würfeln Sie zum Beispiel eine Vier. Sie legen dafür vier Holzwürfel ab. Jetzt liegen zwölf Einer in Ihrem Einerfeld. Immer wenn zehn Einer erreicht werden, tauschen Sie diese gegen eine Zehnerstange. Die Zehnerstange wird in dem Zehnerfeld abgelegt. Jetzt liegen ein Zehner in Ihrem Zehnerfeld und zwei Einer in Ihrem Einerfeld. Fahren Sie fort, bis Sie zehn Zehner getauscht haben. Diese zehn Zehner tauschen Sie gegen eine Hunderterplatte ein und legen den Hunderter in das Hunderterfeld. Sieger/-in des Spiels ist derjenige/diejenige, der/die zuerst einen Hunderter ablegen konnte.

Die Kursleitung achtet während des Spiels darauf, dass die Teilnehmer/-innen reflektieren und möglichst auch aussprechen können, dass sie einen Bündelungsprozess von zehn Einern zu einem Zehner (bzw. von zehn Zehnern zu einem Hunderter) vollziehen. Eine Erweiterung des Spiels ist folgende:

Dieses Spiel kann auch umgekehrt gespielt werden. Sie entnehmen die jeweils gewürfelte Zahl. Sie beginnen mit einem Hunderter. Sie würfeln zum Beispiel eine Drei.

Zunächst muss der Hunderter entbündelt werden. Sie tauschen den Hunderter in zehn Zehner um. Im zweiten Schritt muss ein Zehner entbündelt werden. Sie tauschen einen Zehner in zehn Einer um. Die Zehner und Einer werden in die dafür vorgesehenen Felder abgelegt. Jetzt können die (drei) Einer entnommen werden. Vor Ihnen liegen jetzt neun Zehner und sieben Einer. Sie haben drei Einer entnommen. Fahren Sie mit dem abwechselnden Würfeln und der jeweiligen Entnahme der gewürfelten Zahl fort, bis keine Holzwürfel mehr vorhanden sind. Gewonnen hat derjenige/diejenige, der/die zuerst keine Holzwürfel mehr auf dem Spielfeld liegen hat.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.2.2 Kursgespräch – Einführung des Stellenwertsystems

Exploration

Die Kursleitung wertet mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern das Spiel aus der vorangegangenen Unterrichtssequenz mithilfe der nachfolgenden Beispielabbildungen aus.

Nachdem die Teilnehmer/-innen mit Holzwürfeln insgesamt 100 Einer zunächst schrittweise zu Zehnern und danach zehn Zehner zu einem Hunderter gebündelt haben, werden diese Handlungen visualisiert. Mithilfe der Visualisierung wird die Systematik des *Stellenwertsystems* erläutert. Das Stellenwertsystem wird als Begriff eingeführt. Die Teilnehmer/-innen verstehen: Wenn zehn Einer vorliegen, wird der neue Stellenwert des Zehners besetzt (links vom Stellenwert des Einers). Ebenso: Wenn zehn Zehner vorhanden sind, wird der nächste *Stellenwert des Hunderters* besetzt (links vom Stellenwert des Zehners).

Durchführung und didaktische Hinweise

In dem Würfelspiel wurde mit dem Zehnerwürfel zum Beispiel eine Acht gewürfelt. Dafür wurden acht Einer in das Einerfeld gelegt. Der entsprechende Spielplan (siehe [Aufgabenblatt 9.2a](#)) ist in den nachfolgenden Abbildungen dargestellt.

Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
		8

Abbildung 9.2-2: Mit dem Zehnerwürfel würfeln, dafür Einer ablegen – 8 Einer

Die Begriffe Zehner und Einer sind Ihnen vertraut. Um einen **Hunderter** zu erhalten, müssen zehn Zehner gebündelt werden. **Einer, Zehner, Hunderter** stehen auch für **Stellenwerte**. Die Zahlen bis zur Neun sind einstellig. Sie füllen eine Stelle aus. Wenn ein Zehner vorliegt, sind in diesem zehn Einer gebündelt. Die Zehn ist der erste Zehner. Die zweite Stelle wird ausgefüllt.

Die gesellschaftliche Konvention ist: Rechts stehen die Einer. Sind zehn Einer vorhanden, wird links davon eine **zweite Stelle** eingeführt. Sind insgesamt zehn Zehner vorhanden, wird links davon eine weitere **dritte Stelle** eingeführt. In der nächsten Runde wurde im Spiel zum Beispiel eine Vier gewürfelt und es kommen vier Einer dazu.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
		12

Abbildung 9.2-3: Vier Einer kommen dazu – 12 Einer

Jetzt sind es insgesamt zwölf Einer.
Davon werden zehn Einer in einen Zehner getauscht.

Exkurs:

An dieser Stelle könnte die Kursleitung mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern diskutieren und dabei ausprobieren, wie aus einer unstrukturierten Menge von Holzwürfeln zehn Holzwürfel als Struktureinheit erkannt (gesehen) werden können. Zum Beispiel: Zweimal fünf Holzwürfel oder fünfmal zwei Holzwürfel oder dreimal drei und ein Holzwürfel.

Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
	1	2

Abbildung 9.2-4: Zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt und getauscht – 1 Zehner, 2 Einer

Also sind es ein Zehner und zwei Einer. Entsprechend wird für die Zehnerstelle eine Eins notiert und für die Einerstelle eine Zwei. Die Zahl ist zweistellig. In die untere Zeile der Tabelle wird 1 für den Zehner und 2 für den Einer notiert.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Um sich das Stellenwertsystem zu verdeutlichen, geht es zunächst nicht um die korrekte Sprechweise der Zahl – hier Zwölf. Die Sprech- und Schreibweise wird in der nächsten Unterrichtssequenz analysiert. Sondern es geht darum, sich zu verdeutlichen, dass zuerst der Zehner aufgeschrieben wird – eins – und danach der Einer – zwei. Um die Stelle zu verdeutlichen, spricht die Kursleitung: zuerst ein Zehner und dann zwei Einer.

Wird jetzt eine Neun gewürfelt, sind es 11 Einer und 1 Zehner.

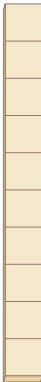
Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
	1	11

Abbildung 9.2-5: Neun Einer kommen dazu – 1 Zehner, 11 Einer

Es können wieder zehn Einer zu einem Zehner gebündelt werden, also die Holzwürfel in eine Zehnerstange getauscht werden.

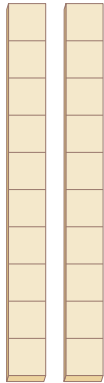
Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
	2	1

Abbildung 9.2-6: Zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt – 2 Zehner, 1 Einer

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Es kommt also ein Zehner dazu. Es sind jetzt zwei Zehner und ein Einer. Notiert wird 21 – zwei Zehner, ein Einer.

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer/-innen, welche Zahlen bei zwei Zehnern und einem Einer gewürfelt werden müssten, damit wieder ein neuer Zehner gebündelt werden kann.

Mögliche richtige Antworten wären:

- Eine Zehn. Dann wären es drei Zehner und ein Einer. Hier kann sofort eine Zehnerstange genommen werden.
- Eine Neun. Dann wären es drei Zehner und kein Einer.
- Eine Fünf und eine Sieben. Dann wären es zunächst sechs Einer, dann 13 Einer, davon zehn zu einem Zehner getauscht, sind es jetzt drei Zehner und drei Einer.
- Eine Acht und eine Sechs. Dann wären es insgesamt 15 Einer. Davon werden zehn zu einem Zehner getauscht, jetzt sind es drei Zehner und fünf Einer.
- Usw.

Die Kursleitung führt dieses Gedankenexperiment fort.

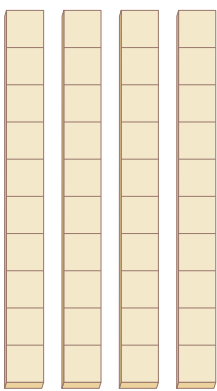
Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
	4	6

Abbildung 9.2-7: 4 Zehner und 6 Einer

In der Abbildung sind vier Zehner und sechs Einer dargestellt. Was passiert, wenn bei vier Zehnern und sechs Einern fünf Einer dazukommen?
Die richtige Antwort lautet: Es werden fünf Zehner und ein Einer.

Die Fragen und die Zahlen können variiert werden.

Zum Beispiel haben wir sieben Zehner und acht Einer. Wie viele fehlen, bis wieder ein neuer Zehner gebündelt werden kann?
Zwei Einer – notiert wird 80. Die Einerstelle ist nicht mehr besetzt, deswegen wird eine Null geschrieben.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Wir haben drei Zehner und fünf Einer. Was passiert, wenn neun Einer dazukommen? Damit sind es 14 Einer, daraus kann ein Zehner gebündelt werden und es bleiben vier Einer übrig. Jetzt sind es also insgesamt vier Zehner und vier Einer – notiert wird 44.

Die Kursleitung beschreibt:

Wenn es zehn Zehner sind, können diese in einen Hunderter eingetauscht werden. Denn in einem Hunderter sind zehn Zehner enthalten. Parallel zur Abbildung möchte ich Ihnen am Holzmaterial zeigen, dass zehn Zehnerstangen zu einer Hunderterplatte gebündelt werden können. Die Einkerbungen an der Hunderterplatte lassen die Zehnerstangen noch erkennen. Wird die Anzahl notiert, besetzt der Hunderter eine neue Stelle links vor der Zehnerstelle. Die Tabelle würde bei zehn Zehnern und drei Einern so aussehen:

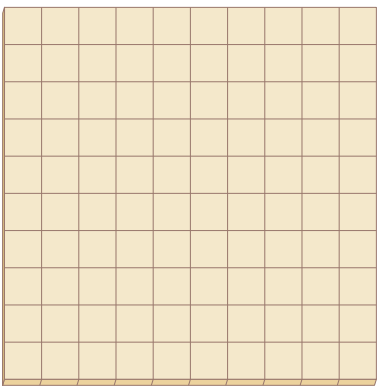
Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
1	0	3

Abbildung 9.2-8: Zehn Zehner werden zu einem Hunderter gebündelt – 1 Hunderter, 3 Einer

Das heißt, wenn zehn Zehner zu einem Hunderter gebündelt werden, wird eine dritte Stelle vor die beiden anderen geschrieben. Notiert 1, 0, 3 – eins null drei. Es sind jetzt ein Hunderter (1), kein Zehner (0) und drei Einer (3). Wenn eine Stelle nicht besetzt ist, wird dafür eine Null notiert.

Wir haben jetzt gesehen, dass im **Stellenwertsystem Werte** für Einer, Zehner und Hunderter notiert werden. Die jeweiligen Zahlen auf den Stellen stehen für bestimmte Werte. Wenn zum Beispiel auf der Zehnerstelle eine Drei steht, steht das für drei Zehner. Sobald auf einer Stelle der Wert Zehn erreicht wird, wird eine neue Stelle gebildet und links davor notiert. Die Bezeichnung Stellenwertsystem bezeichnet die systematische Besetzung der Stellen mit Zahlen bzw. umgekehrt kann daraus abgelesen werden, wie viele der jeweiligen Stellen vorhanden sind.

Rückschau

- Für das Stellenwertsystem gilt: Wenn es zehn auf einer Stelle sind, dann wird eine neue Stelle besetzt. Diese Stelle wird links davor geschrieben.
- Beginnend mit Einern heißt das, wenn es zehn Einer sind, wird die Stelle links davor besetzt. Das ist die Zehnerstelle. Die Zahl ist jetzt zweistellig.
- Wenn es zehn Zehner sind, wird die Stelle links davor besetzt – das ist die Hunderterstelle. Jetzt ist die Zahl dreistellig.
- Das Stellenwertsystem ist auf diese Weise beliebig erweiterbar.
- Wenn eine Stelle nicht besetzt ist, wird dafür eine Null geschrieben.

Die Kursleitung zeigt mit folgendem Bild, wie das *Stellenwertsystem* aufgebaut ist. Es ist beliebig erweiterbar. In die Tabelle, auch als *Stellenwerttabelle* bezeichnet, werden Zahlen eingetragen. Wie viele Einer, Zehner, Hunderter es jeweils sind, kann direkt aus den Tabellenspalten abgelesen werden. Üblicherweise werden Einer mit E abgekürzt. Für Zehner wird Z geschrieben und für Hunderter H. Der jeweilige Wert der Stelle, also die Anzahl der jeweiligen Bündelungen, kann so ermittelt werden.

[illegible]

Abbildung 9.2-9: Aufbau des Stellenwertsystems – Stellenwerttabelle

Die Kursleitung erläutert anhand der Abbildung die Stellenwerttabelle.

Nachfolgend möchte ich Ihnen die Systematik anhand von Beispielen in der Abbildung erläutern: Die Stellenwerte werden rechts beginnend eingetragen. Als erstes die Einer – im Beispiel in der ersten Zeile: neun Einer.

In der zweiten Zeile der Stellenwerttabelle ist eine Zahl dargestellt, die aus drei Einern und vier Zehnern besteht. Rechts stehen die Einer und links die Zehner:

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

In der dritten Zeile hat die Zahl keinen ungebündelten Einer, deswegen wird eine Null notiert, es sind fünf Zehner und ein Hunderter vorhanden. Die Zahl besteht, wenn sie wieder entbündelt wird, insgesamt aus 150 Einern.

Wenn wie in der vierten Zeile zehn Hunderter vorhanden sind, wird der Stellenwert umgewandelt. Denn bei zehn wird der nächste Stellenwert links besetzt – so wie in der fünften Zeile ausgeführt. Zehn Hunderter ergeben einen Eintausender, die anderen Stellen sind nicht besetzt, deswegen werden Nullen geschrieben, also 1000.

In der sechsten Zeile sind 27 Zehner notiert. Auch hier wird der Stellenwert umgewandelt: 20 Zehner werden in zwei Hunderter umgewandelt, 7 Zehner bleiben stehen und für die Einerstelle wird eine Null notiert.

Ausblick

Die Stellenwerttabelle kann beliebig nach links fortgesetzt werden. In der Stellenwerttabelle stehen bekannte Begriffe wie Tausend, Millionen, Milliarden, Billionen. Diese Stellenwerttabelle wird erneut in den Unterrichtssequenzen aufgegriffen, die sich mit großen Zahlen beschäftigen. Das System mit Einern/Zehnern/Hundertern wiederholt sich fortlaufend auch in den Zahlennamen:

Eintausend (Tausend gesprochen), **Zehntausend**, **Hunderttausend**.

Eine Million (Million gesprochen), **Zehnmillionen**, **Hundertmillionen**. Usw.

Die Stellenwerttabelle ist ein hilfreiches Konstrukt, um sich die Stellenwerte und deren Umwandlungen bewusst zu machen. Wozu dient die Stellenwerttabelle?

Das Stellenwertsystem ist die Basis unseres Dezimalsystems. Zur Verdeutlichung, zum Kennenlernen und zum Verstehen wird die Stellenwerttabelle benötigt. Ziel ist es, Zahlen **ohne** Stellenwerttabelle zu notieren, zu sprechen und deren Wert zu ermitteln.

Die Zahlennamen spielen in dieser Unterrichtssequenz zunächst keine Rolle. Es geht darum zu verstehen, wie die Zahlen aufgebaut sind. Immer wenn es zehn sind, wird eine neue Stelle links von der Stelle besetzt. Aus zehn Einern wird ein Zehner. Die Zehnerstelle wird besetzt und dafür eine Eins notiert. Es sind keine ungebündelten Einer mehr vorhanden. Deswegen wird auf der Einerstelle eine Null notiert. Wenn es zehn Zehner sind, wird die Hunderterstelle besetzt. Ist die Zehnerposition bereits besetzt und kommen zehn weitere Einer dazu, wird die Zehnerstelle um eins erhöht.

Im Umkehrschluss heißt das, dass in einem Zehner zehn Einer gebündelt wurden. Auch wenn auf der Position der Einer eine Null steht, also kein Einer (eigentlich: kein ungebündelter bzw. freier oder loser Einer) vorhanden ist, kann der Zehner wieder in zehn Einer entbündelt werden.

Die Kursleitung nimmt eine Zehnerstange und zeigt, dass darin zehn Einer enthalten sind.

In einem Hunderter sind zehn Zehner enthalten. Daraus folgt, dass in einem Hunderter hundert Einer enthalten sein müssen.

Die Kursleitung nimmt eine Hunderterplatte und zeigt, dass darin zehn Zehnerstangen und gleichzeitig auch hundert einzelne Würfel enthalten sind.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

9.2.3 Kursgespräch und Aufgabenblatt – Stellenwerte eintragen

Exploration

AUFGABENBLATT 9.2 b

Die Kursleitung bearbeitet gemeinsam mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern das **Aufgabenblatt 9.2b Stellenwerttabelle** (Bearbeitungsdauer ca. 15 Minuten).

Die Kursleitung erläutert die Aufgabe.

Tragen Sie die Hunderter (H), Zehner (Z) und Einer (E) in die Stellenwerttabelle ein. Achten Sie darauf, wenn es auf einer Stelle zehn sind, dass eine neue Stelle links daneben besetzt wird.

Die Kursleitung bespricht jede Aufgabe mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern. Sie achtet darauf, dass alle Teilnehmer/-innen zu Wort kommen, um Verständnisschwierigkeiten bei Einzelnen zu erkennen.

Aufgaben		Stellenwerte			Mögliche Antworten
		H	Z	E	
1.	3 Z und 14 E		4	4	Aus 14 Einern kann ein Zehner gebildet werden. Dieser wird zu den drei Zehnern dazugerechnet. Es werden vier Zehner und vier Einer eingetragen. Es sind vier Zehner und vier Einer.
2.	7 E und 4 Z		4	7	Die sieben Einer werden auf der Einerstelle eingetragen und die vier Zehner auf der Zehnerstelle.
3.	14 Z und 6 E	1	4	6	Die Stelle des Hunderters muss mit eins besetzt werden. Es verbleiben vier Zehner und sechs Einer.
4.	23 E		2	3	Es sind zwei auf der Zehnerstelle und drei auf der Einerstelle zu notieren.
5.	5 E und 7 Z		7	5	Einer und Zehner in die richtige Stelle eintragen.
6.	12 E und 4 Z		5	2	Einer und Zehner in die richtige Stelle eintragen sowie die Stelle des Zehners um eins erhöhen. Fünf Zehner und zwei Einer.
7.	4 Z		4	0	Für die Einerstelle wird null notiert.
8.	20 Z und 1 E	2	0	1	Es sind zwei Hunderter zu notieren, für die Zehnerstelle null und ein Einer.
9.	1 H und 7 E	1	0	7	Es ist kein Zehner vorhanden, deswegen null notieren.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

AUFGABENBLATT 9.2b

10.	2 H und 4 Z und 3 E	2	4	3	Direkt übertragen. Zwei Hunderter, vier Zehner und drei Einer.
11.	56 E		5	6	Es sind fünf auf der Zehnerstelle und sechs Einer zu notieren.
12.	20 Z und 20 E	2	2	0	Es sind zwei Hunderter und zwei Zehner. Für die Einerstelle null notieren.
13.	9 Z und 16 E	1	0	6	Die Zehnerstelle um eins erhöhen, damit sind es zehn, deswegen wird die Hunderterstelle besetzt und für die Zehnerstelle wird null notiert.
14.	134 E	1	3	4	Aus 134 Einern können 13 Zehner gebildet werden. Zehn Zehner bilden einen Hunderter. Es sind also ein Hunderter, drei Zehner und vier Einer.

Abbildung 9.2-10: Stellenwerte eintragen – Aufgabenblatt 9.2b – Mögliche Antworten und Rückschlüsse

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Das Dezimalsystem ist ein geordnetes System mit Stellenwerten. Die Ordnung basiert auf Bündelungen. Das Bündelungsprinzip lautet:
 - > Zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt.
 - > Zehn Zehner werden zu einem Hunderter gebündelt.
- Mithilfe von Bündelungen kann auf der Mengenebene leichter die Anzahl von größeren Mengen bestimmt werden. Dieses Zusammenfassen zu Zehnern und Hundertern ist auf die Zahlenebene übertragbar: Auch auf der Zahlenebene werden Einer zu Zehnern oder Zehner zu Hundertern zusammengefasst.
- Die Bündel können geordnet in eine Stellenwerttabelle, die zunächst als Hilfsmittel dient, eingetragen werden. Ein Grundprinzip des Stellenwertsystems besteht darin, die Bündel geordnet zu notieren. Es gibt rechts beginnend Einer-, Zehner- und Hunderterstellen. Aus der Belegung des Stellenwertes lässt sich ableiten, um wie viele Einer, Zehner oder/und Hunderter es sich handelt. Sind es zehn, dann wird die Stelle links daneben mit eins besetzt bzw. um eins erhöht. Gibt es keine Einer, Zehner oder Hunderter, dann wird auf der jeweiligen Stelle eine Null notiert.
- Einer sind einstellig, Zehner zweistellig und Hunderter dreistellig. Dieses Prinzip des Stellenwertsystems ist beliebig erweiterbar. Dabei ist die Zahl Zehn maßgeblich. Immer wenn es zehn sind, entsteht eine neue Stelle.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Schlagwörter: Dezimalsystem • Kursgespräch • Vortrag • Zahlenschreibweise • Zahlen bis 100

9.3 Zahlen hören, sprechen und schreiben

Exploration

Der Schreib- und Sprechweise von Zahlen ist nicht unbedingt direkt anzusehen bzw. anzuhören, wie die Zahl sich zusammensetzt. Es wird zwar dreizehn, vierzehn usw. gesagt, aber nicht einszehn und zweizehn, sondern elf und zwölf. Dem Wort zwanzig hört man nicht an, dass hier zwei Zehner vorliegen. Bei der Zahl einhundertdreiundzwanzig werden zuerst der Hunderter, dann die Einer und dann die Zehner benannt. Wird die Zahl notiert, werden hingegen zuerst der Hunderter, dann die Zehner und schließlich die Einer notiert. Viele Teilnehmer/-innen sind sicherlich auch wegen dieser sprachlichen Inkonsistenzen in ihrem Rechnenlernen gescheitert. Über die Analyse, wie Zahlen geschrieben und gesprochen werden, wird den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Zusammenhang des Zahlaufbaus zum Zahlssystem und zur Stellenwerttabelle bewusst. Faszinierend ist, dass das Zahlssystem mit nur zehn Ziffern auskommt (vgl. RC Rechnen, Stufe 2, S. 55 ff.).

9.3.1 Vortrag – Zehn Ziffern

Durchführung und didaktische Hinweise

Bereits in den vorangegangenen Kapiteln wurden mehrstellige Zahlen benannt und notiert. Zum Beispiel haben Sie gelernt, dass an einer Stelle im Stellenwertsystem höchstens neun aufgeschrieben werden. Bei zehn wird links von der Stelle eine neue Stelle ergänzt bzw. erhöht sich die linke Stelle um eins, während auf der betrachteten Stelle eine Null notiert wird.

Die Zehn ist zweistellig und wird mit zwei Zeichen (auch als Symbole bezeichnet) notiert – nämlich mit 1 und 0. So wird auch jede weitere zweistellige Zahl mit jeweils zwei Zeichen notiert. Entsprechend werden dreistellige Zahlen mit jeweils drei Zeichen notiert. **Zeichen** ist ein wichtiges Stichwort.

Die Ihnen im Zusammenhang mit Zahlen bekannten Zeichen sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Aus diesen zehn Zeichen wird unser gesamtes Zahlssystem entwickelt. Meinen wir die Zahl als Zeichen, sprechen wir von **Ziffern**.

Zahlen als Ziffern:

0	1	2	3
4	5	6	
7	8	9	

} ... es sind Zeichen

Abbildung 9.3-1: Zahlen als Ziffern

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Diese zehn Zeichen reichen aus, um alle Zahlen bis Einhundert und darüber hinaus zu notieren. Durch das geordnete Kombinieren der zehn Ziffern wurde eine faszinierende Symbolik für Zahlen entwickelt. Sie wird zunächst für die einstelligen Zahlen in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

Einstellige Zahlen		
Zahl	Bedeutung	Sprechweise
0	0 E	Null
1	1 E	Eins
2	2 E: 1 + 1	Zwei
3	3 E: 1 + 1 + 1	Drei
4	4 E: 1 + 1 + 1 + 1	Vier
5	5 E: 1 + 1 + 1 + 1 + 1	Fünf
6	6 E: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	Sechs
7	7 E: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	Sieben
8	8 E: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	Acht
9	9 E: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	Neun

Abbildung 9.3-2: Einstellige Zahlen

Die Kursleitung wiederholt (siehe Spalte Bedeutung), dass in einstelligen Zahlen nur Einer enthalten sind und dass die Einer wiederum zu Zahlen zusammengefügt werden können. Das heißt zum Beispiel, dass die Acht aus acht Einern besteht. Demzufolge sind in der Acht auch die Drei und die Fünf enthalten, da drei Einer die Drei bilden und fünf Einer die Fünf. Wiederholend könnten an dieser Stelle die Zahlzerlegungen bis zur Neun an der Tafel besprochen werden.

In der ersten Spalte der Tabelle sind die Zahlen von null bis neun mit den Ziffern 0 bis 9 notiert worden. Werden jetzt die Zahlen zweistellig, benötigen wir auch jeweils zwei Ziffern, um die Zahlen zu notieren. Tatsächlich werden alle größeren Zahlen durch systematische Kombination der zehn Ziffern notiert: zweistellige Zahlen aus zwei Ziffern, dreistellige Zahlen aus drei Ziffern usw.

Nachfolgend möchte ich Ihnen zeigen, wie zweistellige Zahlen geschrieben werden, wie sie gesprochen werden **müssten** und wie sie tatsächlich gesprochen werden.

Dabei bezeichnet **zig** den Zehner.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Zweistellige Zahlen				
Zahl	Bedeutung	Mögliche Sprechweisen ¹		Tatsächliche Sprechweise
10	1 Z und 0 E	eins-zig	Einszehn	zehn
20	2 Z und 0 E	zwei-zig	Zweizehn	zwan-zig
30	3 Z und 0 E	drei-zig	Dreizehn	drei-Big
40	4 Z und 0 E	vier-zig	Vierzehn	vier-zig
50	5 Z und 0 E	fünf-zig	Fünfzehn	fünf-zig
60	6 Z und 0 E	sechs-zig	Sechszehn	sech-zig
70	7 Z und 0 E	sieben-zig	Siebenzehn	sieb-zig
80	8 Z und 0 E	acht-zig	Achtzehn	acht-zig
90	9 Z und 0 E	neun-zig	Neunzehn	neun-zig

Abbildung 9.3-3: Schreib- und Sprechweise von zweistelligen Zahlen – Teil 1

Der Tabelle können Sie entnehmen, dass fünf Zehnerzahlen von der Regelsprechweise abweichen (markiert).

Die Kursleitung liest, wie in der Tabelle notiert, jeweils die einzelnen Zeilen vor. Zum Beispiel so:

Die Zahl **30** wird mit den Ziffern 3 und 0 notiert. Aus Stellenwerten abgeleitet wissen Sie, dass das bedeutet: Es sind drei Zehner und kein Einer. Deswegen wurde 3 für die Zehnerstelle und 0 für die Einerstelle notiert.

Wenn für die Zehn **zig** gesprochen wird, müsste die Zahl drei-zig (oder drei-zehn) gesprochen werden, denn die **zig** (oder zehn) ist dreimal vorhanden. Die tatsächliche Sprechweise (und Schreibweise des Zahlwortes) ist **dreißig**.

Sprechen:	Einer		Zehner
	sechs	und	vierzig
Schreiben:	Zehner		Einer
	4		6

Abbildung 9.3-4: Zahlen sprechen und schreiben – sechsundvierzig und 46

¹ Näheres vgl.: Wolfram Meyerhöfer: Zweizehneins, Zwanzigeins, Einundzwanzig. Skizze einer stellenwertlogisch konsistenten Konstruktion der Zahlwörter im Deutschen. Pädagogische Korrespondenz, Heft 52, 2-2015, S. 21–41.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Während beim Schreiben der Zahl zuerst der Zehner (links) und danach der Einer (rechts) notiert werden, ist es beim Sprechen genau umgekehrt. Wir sprechen zuerst den Einer und danach den Zehner. Beide werden mit dem Wort **und** verbunden. Diese Irritation führt manchmal zu Zahlendrehern. Das heißt, ich höre **sieben** und **fünfzig** und schreibe zuerst die Sieben und dann die Fünf, statt zuerst die Fünf und danach die Sieben: 57.

Die Kursleitung stellt weitere Beispiele an der Tafel vor. Dabei ist es wichtig, das Zahlwort betont zu sprechen, um damit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern zu verdeutlichen, dass zuerst der Einer und danach der Zehner gesprochen wird. Im Gegensatz dazu wird, wenn die Zahl geschrieben wird, zuerst der Zehner und danach der Einer notiert.

Das bedeutet, dass noch nicht geschrieben werden kann, wenn erst der Einer ausgesprochen ist.

Die Kursleitung achtet darauf, dass sie selbst stets die Zehner vor den Einern schreibt. Manche Teilnehmer/-innen schreiben zuerst den Einer und danach den Zehner, weil sie die unterschiedliche Systematik der Sprech- und Schreibweise nicht analysiert haben.

- Sprechen – „acht und sechzig“ vs. Schreiben – 68 „sechs acht“
- Sprechen – „drei und neunzig“ vs. Schreiben – 93 „neun drei“

Um das Sprechen und damit das Zählen ab der Zehn inklusive der Unregelmäßigkeiten darzustellen, folgt eine weitere Tabelle. Auch hier sind denkbare Benennungsalternativen dargestellt.²

Zahl	Bedeutung	Mögliche Sprechweisen		Tatsächliche Sprechweise
10	1 Z und 0 E	eins-zig	zehn	zehn
11	1 Z und 1 E	eins-und-eins-zig	zehneins	elf
12	1 Z und 2 E	zwei-und-eins-zig	zehnzwei	zwölf
13	1 Z und 3 E	drei-und-eins-zig	zehndrei	dreizehn
14	1 Z und 4 E	vier-und-eins-zig	zehnvier	vierzehn
15	1 Z und 5 E	fünf-und-eins-zig	zehnfünf	fünfzehn
16	1 Z und 6 E	sechs-und-eins-zig	zehnsechs	sechzehn
17	1 Z und 7 E	sieben-und-eins-zig	zehnsieben	siebzehn
18	1 Z und 8 E	acht-und-eins-zig	zehnacht	achtzehn
19	1 Z und 9 E	neun-und-eins-zig	zehnneun	neunzehn
20	2 Z und 0 E	zwei-zig	zweizehn	zwanzig
21	2 Z und 1 E	eins-und-zwei-zig	zweizehneins	einundzwanzig (sprachliche Fortsetzung von oben wäre eigentlich einzwanzig)
22	2 Z und 2 E	zwei-und-zwei-zig	zweizehnzwei	zweiundzwanzig (zweizwanzig)

² Gelegentlich berichten Lehrkräfte, dass sie zeitweise mit alternativen Zahlbenennungsmethoden arbeiten und dass dies den Lernenden hilft, die Zahlstrukturen zu verstehen und für effektives Rechnen zu verwenden. Auch ein Switchen in die herkömmliche Zahlbenennung sei dann nicht weiter problematisch.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

23	2 Z und 3 E	drei-und-zwei-zig	zweizehndrei	dreiundzwanzig (dreizwanzig)
24	2 Z und 4 E	vier-und-zwei-zig	zweizehnvier	vierundzwanzig (vierzwanzig)
25	2 Z und 5 E	fünf-und-zwei-zig	zweizehnfünf	fünfundzwanzig (fünfzwanzig)
26	2 Z und 6 E	sechs-und-zwei-zig	zweizehnsechs	sechsundzwanzig (sechszwanzig)
27	2 Z und 7 E	sieben-und-zwei-zig	zweizehnsieben	siebenundzwanzig (siebenzwanzig)
28	2 Z und 8 E	acht-und-zwei-zig	zweizehnacht	achtundzwanzig (achtzwanzig)
29	2 Z und 9 E	neun-und-zwei-zig	zweizehnneun	neunundzwanzig (neunzwanzig)
30	3 Z und 0 E	drei-zig	dreizehn	dreißig

Abbildung 9.3-5: Schreib- und Sprechweise von zweistelligen Zahlen – Teil 2

Bei den Zahlbenennungen treten vielerlei Unregelmäßigkeiten in der Sprechweise auf. Elf und zwölf sind keine zusammengesetzten Zahlwörter. Ab dreizehn wird der Einer zuerst gesprochen an die Zehn gekoppelt – dreizehn, vierzehn, ... Weiter so fortgesetzt müsste es eigentlich „einszwanzig“, „zweizwanzig“, „dreizwanzig“, ... heißen. Ab zwanzig wird jedoch das Wort **und** eingesetzt, und die folgenden Zahlen heißen einundzwanzig, zweiundzwanzig, ... sechsunddreißig ... fünfundvierzig ... achtundneunzig. Es wird also zuerst der Einer benannt, dann folgt **und**. Danach wird der Zehner benannt.

Die Kursleitung liest einzelne Zeilen vor. Zunächst von 11 bis 19.

Zum Beispiel die Zahl 13: Die Dreizehn wird mit den Ziffern 1 und 3 notiert. Erinnern Sie sich an die Stellenwerttabelle. Aus der Schreibweise 13 (eins drei) kann abgelesen werden: Es sind ein Zehner und drei Einer enthalten. Da in der Sprechweise statt zehn **zig** verwendet wird, könnte es **drei-und-einszig** heißen. Wenn die Schreibweise nach Stellenwerten 13 gesprochen würde, könnte es **zehn-drei** heißen. Tatsächlich sagen wir aber **dreizehn**. Das heißt, der Einer wird vor dem Zehner gesprochen.

Ab der Zwanzig gilt eine **einheitliche** Sprechweise: Der Einer wird zuerst gesprochen. Danach wird mit dem Bindungswort **und** der Zehner gesprochen. Lediglich bei dem Einer **eins** wird das **s** nicht mitgesprochen. Es heißt jetzt also **ein-und-zwanzig**, fortgesetzt **zwei-und-zwanzig**. Es heißt also nicht mehr wie zum Beispiel bei achtzehn jetzt achtzwanzig, sondern achtundzwanzig.

Schauen wir uns die Spalte **Bedeutung** von oben nach unten an: Es ist von Zahl zu Zahl immer ein Einer mehr. Die Zahlen unterscheiden sich um eins. Sind in der 27 zwei Zehner und sieben Einer enthalten, sind es in der 28 ein Zehner mehr, also zwei Zehner und acht Einer, bzw. in der 26 ein Zehner weniger, also zwei Zehner und sechs Einer.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer/-innen auf, weitere Zahlen korrekt und betont zu sprechen und dabei sowohl das Sprechprinzip als auch die Notation der Zahl zu beschreiben. Die Kursleitung notiert das Gesagte an der Tafel.

Beispiel:

Für acht-und-dreißig wird 38 notiert.

Wichtig ist es, darauf zu achten, dass erst nach dem Aussprechen des gesamten Zahlwortes die Zahl notiert wird und zuerst der Zehner und danach der Einer notiert wird. Das heißt, erst feststellen (hören), um welchen Zehner es geht (hier dreißig), den Zehner (3) notieren und anschließend den Einer identifizieren (hier acht) und den Einer notieren (8).

Anmerkung:

Richtiges Zählen bis 100 ist möglich, wenn die Systematik verstanden wird. Die Unregelmäßigkeiten können den Teilnehmerinnen und Teilnehmern nicht erspart werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.3.2 Aufgaben – Zahlendiktate

Exploration

Mithilfe von Zahlendiktaten überprüft die Kursleitung, ob die Zahlen bis 100 von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern richtig notiert werden und somit mit hoher Wahrscheinlichkeit auch richtig gezählt werden können.

Durchführung und didaktische Hinweise

Wenn Zahlen geschrieben werden, sollten zuerst die Zehner und danach die Einer geschrieben werden. Gaidoschik⁴ schlägt zur Vorbereitung eines Zahlendiktates nachfolgende Aufgaben vor. Zweistellige Zahlen werden von der Kursleitung deutlich vorgesprochen und verschiedene Teilnehmer/-innen sagen (nicht schreiben) abwechselnd:

- wie viele Einer sie heraushören,
- wie viele Zehner sie heraushören,
- zuerst die Einer und dann die Zehner (in dieser Reihenfolge),
- zuerst die Zehner und dann die Einer.

Die Kursleitung bittet anschließend die Teilnehmer/-innen, folgende zügig hintereinander, laut und deutlich vorgetragenen Zahlen (besonders *und* betonen) zu notieren.

Dreiundvierzig

Zweiundsiebzig

Siebenundzwanzig

Achtundachtzig

Vierundfünfzig

Einundneunzig

Siebzehn

Fünfunddreißig

Neunundzwanzig

Zweiundneunzig

Diese Zahlen müssten die Teilnehmer/-innen notiert haben.

43, 72, 27, 88, 54, 91, 17, 35, 29, 92

Wenn im Zahlendiktat bei einigen Teilnehmerinnen und Teilnehmern Fehler auftreten, sind weitere Erklärungen und Übungen zur Systematik des Zahlensystems bis 100 notwendig.

⁴ Gaidoschik (2007/2015), S. 173

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.3.3 Aufgabenblatt und Kursgespräch – Zahlenschreibweise

Exploration

Die Teilnehmer/-innen überprüfen, ob sie Zahlwörter richtig schreiben sowie aus dem Zahlwort oder der symbolhaft dargestellten Zahl die Bedeutung erschließen. Mit *Bedeutung erschließen* ist gemeint zu erkennen, wie viele Zehner und Einer in der Zahl enthalten sind, und außerdem daraus zu schlussfolgern, wie viele Einer insgesamt enthalten sind. Das heißt, die Teilnehmer/-innen können Stellenwerte interpretieren und die angeordneten Bündel in der richtigen Reihenfolge in Stellenwerte ordnen.

Zum Abschluss des Unterkapitels bittet die Kursleitung die Teilnehmer/-innen, das **Aufgabenblatt 9.3a** *Zahlenschreibweise* (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) zu bearbeiten.

Es wird überprüft, ob es den Teilnehmerinnen und Teilnehmern gelingt, die Zahlen in der Reihenfolge „zuerst die Zehner und dann die Einer“ zu schreiben.

AUFGABENBLATT 9.3a

Zahlenschreibweise		
Zahl	Zahlwort	Bedeutung
42	zweiundvierzig	4 Z und 2 E oder 42 E
37	siebenunddreißig	3 Z und 7 E oder 37 E
28	achtundzwanzig	2 Z und 8 E oder 28 E
64	vierundsechzig	6 Z und 4 E oder 64 E
91	einundneunzig	9 Z und 1 E oder 91 E
12	zwölf	1 Z und 2 E oder 12 E
79	neunundsiebzig	7 Z und 9 E oder 79 E
97	siebenundneunzig	9 Z und 7 E oder 97 E
85	fünfundachtzig	8 Z und 5 E oder 85 E
57	siebenundfünfzig	5 Z und 7 E oder 57 E
11	elf	1 Z und 1 E oder 11 E
33	dreiunddreißig	3 Z und 3 E oder 33 E
81	einundachtzig	8 Z und 1 E oder 81 E

Abbildung 9.3-6: LÖSUNGSBLATT 9.3a

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Mit zehn Ziffern können alle Zahlen bis 100 aufgeschrieben werden.
- Bei Zahlen mit zwei Stellen werden zuerst der Zehner (links) und danach der Einer (rechts) notiert. Aus der Notation der Zahlen kann der Wert der Zahl abgeleitet werden.

Beispiel:

In der 58 sind fünf Zehner und acht Einer enthalten (insgesamt 58 Einer). Die 58 ist einer mehr als 57 und einer weniger als 59.

- Bei der Sprechweise der Zahlen gibt es einige Unregelmäßigkeiten, manche aufgrund von Abkürzungen, zum Beispiel bei der Sechzig nicht mehr s in der Sechs zu sprechen oder bei der Siebzig die Endung *en* der Sieben wegzulassen. Elf und zwölf weichen völlig vom Benennungssystem ab. Würde die Benennung ausgehend von dreizehn, vierzehn, [...] neunzehn, zwanzig fortgesetzt, müsste es eigentlich einzwanzig, zweizwanzig usw. heißen. Dem ist nicht so.
- Die Regel für das Sprechen (und Schreiben) des Zahlwortes ab zwanzig lautet:
Für einen Zehner wird *zig* gesprochen. Welcher oder wie viele Zehner gemeint sind, wird vor *zig* notiert. Mit Fünfzig sind also fünf Zehner gemeint. Die Einer werden zuerst gesprochen und mit dem Wort *und* an die Zehnerzahl gekoppelt, wie dreiundfünfzig. Allerdings werden, wenn Zahlen notiert werden, zuerst die Zehner und an zweiter Stelle die Einer notiert.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Schlagwörter: Dezimalsystem • Einzelarbeit • Gruppenarbeit • Kursgespräch • Maßeinheiten • Zahlen • Zahlen bis 100

9.4 Zahlen visualisieren

Exploration

Wenn Ordnung geschaffen wird, wenn Strukturen erzeugt werden, sind Bündelungen weitverbreitet. Auch da, wo diese zunächst nicht vermutet werden. Indem die Teilnehmer/-innen Alltagsbezüge und Bezüge zum Umgang mit Größen herstellen, entwickelt sich ihr Zahlverständnis im Zahlbereich bis 100. Dabei sind Visualisierungen sehr hilfreich. Daraus kann auf die Beziehungen der Zahlen geschlossen werden.

9.4.1 Hausaufgabe – Zehnerbündel im Alltag

Im Alltag wird häufig gebündelt. Die Kursleitung bittet die Teilnehmer/-innen, *Zehnerbündel des Alltags* zu identifizieren und mit ihrem Smartphone zu fotografieren sowie gemeinsam zu überlegen, wie die Prämierung des ersten bis dritten Platzes einer „Hitliste“ vollzogen wird. In der darauf folgenden Stunde erstellen die Teilnehmer/-innen aus den Fotos (die sie sich gegenseitig zeigen) die Hitliste „Zehnerbündel des Alltags“. Zum Beispiel könnten diese Fotos ausgedruckt und im Unterrichtsraum aufgehängt werden. Das könnten zum Beispiel Zehnerpackungen Schokolade oder Großpackungen mit Kosmetikartikeln sein.

Kleine Wettbewerbe machen Spaß und bleiben positiv in Erinnerung. Die Fokussierung auf Zehnerbündel deswegen, weil direkte Bezüge zu dem dekadischen Zahlssystem hergestellt werden können. Es ist einfacher, im Alltag andere Bündelungsformate zu finden (z. B. Fünferpackungen).

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

9.4.2 Aufgabenblatt und Kursgespräch – Darstellung von Zahlen

Exploration

Es gibt unterschiedliche Visualisierungen, um Zehner und Einer übersichtlich darzustellen. Visualisierungen unterstützen die Entwicklung der Vorstellungen von Zahlen. Die Darstellung dient der Wiederholung des bisher Gelernten. Die Teilnehmer/-innen interpretieren zunächst (möglichst selbstständig) die bereits vorgegebene Darstellung. Es sind jeweils zehn Zehner nebeneinander dargestellt. In jedem Zehner sind zehn Einer visualisiert. Jedes einzelne Kästchen in der Abbildung symbolisiert einen Einer.

Für die Zahl, die visualisiert werden soll, muss erkannt werden, wie viele Zehner und wie viele Einer (ungebündelt) vorliegen. Dieses Wissen soll auf die Darstellung übertragen werden, zum Beispiel, indem Zehner vollständig (jeweils ein Zehnerfeld wird markiert) und Einer einzeln (entsprechende Anzahl von Einern markieren) übertragen werden.

AUFGABENBLATT 9.4a

Die Kursleitung verteilt das **Aufgabenblatt 9.4a Darstellungen** (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) und erläutert die Aufgabe.

Stellen Sie die Zahlen jeweils in der unten stehenden Zeichnung dar. Es sind immer zehn Zehner nebeneinander dargestellt. In jedem Zehner sind zehn Einer gebündelt – jedes Kästchen entspricht einem Einer. Wie viele Zehner sind in der Zahl enthalten? Wie viele Einer sind nicht gebündelt? Markieren Sie die entsprechenden Felder für Zehner und Einer.



Abbildung 9.4-1: Anordnung von zehn Zehnern mit jeweils zehn Einern

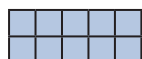


Abbildung 9.4-2: Visualisierung eines Zehners durch farbiges Ausmalen

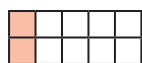


Abbildung 9.4-3: Visualisierung von zwei Einern durch farbiges Ausmalen

Mit dem **Aufgabenblatt 9.4a** sollen die Teilnehmer/-innen ihren Wissensstand zum Zahlbereich bis 100 selbstständig prüfen. Die Kursleitung beantwortet eventuell auftretende Fragen. Aus der Art und Weise, wie die Teilnehmer/-innen das Aufgabenblatt bearbeiten, kann die Kursleitung Rückschlüsse auf den jeweiligen Lernstand ziehen und möglicherweise Wiederholungen planen.

Ziel ist es, selbstständig in der vorliegenden Visualisierung die Zehnerfelder und darin eingebettet die zehn Einer zu erkennen und zu nutzen.

Die Aufgabe wird gemeinsam ausgewertet. Wenn Teilnehmer/-innen beschreiben können, dass bei 42 vier Zehnerfelder markiert werden müssen und zusätzlich zwei einzelne Einer, zeigt das, wie gut sie die Zehnerbündelung verstanden haben. Die Kursleitung achtet auf die Verbalisierung und ermutigt die Teilnehmer/-innen, ihre Lösungen vorzutragen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

42														

Abbildung 9.4-4: Aufgabenblatt 9.4a – Auswertung

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

9.4.3 Gruppenarbeit und Kursgespräch – Anordnung von 100 Elementen

Exploration

Eine weitere, häufig verwendete Visualisierungsform ist die sogenannte *Hundertertafel*. Einigen Teilnehmerinnen und Teilnehmern wird der Gebrauch der Hundertertafel durchaus geläufig sein, denn sie haben früher in der Schule mithilfe der Hundertertafel gerechnet. Nachfolgend soll der Versuch unternommen werden, dass sich die Teilnehmer/-innen diese Hunderterdarstellung erschließen und diese als eine von vielen Visualisierungsformen des Zahlbereichs bis 100 interpretieren. Wichtig ist es, beim Veranschaulichen und beim Vertiefen des bisher Erlernten die Zehner/Einer-Struktur (Dezimalstruktur) zu erkennen.

Einzuprägen für den Zahlbereich bis 100 ist Folgendes:

Darstellungen mittels graphischer Elemente veranschaulichen Mengen. In Hunderterdarstellungen lassen sich Zehner und Einer identifizieren. Insgesamt sind 100 Einer geordnet/strukturiert dargestellt.

Das Zahlssystem ohne Veranschaulichung nutzen zu können, ist das eigentliche Lernziel: In Hundert sind zehn Zehner enthalten und in jedem Zehner zehn Einer, damit sind in einem Hunderter auch 100 Einer enthalten.

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer/-innen in Zweiergruppen folgende Aufgabe zu lösen.

Ich bitte Sie, 100 Elemente so zu legen, dass möglichst einfach überprüft werden kann, dass es auch wirklich 100 Elemente sind.

Als Elemente eignen sich 100 Chips, kleine Holzwürfel, Ein-Cent-Stücke, Ein-Euro-Stücke usw.

Die Kursleitung prüft, welche Ideen die Teilnehmer/-innen entwickeln, und stellt diese anschließend vor. Alle Teilnehmer/-innen gehen von Tisch zu Tisch und tauschen sich über die vorgeschlagenen Anordnungen aus.

Wie kann jetzt einfach überprüft werden, dass es auch tatsächlich 100 Elemente sind? Erläutern Sie Ihre Zehnerstruktur.

Eine Möglichkeit ist, zehn Bündelungen mit zehn unsortierten Elementen zu legen.

Mit hoher Wahrscheinlichkeit kommt ein Team (wenn nicht sogar alle Teams) auf die Idee, zehn Reihen mit jeweils zehn Elementen, z. B. Chips, aufzulegen – die sogenannte 10-mal-10-Anordnung.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

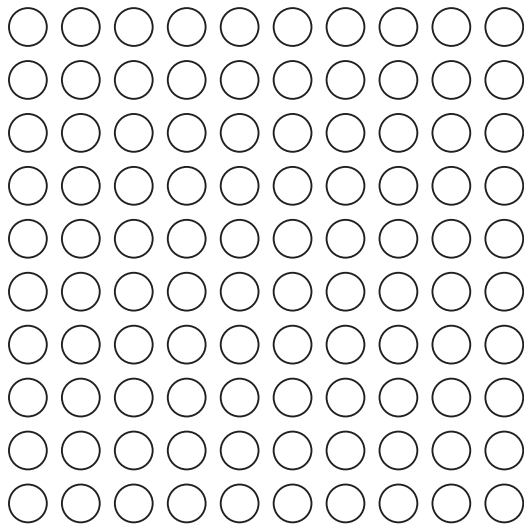


Abbildung 9.4-5: Zehn Reihen zu je zehn Chips – 10-mal-10-Anordnung

Das ist eine komfortable Lösung, denn die 100 Elemente sind tatsächlich kompakt und übersichtlich angeordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, Zehner zu identifizieren, z. B.: Die erste Reihe ist ein Zehner mit zehn Einern. Bei zwei Reihen sind es zwei Zehner mit insgesamt 20 Einern usw.

Die Kursleitung zeigt an der Abbildung reihenweise die Zehner. Dabei werden die Zehner umfahren (Zeigestab, Stift, Zeigefinger).

Eine Reihe bildet einen Zehner ab. Es sind zehn. Zwei Reihen enthalten zwei Zehner, es sind zwanzig usw. Ebenso in den nachfolgenden Abbildungen.

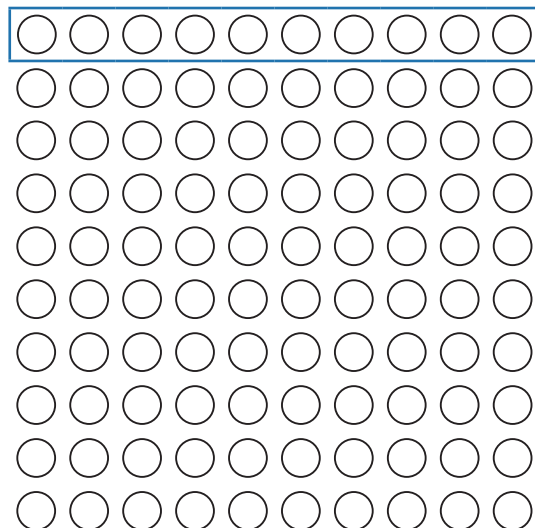


Abbildung 9.4-6: Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 1

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Nachfolgend ist die erste Spalte ein Zehner. Dementsprechend sind drei Spalten drei Zehner bzw. 30 Einer.

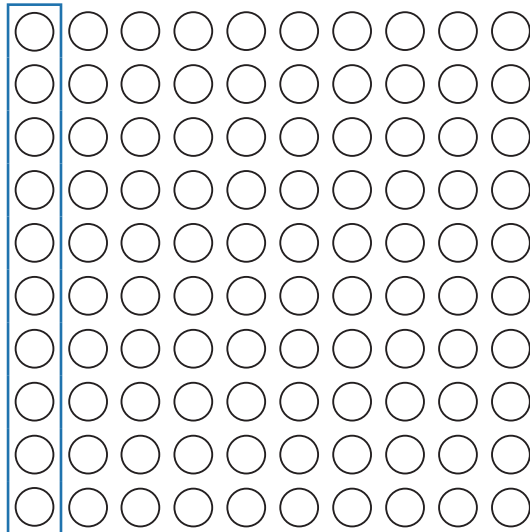


Abbildung 9.4-7: Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 2

Ein Zehner könnte auch so, wie die nachfolgende Abbildung zeigt, identifiziert werden.

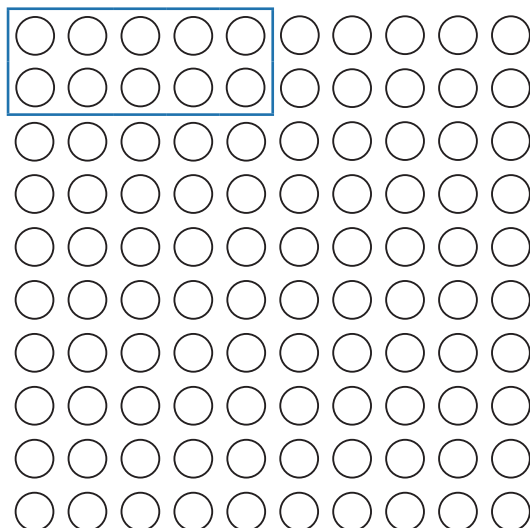


Abbildung 9.4-8: Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 3

Die erste Version hat sich allgemein durchgesetzt. Eine Reihe entspricht einem Zehner.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Die Kursleitung bittet einzelne Teilnehmer/-innen, verschiedene Zahlen an der Abbildung zu zeigen.

Zum Beispiel: 47.

Vier Reihen entsprechen vier Zehnern, hinzu kommen sieben Einer. Wichtig ist, dass dabei die gesamten 47 Kreise gekennzeichnet werden. Denn 47 entspricht 47 dargestellten Kreisen. Das sind vier Reihen (Zehner) und weitere sieben einzelne Kreise (Einer):

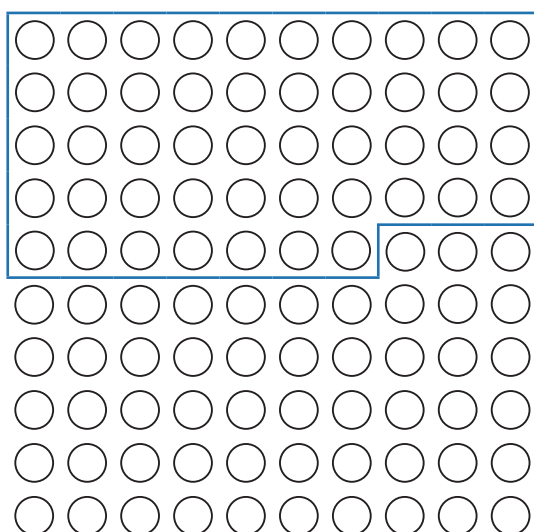


Abbildung 9.4-9: Darstellung der 47

Aus dieser Hunderterdarstellung, oft auch als *Hunderterfeld* bezeichnet, leitet sich die bereits oben erwähnte *Hundertertafel* ab, indem direkt die entsprechenden Zahlen/Anzahlen der Elemente tabellarisch eingetragen werden: Die Zahlen eins bis zehn werden in die erste Reihe eingetragen, sodass für jeden einzelnen Einer die entsprechende Zahl zu sehen ist, die für die bis dahin kumulierte Anzahl steht. Dabei sollte die Kursleitung bereits hier deutlich darauf hinweisen, dass zum Beispiel die Vier für vier Elemente steht und nicht für das vierte Element.

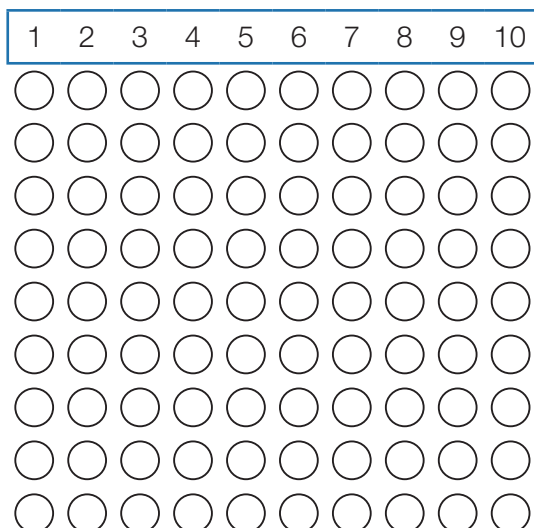


Abbildung 9.4-10: Hundertertafel/Hunderterfeld – erster Zehner

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Die Hundertertafel visualisiert folglich Schritt für Schritt die Zahlen bis 100 in Form einer Tabelle, deren Anordnung mit zehn Zeilen und zehn Spalten in jeder Zelle genau einen Einer enthält. Insgesamt sind es hundert Einer.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abbildung 9.4-11: Hundertertafel

Hinweis:

Die Hundertertafel kann *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen* zum Zählen verleiten. Für die Aufgabe $37 + 4$ werden ausgehend von 37 die nächsten vier Schritte vorwärts gegangen, also gezählt. Die Nutzung der kardinalen Beziehungen der Zahlen im Dezimalsystem gelingt in den meisten Fällen nicht.

Bei der Interpretation/Nutzung der Hundertertafel wird selten darauf hingewiesen, dass zum Beispiel mit der Zahl 16 auch 16 Zellen gemeint sind.

Eine weitere mögliche Interpretation der Hundertertafel ist, dass die Zahl 16 die sechzehnte Position in der Tafel angibt. Hier wird also der ordinale Aspekt der Zahl 16 betrachtet.

Die Hundertertafel erinnert an Lottoscheine: „Kreuzen Sie die richtige Zahl im Spiel 1 aus 100 an!“

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

				16					

Abbildung 9.4-12: Die Zahl 16 entspricht in der Hundertertafel 16 Zellen

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

9.4.4 Aufgabenblatt und Kursgespräch – Hunderterfeld/Hundertertafel

AUFGABENBLATT 9.4 b

Exploration

Im **Aufgabenblatt 9.4 b** sollen die Teilnehmer/-innen das soeben Besprochene rekapitulieren. Dabei gilt es noch einmal herauszuarbeiten, dass diese Hunderterdarstellungen der Veranschaulichung dienen: einerseits als geordnete Mengendarstellung (links) und andererseits als eine Positionsdarstellung der Zahl in der Hundertertafel. Eine Zahl in der Hundertertafel steht für die Anzahl der Felder.

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung verteilt das **Aufgabenblatt 9.4 b Hunderterfeld/Hundertertafel** (Bearbeitungsdauer ca. 5 Minuten) und erläutert die Aufgabe.

Stellen Sie die angegebenen Zahlen dar. In der linken Hunderterdarstellung umkreisen Sie die entsprechende Menge mit einem Stift. Achten Sie dabei auf die Zehnerbündelung. In der sogenannten Hundertertafel (rechte Darstellung) tragen Sie die Zahl in das entsprechende Feld ein.

Die Teilnehmer/-innen arbeiten zunächst selbstständig und dann – falls sie diese Aufgaben nicht lösen können – mithilfe der Kursleitung. Es erfordert die direkte Anwendung des Besprochenen und die Nutzung der Hundertertafel. Es geht darum zu verstehen, dass zum Beispiel die 42 in der Hundertertafel für 42 Zellen oder Felder steht. Die Kursleitung bespricht die Lösungen mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern.

42

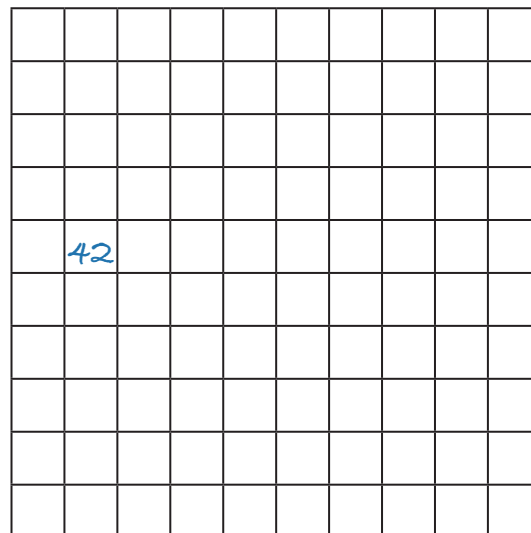
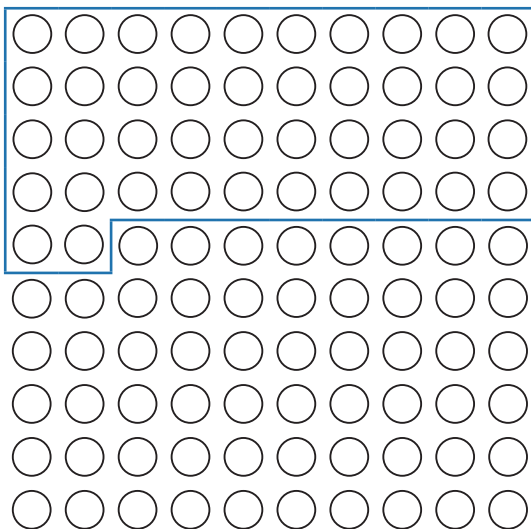


Abbildung 9.4-13: Hunderterdarstellungen – Zahl 42

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

18

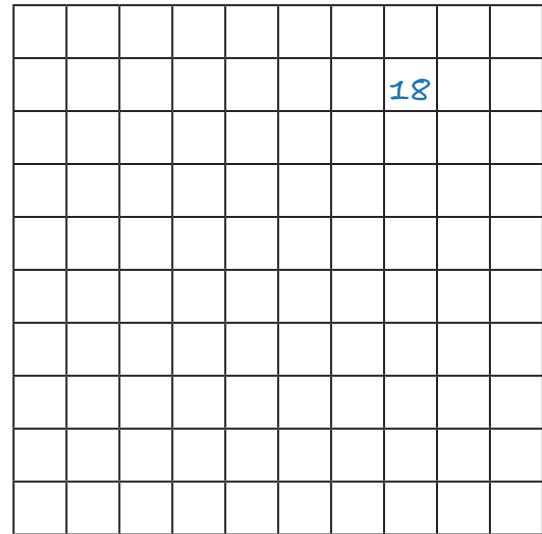
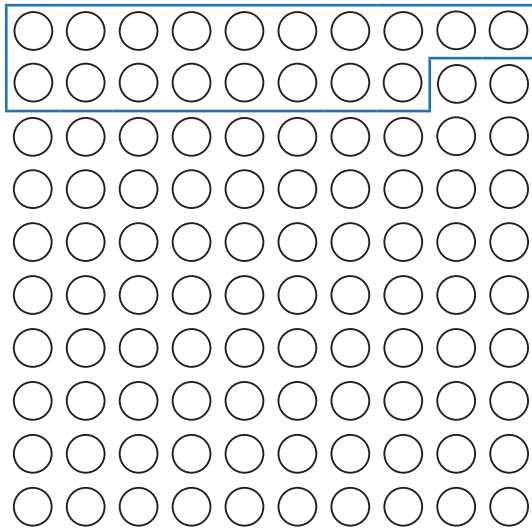


Abbildung 9.4-14: Hunderterdarstellungen – Zahl 18

60

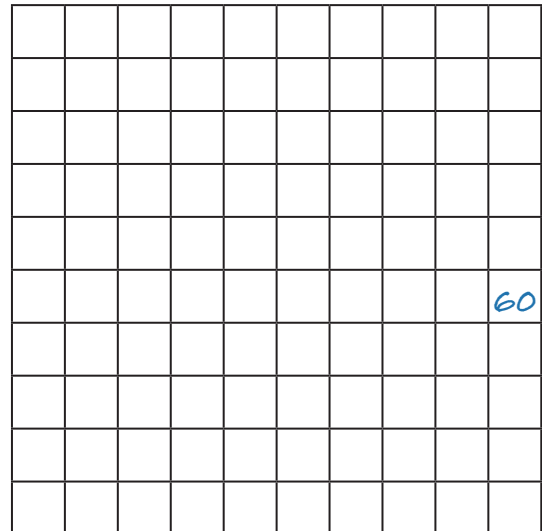
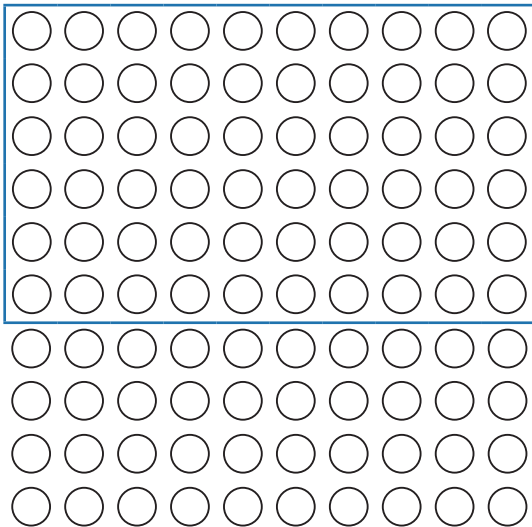


Abbildung 9.4-15: Hunderterdarstellungen – Zahl 60

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Für den Zahlbereich bis 100 wurden hier weitere Visualisierungen besprochen. Diese Veranschaulichung, Visualisierung bzw. Zahldarstellung dient dazu, Vorstellungen vom Zahlbereich zu entwickeln: Welche Mengen stellen die Zahlen dar? Und umgekehrt: Wie können größere Mengen strukturiert werden? Welche wiederkehrenden Ordnungsprinzipien sind erkennbar?
- Die wesentlichen Merkmale sind: In der 100 sind zehn Zehner enthalten und in einem Zehner sind zehn Einer enthalten, demzufolge sind in der Hundert 100 Einer enthalten.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

9.4.5 Kursgespräch – Wie werden Längen eingeteilt?

Exploration

Metermaß, Lineal und Zahlenstrahl stellen Abstände oder Längen dar. Während Lineal oder Metermaß in erster Linie zum Messen von Längen da sind, hat der Zahlenstrahl vor allem eine Visualisierungsfunktion. Auch hier sind Strukturen, Muster bzw. Ordnungsprinzipien erkennbar: Alle drei sind unterteilt. Meist in Form von kleinen und größeren Strichen/Markierungen. Die Abstände zwischen den Strichen/Markierungen sind gleich groß. Wie hängt das zusammen? Was wird damit angezeigt?

Die gleich großen Abstände stehen jeweils für eine bestimmte Zahl und sie wiederholen sich. Oft sind Zahlen bis 100 erkennbar. Auch hier wird auf die Einteilung in Einer und Zehner zurückgegriffen.

Durchführung und didaktische Hinweise

Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern werden Metermaß und Lineal bekannt sein. Zielführende Fragestellungen regen die Diskussion an, die Längeneinteilungen unter dem Aspekt Einer/Zehner/Hunderter zu analysieren. Es geht in dieser Unterrichtssequenz noch nicht darum, sich mit Längenmaßen im Detail zu beschäftigen.

*Was haben Metermaß und Lineal mit dem Zahlbereich bis 100 zu tun?
Können Sie beschreiben, wie Metermaß bzw. Lineal eingeteilt sind? Wozu werden diese benötigt? Skizzieren Sie die Einteilung an der Tafel.*

Folgende Erkenntnisse sollten gewonnen werden:

- Ein Metermaß bzw. ein Lineal sind regelmäßig eingeteilt.
- Die Abstände zwischen den Markierungen sind immer gleich groß.
- Es gibt kurze Markierungen und längere Markierungen.
- Am Metermaß sind Zahlen bis 100 (oder auch 150 oder mehr) fortlaufend notiert.
- Zehner oder Fünfer sind hervorgehoben.
- Lineale enthalten fortlaufende Zahlen in der Regel bis 17 oder 30.

Die Kursleitung erläutert:

Die gleichen Abstände auf dem Metermaß und dem Lineal stehen für jeweils einen Zentimeter. Jeder Zentimeter ist in zehn Millimeter eingeteilt, dabei ist jeweils der Fünfer hervorgehoben. Einhundert Zentimeter sind ein Meter. Es werden, bildlich gesprochen, Zentimeter um Zentimeter zusammengefügt, bis es schließlich einhundert Zentimeter wie beim Metermaß (oder wie beim Lineal 17 Zentimeter) sind. Die Zahlen, die auf dem Metermaß notiert sind, stehen dabei für die Zahl der Zentimeter. In der nachfolgenden Abbildung zum Beispiel für sieben Zentimeter.

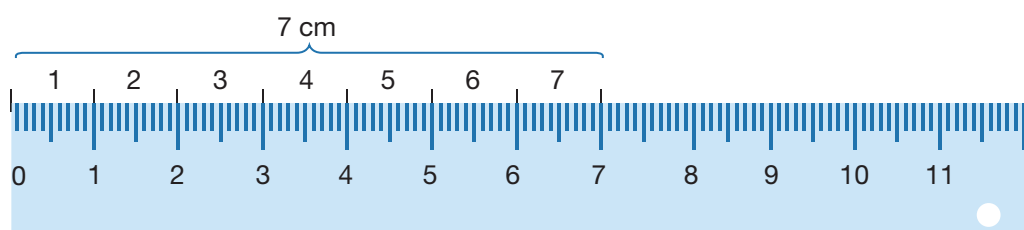


Abbildung 9.4-16: Die Zahl 7 auf dem Metermaß entspricht sieben Zentimetern

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Ausblick

Ein Millimeter, ein Zentimeter, ein Meter sind universelle Längeneinheiten. Umrechnungen und Einteilungen sind später Gegenstand der Betrachtungen.

Ganz ähnlich verhält es sich beim Zahlenstrahl. Je nachdem, welcher Zahlbereich visualisiert werden soll, ist der Zahlenstrahl strukturiert. In der nachfolgenden Abbildung ist der Zahlbereich bis zehn dargestellt. An jeder Markierung steht eine Zahl fortlaufend von 0 bis 10. In der Regel stehen die Zahlen direkt an den Markierungen. Die Markierungen haben gleiche Abstände. Es ist umstritten, wie der Zahlenstrahl korrekt interpretiert werden kann:

Steht die Markierung selbst für die Zahl? Das heißt, ist die Drei die vierte Markierung? Insofern visualisiert der Zahlenstrahl Positionen und damit den Ordinalaspekt der Zahlen.

Oder visualisiert jeder Abstand zwischen den Markierungen einen Einer, wird somit die Drei durch drei Abstände oder sogenannte Längeneinheiten visualisiert? Hier ist eine Parallele zu Metermaß und Lineal zu sehen.

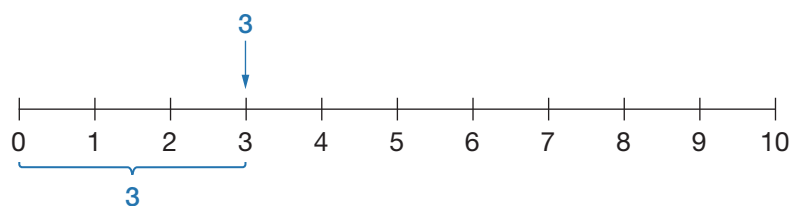


Abbildung 9.4-17: Zahlenstrahl bis 10

Letztere Interpretation lässt es zu, zum Beispiel die Addition zu verdeutlichen.

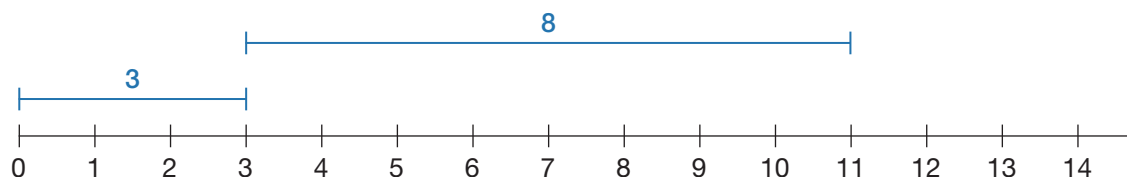


Abbildung 9.4-18: Zahlenstrahl: 3 und 8 sind 11

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

So, wie in der Abbildung 9.4-18 dargestellt: 3 und 8 sind zusammen 11. Die Zahlen 3 und 8 entsprechen drei und acht Längeneinheiten, die zu 11 Längeneinheiten zusammengefasst werden können. Hingegen kann die Interpretation, dass Drei und Acht jeweils Markierungen/Punkten des Zahlenstrahls entsprechen, nicht die Addition $3 + 8 = 11$ erklären, denn Markierungen/Punkte können nicht addiert werden.

Wenn umgekehrt als Deutung der Zahlen nur Längen zugelassen werden, dann wird eine Zahlverortung möglicherweise unübersichtlich: Es kann nicht gezeigt werden, wo die Vier im Vergleich zur Drei steht. Der Zahlenstrahl lässt die Deutung der Zahlen als Markierungen/Punkte und als Längen zu. Beide Sichtweisen ermöglichen einen jeweils reichhaltigen Blick auf Zahlen, beide Sichtweisen produzieren aber auch Deutungsprobleme.

Nachfolgend ist ein Zahlenstrahl von 0 bis 100 dargestellt – mit Zehnerabständen, -einteilungen oder -längeneinheiten.

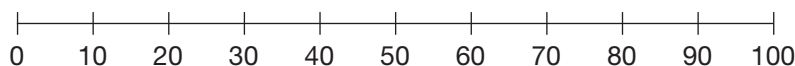


Abbildung 9.4-19: Zahlenstrahl bis 100

Das heißt, zwischen den Markierungen befinden sich neun weitere Zahlen. Zwischen zehn und zwanzig sind das 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. Das ist in der Darstellung des Zahlenstrahls nicht direkt erkennbar. Es sind sogenannte Zehnerschritte visualisiert. Es ist interpretierbar, dass eine Längeneinheit der Zahl Zehn entspricht.

Nachfolgend ein Zahlenstrahl mit Fünferabständen oder Fünfereinteilungen. Es sind weitere Markierungen angegeben, die für dazwischenliegende Zahlen stehen.

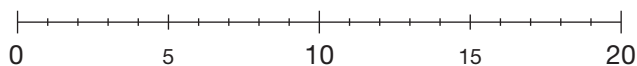


Abbildung 9.4-20: Zahlenstrahl mit Fünferabständen

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Entsprechend könnten fehlende Zahlen ergänzt werden.

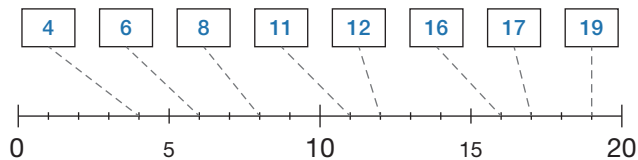


Abbildung 9.4-21: Eintragen von Zahlen am Zahlenstrahl

Empfehlung:

Die Interpretation des Zahlenstrahls mithilfe von Längeneinheiten ist weiterführender. Damit können Bezüge zu Längenmaßen hergestellt und Rechenoperationen erläutert werden. Wichtig bleibt die Betonung, dass es eine Visualisierungsform des entsprechenden Zahlbereiches ist.

Rückschau

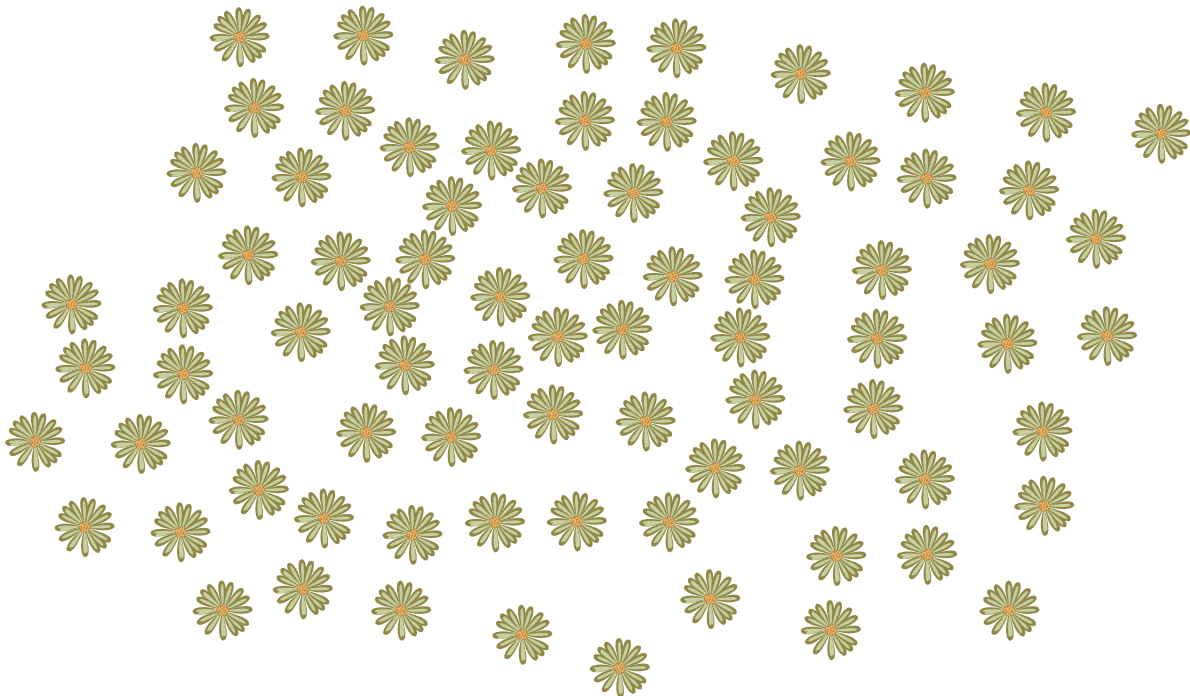
Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Der Zahlbereich wurde von 10 auf 100 erweitert. Das Zusammenfassen von zehn *Einern* zu einem *Zehner* und das Zusammenfassen von zehn *Zehnern* zu einem *Hunderter* kann vielfältig veranschaulicht werden. Die in den Darstellungen erkannte Ordnung und Struktur wurde verallgemeinert und auf das Zahlssystem übertragen.
- Die Zehn ist die maßgebliche Bezugseinheit für das gesamte, heute gebräuchliche dezimale Zahlssystem. Zehn Einer werden zu einem Zehner zusammengefasst. Zehn Zehner werden zu einem Hunderter zusammengefasst. Zehn Hunderter zu einem Tausender usw. Entlang dieses Bündelungsprinzips ist das *Stellenwertsystem* konstruiert. Die Bündel werden Stellen zugeordnet.
- Es ist ein Ordnungsprinzip, das Zahlen strukturiert und aus dem die Werte der Zahlen ablesbar sind. Alle Zahlen im dekadischen Zahlssystem können mit nur zehn Ziffern notiert/konstruiert werden.
- Für das Stellenwertsystem gilt: Wenn es zehn auf einer Stelle sind, dann wird eine neue Stelle besetzt. Diese Stelle wird links davor geschrieben. Beginnend mit Einern heißt das, wenn es zehn Einer sind, wird die Stelle links davor besetzt – die Zehnerstelle. Die Zahl ist zweistellig. Wenn es zehn Zehner sind, wird die Stelle links davor besetzt – die Hunderterstelle. Jetzt ist die Zahl dreistellig. Das Stellenwertsystem ist damit beliebig erweiterbar. Wenn eine Stelle nicht besetzt ist, wird dafür eine Null geschrieben.
- Die Schreib- und Sprechweisen der Zahlen bis 100 weisen einige Unregelmäßigkeiten auf. Bedeutend ist die Erkenntnis, dass die Zehner und Einer in einer anderen Reihenfolge aufgeschrieben werden als das Zahlwort gesprochen wird. Für vierundsechzig wird 64 aufgeschrieben.
- Einteilungen von Längen erfolgen strukturiert in Einheiten. Gleiche Abstände entsprechen gleichen Zahlen. Zunächst muss also analysiert werden, wofür welche Einheit, welcher Abstand steht. Welche Zahlen/Längen sollen dargestellt werden? Das ist bei dem Metermaß bzw. Lineal genauso wie beim Zahlenstrahl. Sowohl Metermaß und Lineal als auch ein Zahlenstrahl werden u. a. dafür genutzt, um einen begrenzten Zahlbereich, eingeteilt in Längeneinheiten, darzustellen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.1a Bündelung (10er und 7er)

Bündeln Sie die Blüten zu Zehnersträußen, indem Sie immer zehn Blüten mit einem Stift umkreisen. Notieren Sie anschließend in der Tabelle, wie viele Zehnersträuße Sie erhalten haben und wie viele einzelne Blüten übrig geblieben sind. Wie viele Blüten sind es? Tragen Sie die Anzahl ein.



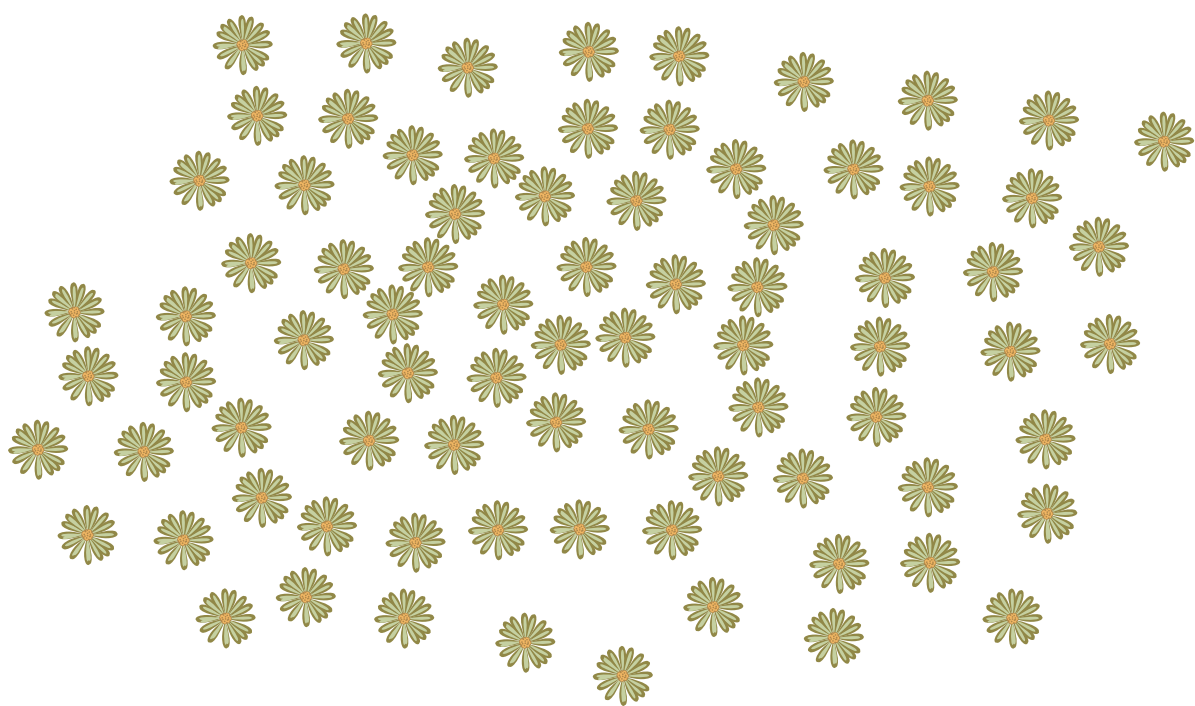
Anzahl	
--------	--

Zehnersträuße	Einzelne Blüten
Zehner	Einer



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Bündeln Sie die Blüten zu Siebenersträußen, indem Sie immer sieben Blüten mit einem Stift umkreisen. Notieren Sie anschließend in der Tabelle, wie viele Siebenersträube Sie erhalten haben und wie viele einzelne Blüten übrig geblieben sind. Wie viele Blüten sind es? Tragen Sie die Anzahl ein.



Anzahl	
--------	--

Siebenersträube	Einzelne Blüten
Siebener	Einer

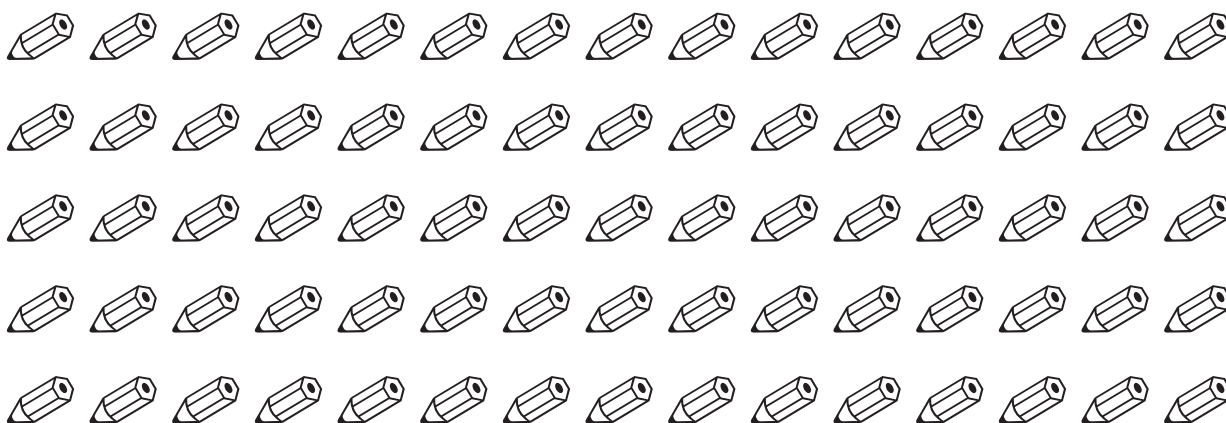
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.1b Bündelung (10er und 5er)

Bündeln Sie die Stifte zu Zehnerpaketen, indem Sie immer zehn Stifte markieren.

Notieren Sie anschließend in der Tabelle, wie viele Zehnerpakete Sie erhalten haben.

Wie viele Stifte sind es? Tragen Sie die Anzahl ein.



Anzahl	
--------	--

Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer



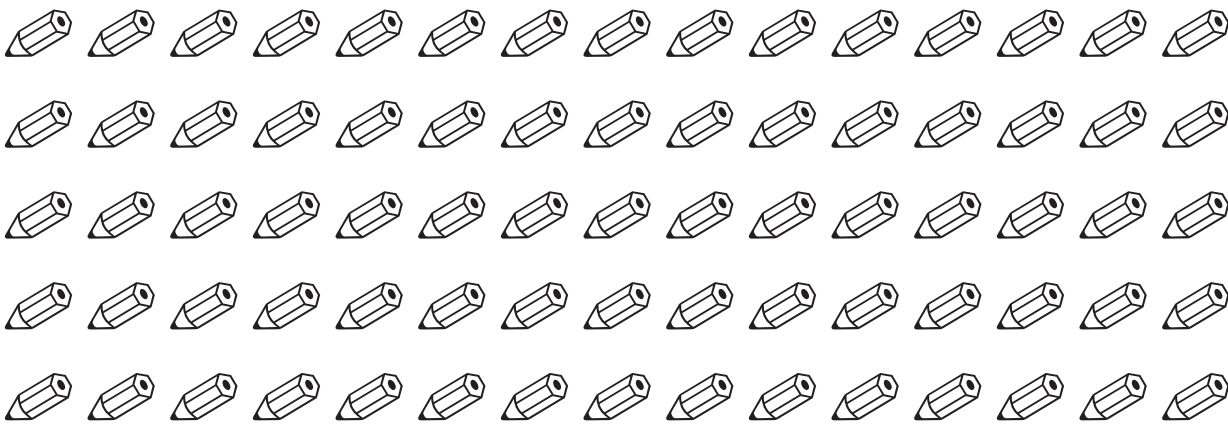
© Serghei Velusceac/Fotolia

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Bündeln Sie die Stifte zu Fünferpaketen, indem Sie immer fünf Stifte markieren.

Notieren Sie anschließend in der Tabelle, wie viele Fünferpakete Sie erhalten haben.

Wie viele Stifte sind es? Tragen Sie die Anzahl ein.



Anzahl	
--------	--

Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünfer	Einer



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.2a Stellenwerte

Sie würfeln eine Zahl mit dem Zehnerwürfel, z. B. eine Acht. Dafür nehmen Sie sich die entsprechende Anzahl (acht) Holzwürfel und legen diese in das Einerfeld. Danach würfelt der/die andere. Beim nächsten Mal würfeln Sie zum Beispiel eine Vier. Sie legen dafür vier Holzwürfel ab. Jetzt liegen zwölf Einer in Ihrem Einerfeld. Immer wenn zehn Einer erreicht werden, tauschen Sie diese gegen eine Zehnerstange. Die Zehnerstange wird in dem Zehnerfeld abgelegt. Jetzt liegen ein Zehner in Ihrem Zehnerfeld und zwei Einer in Ihrem Einerfeld. Fahren Sie fort, bis Sie zehn Zehner getauscht haben. Diese zehn Zehner tauschen Sie gegen eine Hunderterplatte ein und Sie legen den Hunderter in das Hunderterfeld. Gewonnen hat, wer zuerst einen Hunderter ablegen konnte.

Einer	
Zehner	
Hunderter	

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.2b Stellenwerttabelle

Tragen Sie die Hunderter (H), Zehner (Z) und Einer (E) in die Stellenwerttabelle ein.

Achten Sie darauf, wenn es auf einer Stelle zehn sind, dass eine neue Stelle links daneben besetzt wird.

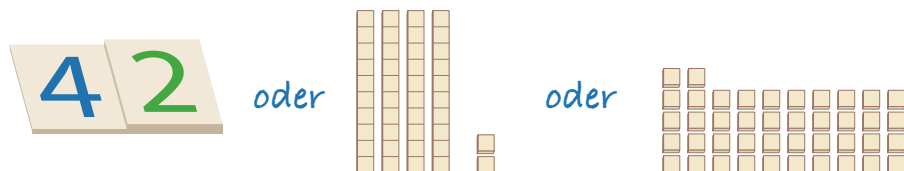
Aufgaben		Stellenwerte		
		H	Z	E
1.	3 Z und 14 E			
2.	7 E und 4 Z			
3.	14 Z und 6 E			
4.	23 E			
5.	5 E und 7 Z			
6.	12 E und 4 Z			
7.	4 Z			
8.	20 Z und 1 E			
9.	1 H und 7 E			
10.	2 H und 4 Z und 3 E			
11.	56 E			
12.	20 Z und 20 E			
13.	9 Z und 16 E			
14.	134 E			

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.3a Zahlenschreibweise

Vervollständigen Sie die Tabelle.

Zahlenschreibweise		
Zahl	Zahlwort	Bedeutung
42	zweiundvierzig	4 Z und 2 E oder 42 E
		3 Z und 7 E
	achtundzwanzig	
64		
91		
		12 E
	neunundsiebzig	
97		
		8 Z und 5 E
	siebenundfünfzig	
11		
		33 E
	einundachtzig	



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.4a Darstellungen

Stellen Sie die Zahlen jeweils in der unten stehenden Zeichnung dar.

Es sind immer zehn Zehner nebeneinander dargestellt. In jedem Zehner sind zehn Einer gebündelt – jedes Kästchen entspricht einem Einer.

Wie viele Zehner sind in der Zahl enthalten? Wie viele Einer sind nicht gebündelt? Markieren Sie die entsprechenden Felder für Zehner und Einer.

42

18

60

92

25

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.4b Hunderterfeld/Hundertertafel

Stellen Sie die angegebenen Zahlen dar. Umkreisen Sie in der linken Hunderterdarstellung die entsprechende Menge mit einem Stift oder markieren Sie diese farbig. Nutzen Sie dabei die Zehnerbündelung. In der Hundertertafel (rechte Darstellung) tragen Sie die Zahl in das entsprechende Feld ein.

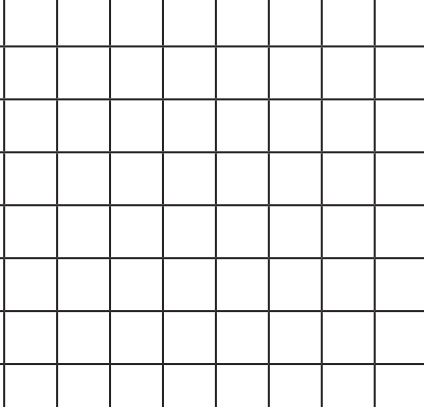
42

18

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

60

A 10x10 grid of empty circles, intended for students to place dots representing data points for the number of books read.

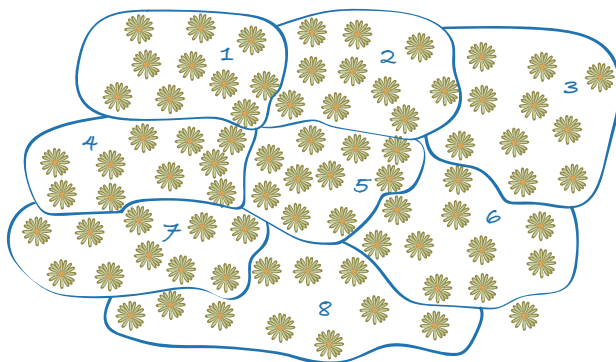


Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

9.1a LÖSUNGEN – Bündelung (10er und 7er)

Bündeln Sie die Blüten zu Zehnersträußen, indem Sie immer zehn Blüten mit einem Stift umkreisen. Notieren Sie anschließend in der Tabelle, wie viele Zehnersträuße Sie erhalten haben und wie viele einzelne Blüten übrig geblieben sind. Wie viele Blüten sind es? Tragen Sie die Anzahl ein.

Beispiel:

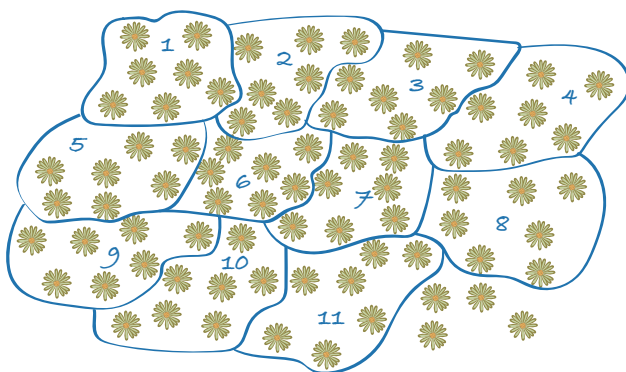


Anzahl	81
--------	----

Zehnersträuße	Einzelne Blüten
Zehner	Einer
8	1

Bündeln Sie die Blüten zu Siebenersträußen, indem Sie immer sieben Blüten mit einem Stift umkreisen. Notieren Sie anschließend in der Tabelle, wie viele Siebenersträuße Sie erhalten haben und wie viele einzelne Blüten übrig geblieben sind. Wie viele Blüten sind es? Tragen Sie die Anzahl ein.

Beispiel:



Anzahl	81
--------	----

$$11 \cdot 7 = 77$$

Siebenersträuße	Einzelne Blüten
Zehner	Einer
11	4

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

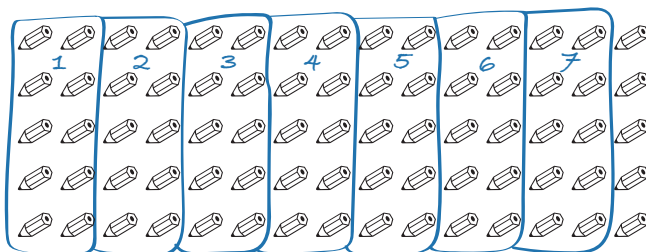
9.1b LÖSUNGEN – Bündelung (10er und 5er)

Bündeln Sie die Stifte zu Zehnerpaketen, indem Sie immer zehn Stifte markieren.

Notieren Sie anschließend in der Tabelle, wie viele Zehnerpakete Sie erhalten haben.

Wie viele Stifte sind es? Tragen Sie die Anzahl ein.

Beispiel:



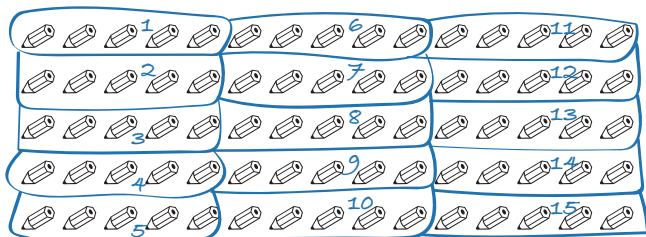
Anzahl	75
Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer
7	5

Bündeln Sie die Stifte zu Fünferpaketen, indem Sie immer fünf Stifte markieren.

Notieren Sie anschließend in der Tabelle, wie viele Fünferpakete Sie erhalten haben.

Wie viele Stifte sind es? Tragen Sie die Anzahl ein.

Beispiel:



Anzahl	75
Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünfer	Einer
15	0

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.2b LÖSUNGEN – Stellenwerttabelle

Tragen Sie die Hunderter (H), Zehner (Z) und Einer (E) in die Stellenwerttabelle ein.

Achten Sie darauf, wenn es auf einer Stelle zehn sind, dass eine neue Stelle links daneben besetzt wird.

Aufgaben		Stellenwerte		
		H	Z	E
1.	3 Z und 14 E		4	4
2.	7 E und 4 Z		4	7
3.	14 Z und 6 E	1	4	6
4.	23 E		2	3
5.	5 E und 7 Z		7	5
6.	12 E und 4 Z		5	2
7.	4 Z		4	0
8.	20 Z und 1 E	2	0	1
9.	1 H und 7 E	1	0	7
10.	2 H und 4 Z und 3 E	2	4	3
11.	56 E		5	6
12.	20 Z und 20 E	2	2	0
13.	9 Z und 16 E	1	0	6
14.	134 E	1	3	4

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.3a LÖSUNGEN – Zahlenschreibweise

Vervollständigen Sie die Tabelle.

Zahlenschreibweise		
Zahl	Zahlwort	Bedeutung
42	zweiundvierzig	4 Z und 2 E oder 42 E
37	siebenunddreißig	3 Z und 7 E oder 37 E
28	achtundzwanzig	2 Z und 8 E oder 28 E
64	vierundsechzig	6 Z und 4 E oder 64 E
91	einundneunzig	9 Z und 1 E oder 91 E
12	zwölf	1 Z und 2 E oder 12 E
79	neunundsiebzig	7 Z und 9 E oder 79 E
97	siebenundneunzig	9 Z und 7 E oder 97 E
85	fünfundachtzig	8 Z und 5 E oder 85 E
57	siebenundfünfzig	5 Z und 7 E oder 57 E
11	elf	1 Z und 1 E oder 11 E
33	dreiunddreißig	3 Z und 3 E oder 33 E
81	einundachtzig	8 Z und 1 E oder 81 E

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

9.4a LÖSUNGEN – Darstellungen

Stellen Sie die Zahlen jeweils in der unten stehenden Zeichnung dar. Es sind immer zehn Zehner nebeneinander dargestellt. In jedem Zehner sind zehn Einer gebündelt – jedes Kästchen entspricht einem Einer. Wie viele Zehner sind in der Zahl enthalten? Wie viele Einer sind nicht gebündelt? Markieren Sie die entsprechenden Felder für Zehner und Einer.

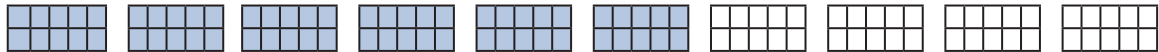
42



18



60



92



25

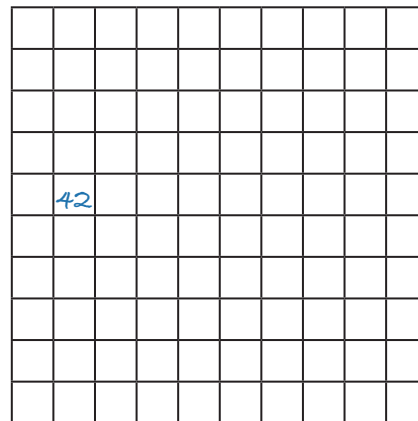
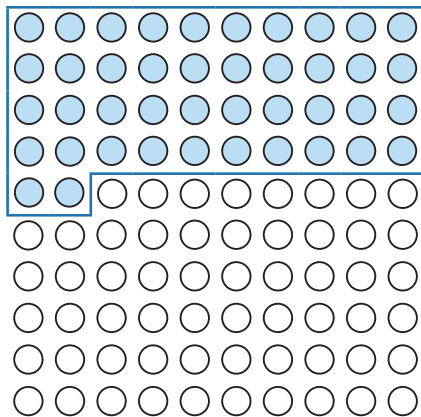


Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

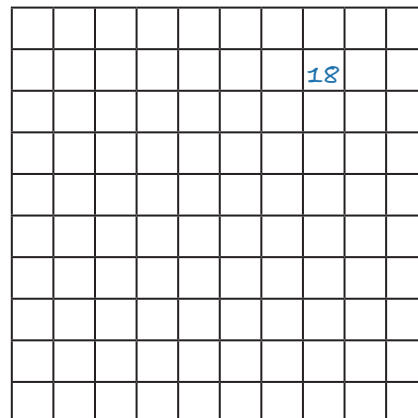
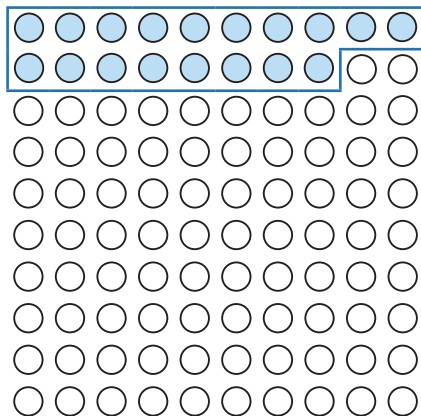
9.4b LÖSUNGEN – Hunderterfeld/Hundertertafel

Stellen Sie die angegebenen Zahlen dar. Umkreisen Sie in der linken Hunderterdarstellung die entsprechende Menge mit einem Stift oder markieren Sie diese farbig. Nutzen Sie dabei die Zehnerbündelung. In der Hundertertafel (rechte Darstellung) tragen Sie die Zahl in das entsprechende Feld ein.

42



18



60

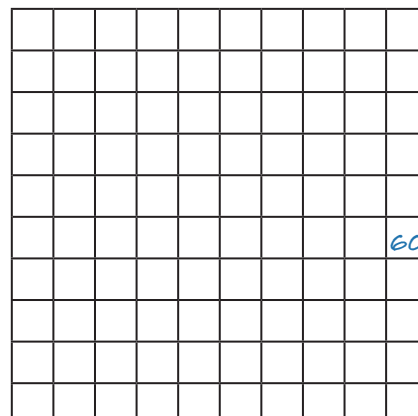
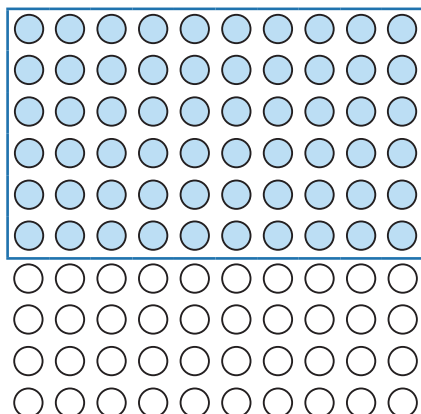


ABBILDUNG 9.1-1

Zehn Elemente bündeln Variante 1

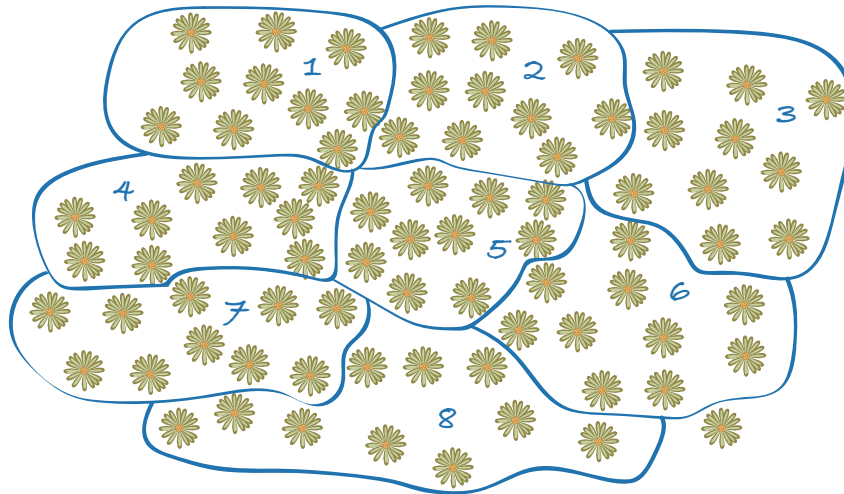
Zehnerstangen – Steckwürfel	Übrige Einer
Zehner	Einer
5	4

Zehn Elemente bündeln Variante 2

Zehn-Euro-Scheine	Ein-Euro-Münzen
Zehner	Einer
7	5

ABBILDUNG 9.1-6

Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1a – Teil 1

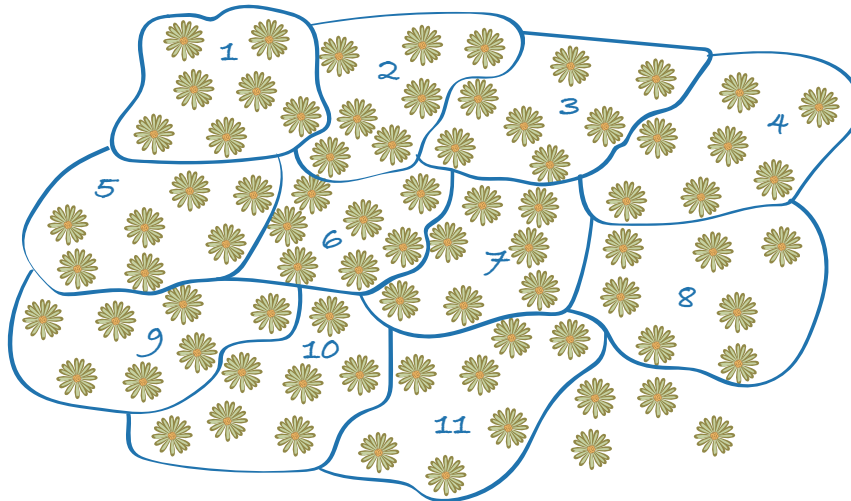


Anzahl	81
--------	----

Zehnersträuße	Einzelne Blüten
Zehner	Einer
8	1

ABBILDUNG 9.1-7

Siebener-Bündelung Aufgabenblatt 9.1a – Teil 2

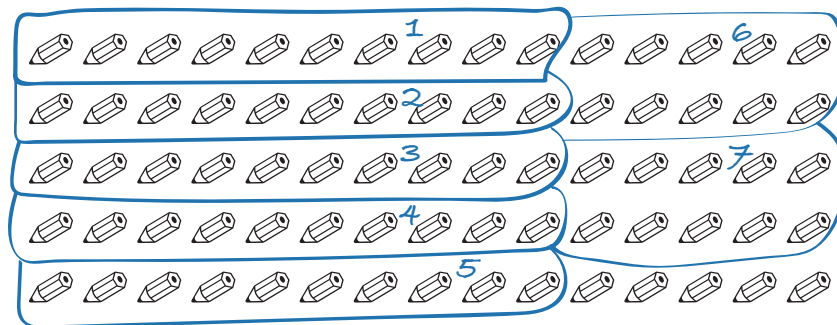


Anzahl	81
--------	----

Siebenersträuße	Einzelne Blüten
Siebener	Einer
11	4

ABBILDUNG 9.1-8

Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 1

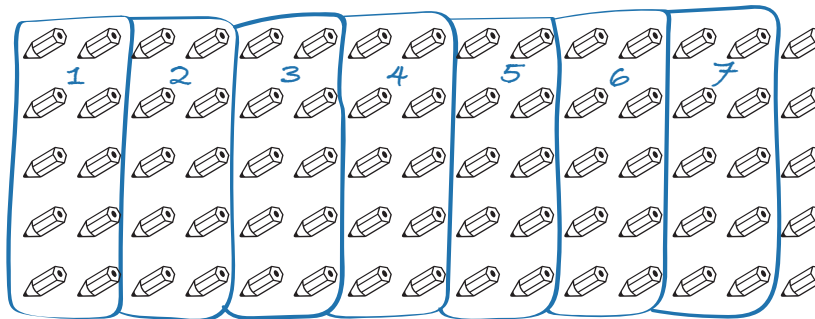


Anzahl	75
--------	----

Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer
7	5

ABBILDUNG 9.1-9

Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 2

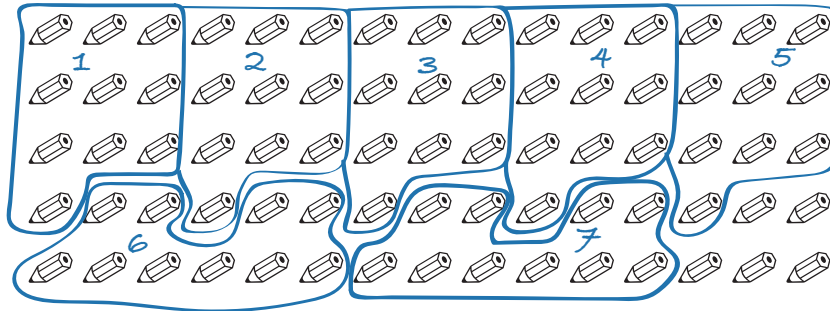


Anzahl	75
--------	----

Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer
7	5

ABBILDUNG 9.1-10

Zehnerbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 3

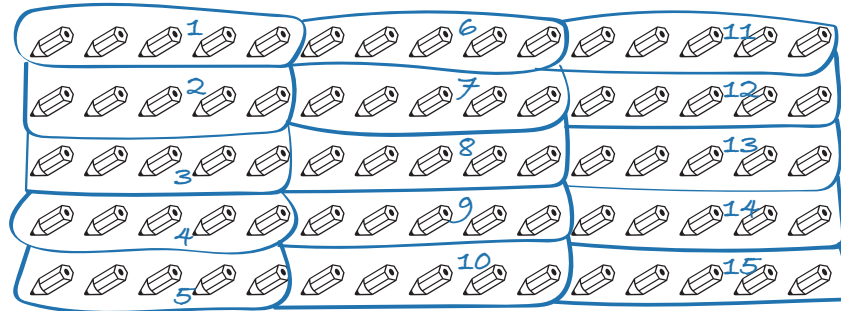


Anzahl	75
--------	----

Zehnerpakete	Einzelne Stifte
Zehner	Einer
7	5

ABBILDUNG 9.1-11

Fünferbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 1

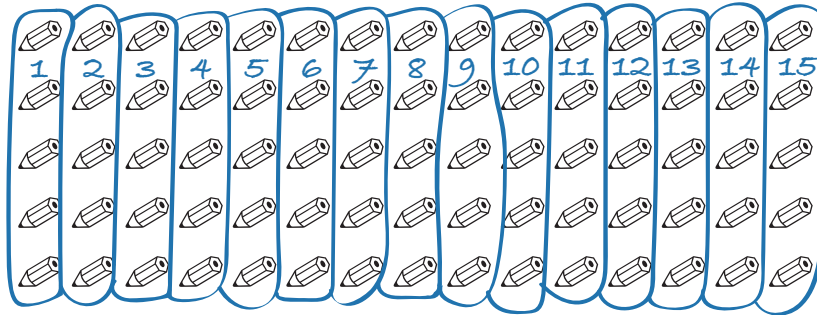


Anzahl	75
--------	----

Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünf	Einer
15	/

ABBILDUNG 9.1-12

Fünferbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 2

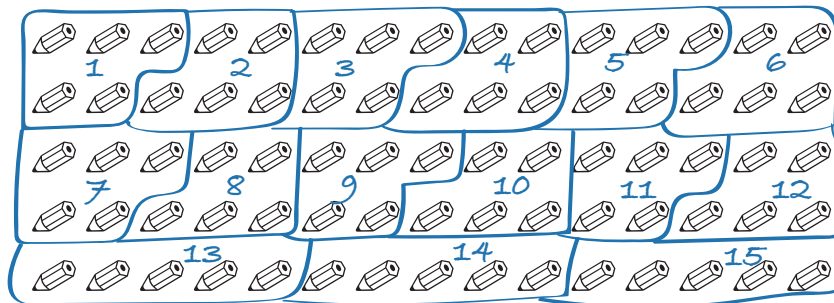


Anzahl	75
--------	----

Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünf	Einer
15	/

ABBILDUNG 9.1-13

Fünferbündelung Aufgabenblatt 9.1b – Variante 3



Anzahl	75
--------	----

Fünferpakete	Einzelne Stifte
Fünf	Einer
15	/

ABBILDUNG 9.2-2

**Mit dem Zehnerwürfel würfeln,
dafür Einer ablegen – 8 Einer**

Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
		8

ABBILDUNG 9.2-3

Vier Einer kommen dazu – 12 Einer

Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
		12

ABBILDUNG 9.2-4

Zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt und getauscht – 1 Zehner, 2 Einer

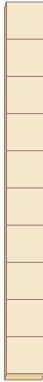
Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
	1	2

ABBILDUNG 9.2-5

Neun Einer kommen dazu – 1 Zehner, 11 Einer

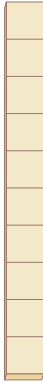
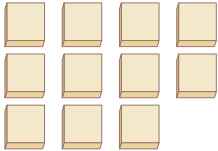
Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
	1	11

ABBILDUNG 9.2-6

Zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt – 2 Zehner, 1 Einer

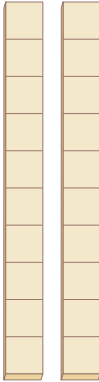
Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
	2	1

ABBILDUNG 9.2-7

4 Zehner und 6 Einer

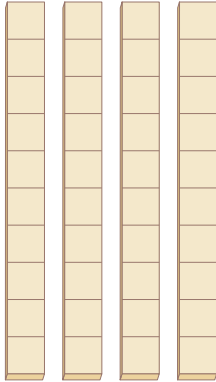
Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
	4	6

ABBILDUNG 9.2-8

Zehn Zehner werden zu einem Hunderter gebündelt – 1 Hunderter, 3 Einer

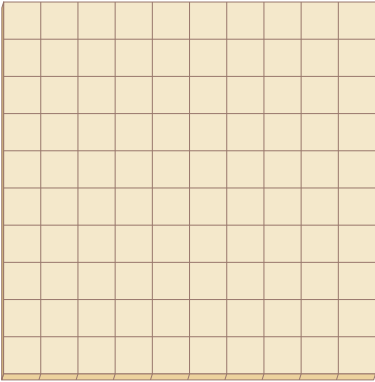
Stellenwerte		
Hunderter	Zehner	Einer
		
1	0	3

ABBILDUNG 9.3-1

Zahlen als Ziffern

Zahlen als Ziffern:

0	1	2	3
4	5	6	
7	8	9	

} ... es sind Zeichen

ABBILDUNG 9.3-2

Einstellige Zahlen

Einstellige Zahlen		
Zahl	Bedeutung	Sprechweise
0	0 E	Null
1	1 E	Eins
2	2 E: $1 + 1$	Zwei
3	3 E: $1 + 1 + 1$	Drei
4	4 E: $1 + 1 + 1 + 1$	Vier
5	5 E: $1 + 1 + 1 + 1 + 1$	Fünf
6	6 E: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	Sechs
7	7 E: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	Sieben
8	8 E: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	Acht
9	9 E: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	Neun

ABBILDUNG 9.3-3

Schreib- und Sprechweise von zweistelligen Zahlen – Teil 1

Zweistellige Zahlen				
Zahl	Bedeutung	Mögliche Sprechweisen		Tatsächliche Sprechweise
10	1 Z und 0 E	eins-zig	Einszehn	zehn
20	2 Z und 0 E	zwei-zig	Zweizehn	zwan-zig
30	3 Z und 0 E	drei-zig	Dreizehn	drei-Big
40	4 Z und 0 E	vier-zig	Vierzehn	vier-zig
50	5 Z und 0 E	fünf-zig	Fünfzehn	fünf-zig
60	6 Z und 0 E	sechs-zig	Sechszehn	sech-zig
70	7 Z und 0 E	sieben-zig	Siebenzehn	sieb-zig
80	8 Z und 0 E	acht-zig	Achtzehn	acht-zig
90	9 Z und 0 E	neun-zig	Neunzehn	neun-zig

ABBILDUNG 9.3-4

Zahlen sprechen und schreiben – sechsundvierzig und 46

Sprechen:	Einer		Zehner
	sechs	und	vierzig
Schreiben:	Zehner		Einer
	4		6

ABBILDUNG 9.3-5

Schreib- und Sprechweise von zweistelligen Zahlen – Teil 2a)

Zahl	Bedeutung	Mögliche Sprechweisen		Tatsächliche Sprechweise
10	1 Z und 0 E	eins-zig	zehn	zehn
11	1 Z und 1 E	eins-und-eins-zig	zehneins	elf
12	1 Z und 2 E	zwei-und-eins-zig	zehnzwei	zwölf
13	1 Z und 3 E	drei-und-eins-zig	zehndrei	dreizehn
14	1 Z und 4 E	vier-und-eins-zig	zehnvier	vierzehn
15	1 Z und 5 E	fünf-und-eins-zig	zehnfünf	fünfzehn
16	1 Z und 6 E	sechs-und-eins-zig	zehnsechs	sechzehn
17	1 Z und 7 E	sieben-und-eins-zig	zehnsieben	siebzehn
18	1 Z und 8 E	acht-und-eins-zig	zehnacht	achtzehn
19	1 Z und 9 E	neun-und-eins-zig	zehnneun	neunzehn
20	2 Z und 0 E	zwei-zig	zweizehn	zwanzig

ABBILDUNG 9.3-5

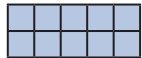
Schreib- und Sprechweise von zweistelligen Zahlen – Teil 2b)

Zahl	Bedeutung	Mögliche Sprechweisen		Tatsächliche Sprechweise
21	2 Z und 1 E	eins-und-zwei-zig	zweizehneins	einundzwanzig (sprachliche Fortsetzung von oben wäre eigentlich einzwanzig)
22	2 Z und 2 E	zwei-und-zwei-zig	zweizehnzwei	zweiundzwanzig (zweizwanzig)
23	2 Z und 3 E	drei-und-zwei-zig	zweizehndrei	dreiundzwanzig (dreizwanzig)
24	2 Z und 4 E	vier-und-zwei-zig	zweizehnvier	vierundzwanzig (vierzwanzig)
25	2 Z und 5 E	fünf-und-zwei-zig	zweizehnfünf	fünfundzwanzig (fünfzwanzig)
26	2 Z und 6 E	sechs-und-zwei-zig	zweizehnsechs	sechsendzwanzig (sechszwanzig)
27	2 Z und 7 E	sieben-und-zwei-zig	zweizehnsieben	siebenundzwanzig (siebenzwanzig)
28	2 Z und 8 E	acht-und-zwei-zig	zweizehnacht	achtundzwanzig (achtzwanzig)
29	2 Z und 9 E	neun-und-zwei-zig	zweizehnneun	neunundzwanzig (neunzwanzig)
30	3 Z und 0 E	drei-zig	dreizehn	dreiBig

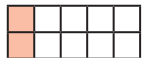
Darstellung von Zahlen



Anordnung von zehn Zehnern mit jeweils zehn Einern



Visualisierung eines Zehners durch farbiges Ausmalen



Visualisierung von zwei Einern durch farbiges Ausmalen

ABBILDUNGEN 9.4-4

Aufgabenblatt 9.4a – Auswertung

42



18



60



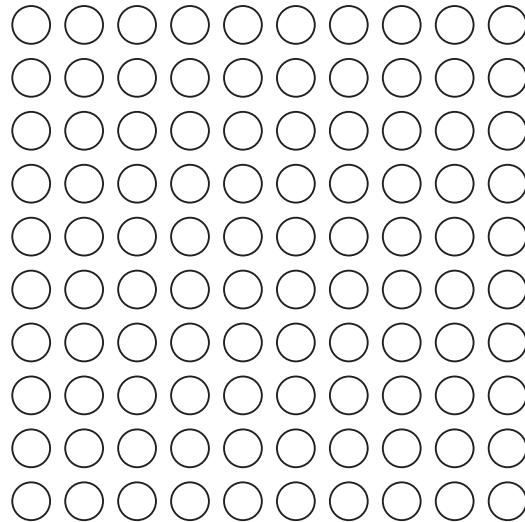
92



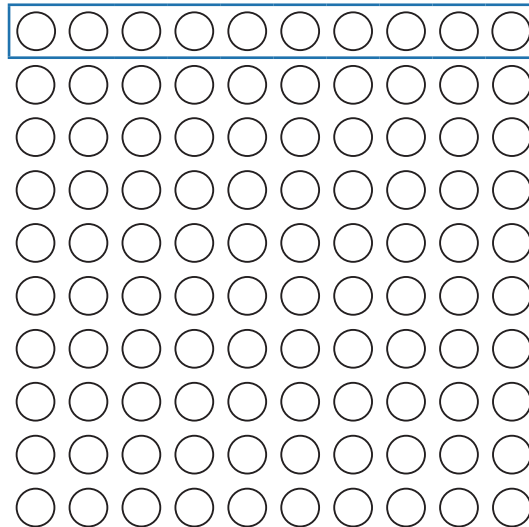
25



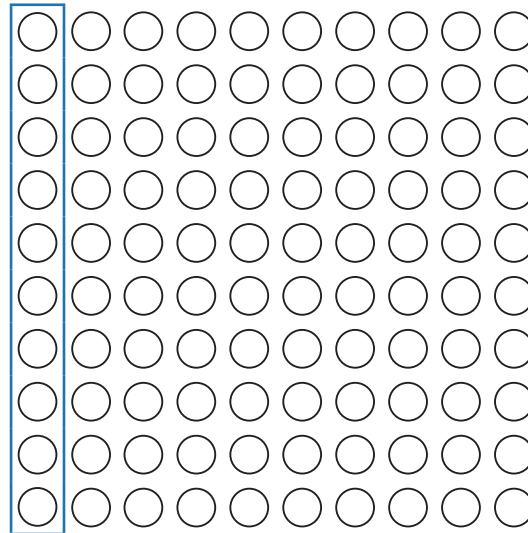
Zehn Reihen zu je zehn Chips – 10-mal-10-Anordnung



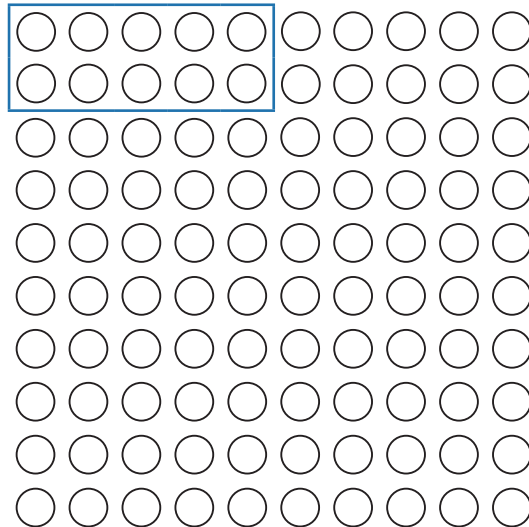
Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 1



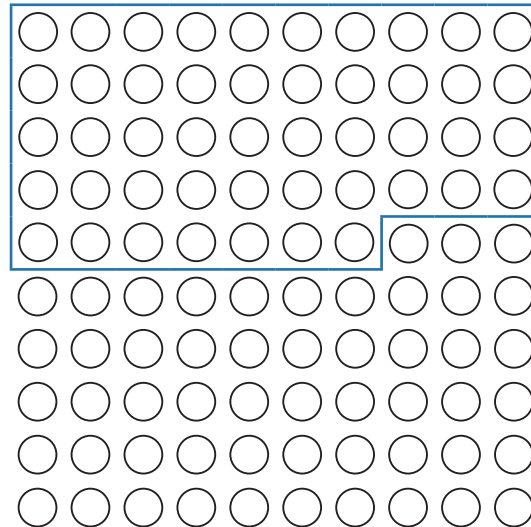
Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 2



Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 3



Darstellung der 47



Hundertertafel/Hunderterfeld – erster Zehner

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

ABBILDUNG 9.4-11

Hundertertafel

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

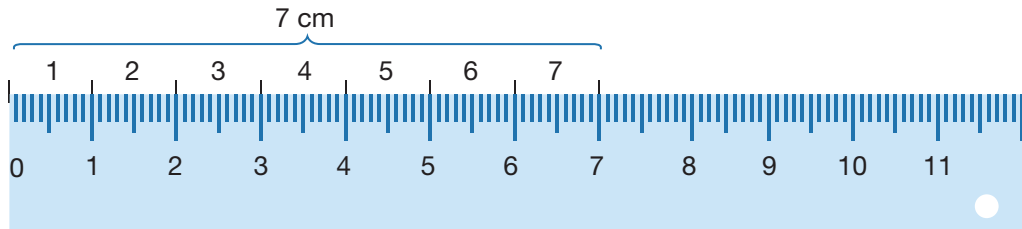
ABBILDUNG 9.4-12

Die Zahl 16 entspricht in der Hundertertafel 16 Zellen

					16				

ABBILDUNG 9.4-16

**Die Zahl 7 auf dem Metermaß
entspricht sieben Zentimetern**



Zahlenstrahl bis 10

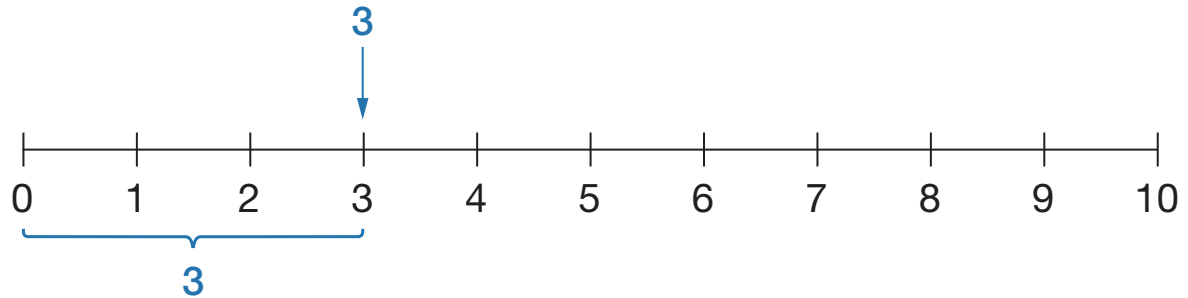
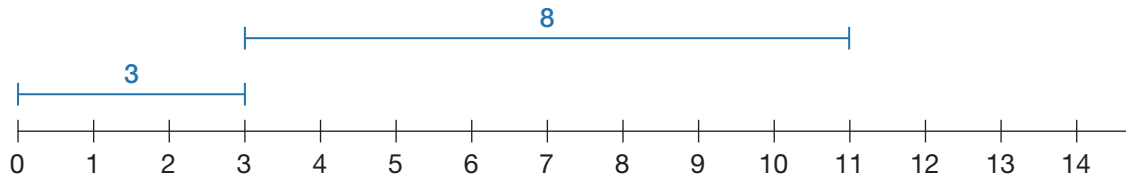
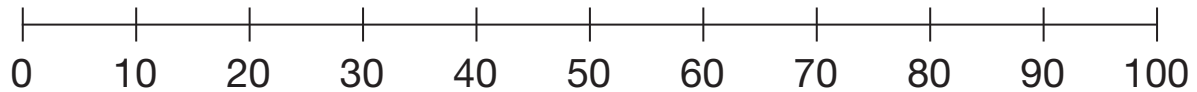


ABBILDUNG 9.4-18

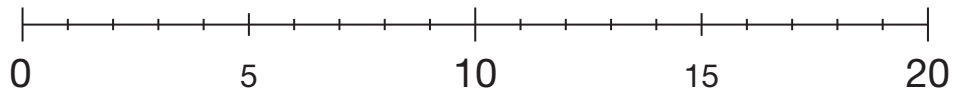
Zahlenstrahl: 3 und 8 sind 11



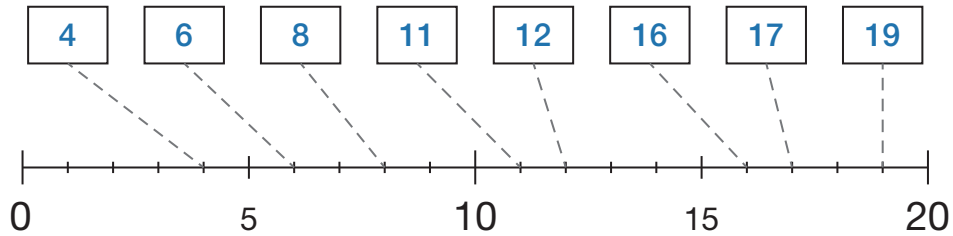
Zahlenstrahl bis 100



Zahlenstrahl mit Fünferabständen



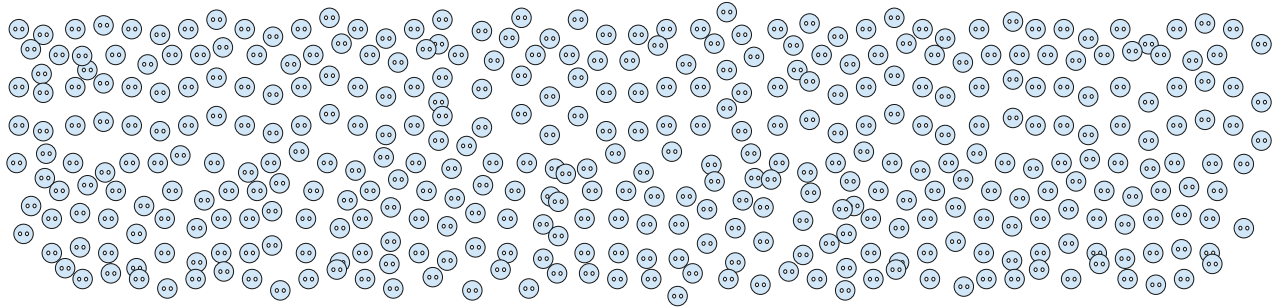
Eintragen von Zahlen am Zahlenstrahl



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

11.1a Das Dezimalsystem: Bündelung großer Mengen

1. Schätzen Sie die Anzahl der Knöpfe.



Meine Schätzung:

2. Bestimmen Sie die genaue Anzahl der Knöpfe ohne zu zählen, sondern durch Bündelung. Zur Vereinfachung finden Sie auf Seite 2 eine sortierte Menge an Punkten (genau so viele wie Knöpfe auf dem Bild). Notieren Sie die Anzahl Ihrer erfassten Bündel. Probieren Sie unterschiedliche Bündelungseinheiten zwischen 2 und 9 aus.

Bündel:	Einer:
zweier	
198	/

Bündel:	Einer:

Bündel:	Einer:

Bündel:	Einer:

Bündel:	Einer:

Bündel:	Einer:

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

A 15x15 grid of black dots on a white background. The first two columns are highlighted with yellow dashed rectangular boxes. The grid consists of 15 rows and 15 columns of dots. The first column has dots in rows 1 through 14. The second column has dots in rows 1 through 15. All other columns (3 through 15) have dots in all 15 rows.

3. Bündeln Sie nun in Zehner-Bündel.

Bündel:	Einer:
zehner	

A 20x20 grid of black dots on a white background. The dots are arranged in a regular pattern, with 20 dots per row and 20 dots per column. The bottom row is partially cut off, showing only the first four dots.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

4. Bündeln Sie Ihre Bündel zu „Bündel-Bündeln“. Wählen Sie verschiedene Bündelgrößen oder auch gleichgroße Bündelgrößen.
Tragen Sie die Werte in die Tabelle ein. Was fällt Ihnen auf?

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	Einer
	fünfer	vierer	Zweier	
1.			198	/
2.		49	2	/
3.	9	4	2	/

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Dreier	
1.			132	
2.				
3.				

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
			vierer	
1.			99	
2.				
3.				

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Fünfer	
1.			79	1
2.				
3.				

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Achter	
1.			49	4
2.				
3.				

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
			Neuner	
1.			44	
2.				
3.				

Mir fällt auf: _____

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Leere Tabellen für die Bündelung von Knöpfen:

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
1.				
2.				
3.				

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
1.				
2.				
3.				

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
1.				
2.				
3.				

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
1.				
2.				
3.				

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
1.				
2.				
3.				

Stufen	Bündel	Bündel	Bündel	E
1.				
2.				
3.				

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

11.1b Das Dezimalsystem: Stellenwerte umwandeln

1. Schreiben Sie die Nachbarzehner auf.

_____ 299 _____ _____ 405 _____
 _____ 360 _____ _____ 510 _____
 _____ 168 _____ _____ 920 _____

2. Schreiben Sie die Nachbarhunderter auf.

_____ 299 _____ _____ 405 _____
 _____ 360 _____ _____ 510 _____
 _____ 168 _____ _____ 920 _____

3. Vergleichen Sie jeweils die zwei Zahlen miteinander und tragen Sie das entsprechende Vergleichszeichen ($<$ $=$ $>$) ein.

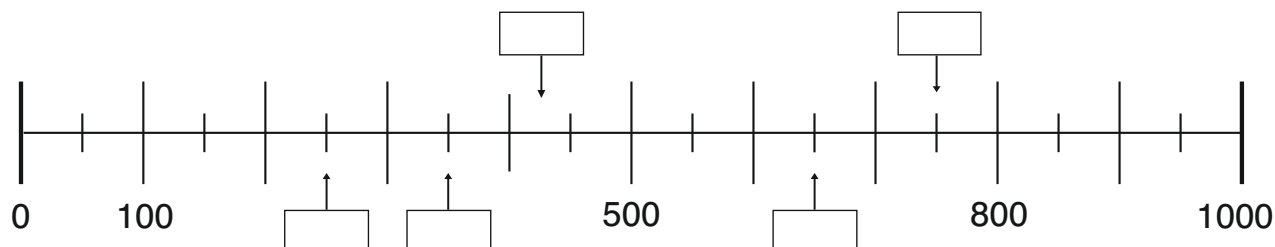
126 216 131 311 813 803
 608 607 545 554 989 999
 221 122 412 412 363 636

4. Ergänzen Sie die fehlenden Pfeile und Zahlen und notieren Sie die Zahlen der Größe nach, beginnend mit der kleinsten.



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

5. Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen.



6. Schreiben Sie die Zahlen in der richtigen Reihenfolge auf.

a) Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl und verwenden Sie das Zeichen „<“:

965, 343, 589, 434, 353, 109, 980, 809, 201, 102

b) Beginnen Sie mit der größten Zahl und verwenden Sie das Zeichen „>“:

325, 667, 164, 572, 257, 161, 611, 821, 907, 709

7. Denken Sie sich eine 3-stellige Zahl aus und notieren Sie zu dieser Zahl die gesuchten Angaben.

Vorgänger und Nachfolger:

Nachbarzehner:

Nachbarhunderter:

Als HZE notiert:

Als Zahlwort:

Am Zahlenstrahl:

Einige Zahlen, die größer sind:

Einige Zahlen, die kleiner sind:

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

11.2a Das Dezimalsystem: Stellenwertumwandlungen

1. Wandeln Sie in andere Stellenwerte um und schreiben Sie das Ergebnis als Zahl. Sortieren Sie nach der Wertigkeit der Stellen, also HZE.

Bsp.: $18\text{E} + 21\text{E} + 10\text{Z} = \boxed{1\text{Z}} \textcircled{8\text{E}} + \boxed{2\text{Z}} \textcircled{1\text{E}} + \boxed{1\text{H}} = \boxed{1\text{H}} \boxed{3\text{Z}} \textcircled{9\text{E}}$ Zahl: 139

$$12\text{Z} + 23\text{E} + 71\text{Z} =$$

$$22\text{Z} + 2\text{H} + 98\text{E} =$$

$$44\text{E} + 36\text{Z} =$$

$$135\text{E} + 2\text{H} + 31\text{Z} =$$

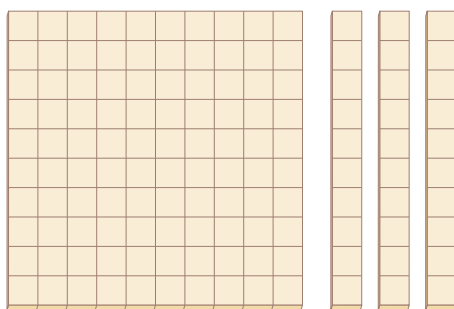
2. Schreiben Sie die **Zahlwörter** zu den Zahlen aus Aufgabe 1 auf.

Bsp.: 139 → einhundert neun und dreißig

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

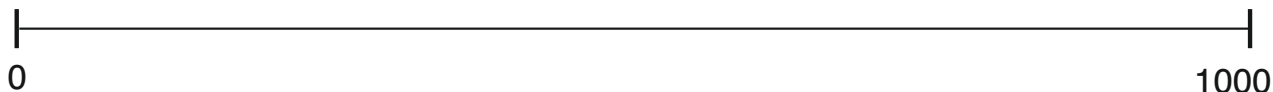
3. Stellen Sie die Zahlen aus Aufgabe 1 in Einern, Zehnern und Hundertern mit **Mehrsystemblöcken** und in der **Stellenwerttabelle** dar.

Beispiel:



H	Z	E
1	3	9

4. Tragen Sie die Zahlen aus Aufgabe 1 am **Zahlenstrahl** ein.



5. Tragen Sie folgende Zahlen in die **Stellenwerttabelle** ein.

	H	Z	E
409			
Zweihundertvierzehn			
$700 + 260 + 14$			
9Z 31E 5H			
■■■■■■■■■■ 			

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

6. Beantworten Sie die folgenden Fragen.

Wie heißt die größte 3-stellige Zahl?

Wie heißt die kleinste 3-stellige Zahl?

Wie heißt die größte 2-stellige Zahl?

Wie heißt die kleinste 2-stellige Zahl?

Wie heißt die größte 4-stellige Zahl?

Wie heißt die kleinste 4-stellige Zahl?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

11.5a Runden, schätzen und überschlagen

1. Ermitteln Sie die Überschläge. Prüfen Sie, ob die Antworten stimmen und kreuzen Sie an.

Aufgabe	Antworten	richtig	falsch
$138 + 198$	< 300	☐	☐
$78 + 152 + 251$	≈ 400	☐	☐
$80 + 150 + 199 + 310$	< 600	☐	☐
$65 \text{ ct} + 45 \text{ ct} + 30 \text{ ct}$	$> 1,50 \text{ €}$	☐	☐
$389 \text{ €} + 49 \text{ €} + 47 \text{ €}$	$< 500 \text{ €}$	☐	☐
Spielergebnisse von Karen: 346 P., 165 P., 98 P.	Hans hat insgesamt 500 P. und gewonnen.	☐	☐
Eine Schule hat 8 Klassen.	Das sind mehr als 1000 Schüler/-innen.	☐	☐
In wie viele Linienbusse passen 890 Passagiere?	maximal 3	☐	☐



Notizen:

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

2. Welche Aufgaben können nicht stimmen? Begründen Sie.

a) Ein Tante-Emma-Laden verkauft am Tag 1678 Liter Milch.

b) In eine Streichholzschachtel passen 900 Büroklammern.

c) 1000 Blatt Papier im Stapel sind so hoch wie ein Esstisch.

d) In die Aktentasche von Herrn Müller passen 78 Pakete Zucker (1 kg).

e) Die längste Eisenbahnbrücke der Welt ist so lang wie 35 Autos.

f) Für 160 Aktenordner DIN A4 breit braucht man 2 Umzugskartons (groß).

g) Ein Mensch, der 1000 Tage alt ist, geht schon zur Schule.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

3. Schätzen Sie zunächst und prüfen Sie dann Ihr Ergebnis.

- a) Wie viele Seiten Papier befinden sich im Raum des Kurses (dafür sollen alle Teilnehmer/-innen ihre in den Taschen befindlichen Papiere auf die Tische legen)

Geschätzt: _____

Geprüft: _____

- b) Wie viele Einerwürfel von den Mehrsystemblöcken (Dienes-Material) oder Steckwürfel passen in ein Saftglas à 0,2l?

Geschätzt: _____

Geprüft: _____

- c) 5 Vollkornbrötchen wiegen so viel wie 10 Eier.

Geschätzt: _____

Geprüft: _____

- d) Wie viele Erwachsene würden stehend in den Kurs-Raum der VHS passen?

Geschätzt: _____

Geprüft: _____

- e) Wie viele Wörter stehen auf einer voll bedruckten Buchseite?

Geschätzt: _____

Geprüft: _____

- f) Wie viele CDs passen auf ein Regalbrett von 1,50m?

Geschätzt: _____

Geprüft: _____

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

11.1a LÖSUNGEN – Das Dezimalsystem: Bündelung großer Mengen

1. Schätzen Sie die Anzahl der Knöpfe.

Meine Schätzung:

Die Schätzungen können stark variieren. Tatsächlich sind es 396 Knöpfe.

2. Bestimmen Sie die genaue Anzahl der Knöpfe ohne zu zählen, sondern durch Bündelung. Zur Vereinfachung finden Sie auf Seite 2 eine sortierte Menge an Punkten (genau so viele wie Knöpfe auf dem Bild). Notieren Sie die Anzahl Ihrer erfassten Bündel. Probieren Sie unterschiedliche Bündelungseinheiten zwischen 2 und 9 aus.

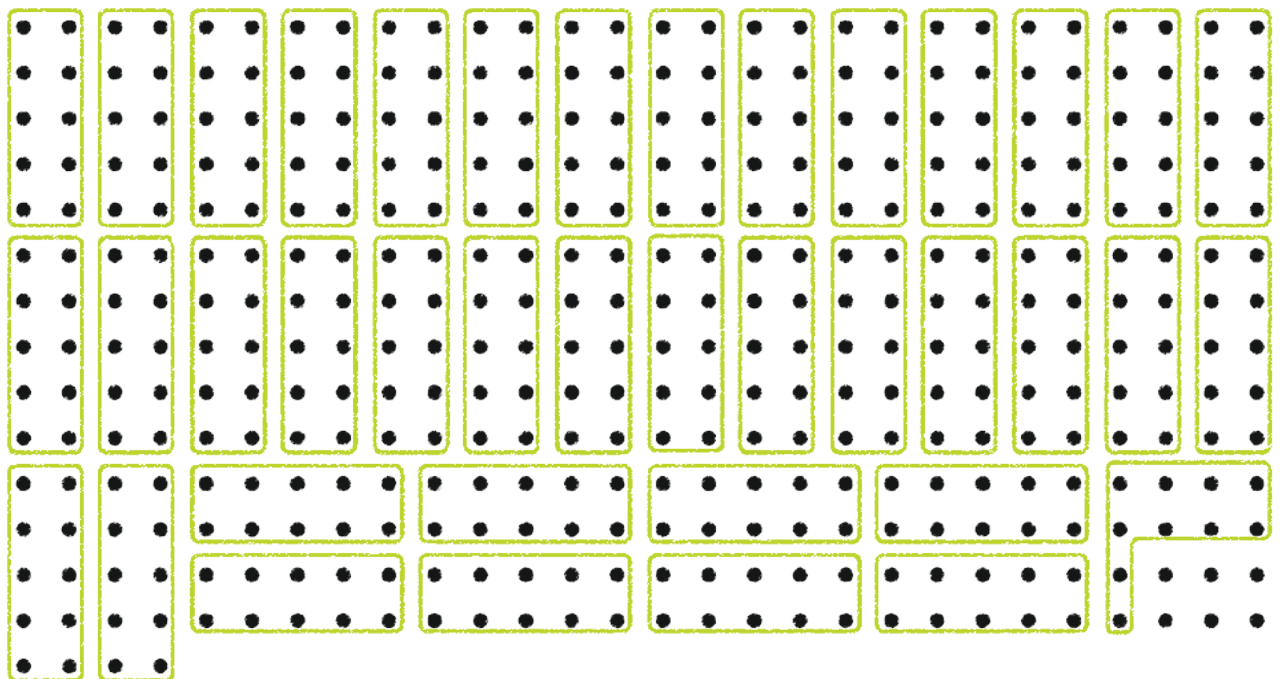
Mögliche Bündelungen sind:

Zweier-Bündel:	198	
Dreier-Bündel:	132	
Vierer-Bündel:	99	
Fünfer-Bündel:	79	plus 1 Einer
Sechser-Bündel:	66	
Siebener-Bündel:	56	plus 4 Einer
Achter-Bündel:	49	plus 4 Einer
Neuner-Bündel:	44	

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

3. Bündeln Sie nun in Zehner-Bündel.

Bündel:	Einer:
zehner	
39	6



4. Bündeln Sie Ihre Bündel zu „Bündel-Bündeln“. Wählen Sie verschiedene Bündelgrößen oder auch gleichgroße Bündelgrößen. Tragen Sie die Werte in die Tabelle ein. Was fällt Ihnen auf?

Hier gibt es unzählige Variationen. Es kommt darauf an, wie gebündelt wurde.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

11.1b LÖSUNGEN – Das Dezimalsystem: Stellenwerte umwandeln

1. Schreiben Sie die Nachbarzehner auf.

290 299 300 400 405 410
 350 360 370 500 510 520
 160 168 170 910 920 930

2. Schreiben Sie die Nachbarhunderter auf.

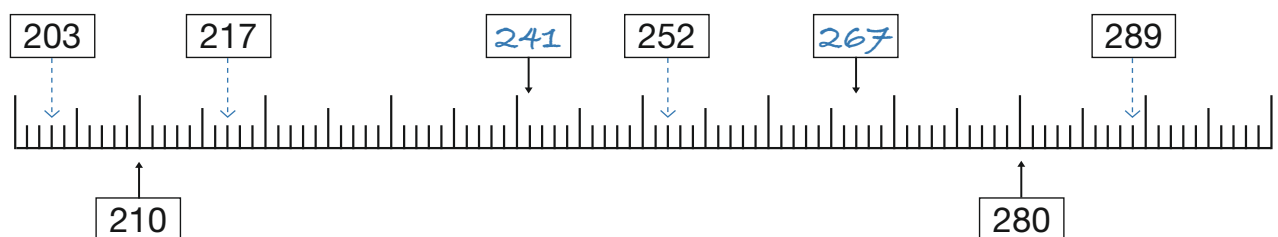
200 299 300 400 405 500
 300 360 400 500 510 600
 100 168 200 900 920 1000

3. Vergleichen Sie jeweils die zwei Zahlen miteinander und tragen Sie das entsprechende Vergleichszeichen ($<$ $=$ $>$) ein.

126 $<$ 216 131 $<$ 311 813 $>$ 803
 608 $>$ 607 545 $<$ 554 989 $<$ 999
 221 $>$ 122 412 $=$ 412 363 $<$ 636

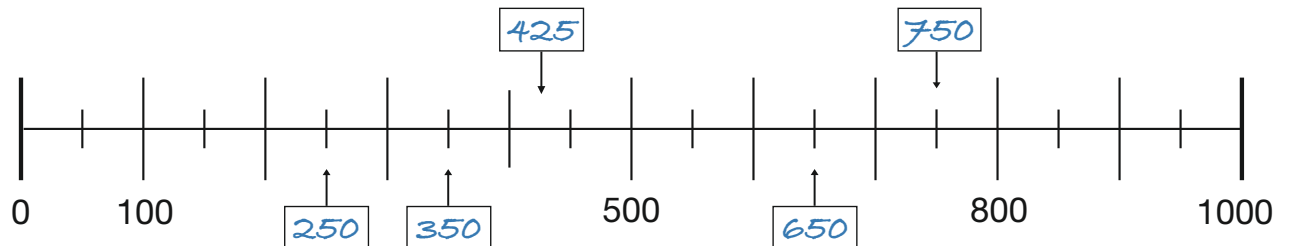
4. Ergänzen Sie die fehlenden Pfeile und Zahlen und notieren Sie die Zahlen der Größe nach, beginnend mit der kleinsten.

203 $<$ 210 $<$ 217 $<$ 241 $<$ 252 $<$ 267 $<$ 280 $<$ 289



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5. Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen.



6. Schreiben Sie die Zahlen in der richtigen Reihenfolge auf.

a) Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl und verwenden Sie das Zeichen „<“:

965, 343, 589, 434, 353, 109, 980, 809, 201, 102

$102 < 109 < 201 < 343 < 353 < 434 < 589 < 809 < 965 < 980$

b) Beginnen Sie mit der größten Zahl und verwenden Sie das Zeichen „>“:

325, 667, 164, 572, 257, 161, 611, 821, 907, 709

$907 > 821 > 709 > 667 > 611 > 572 > 325 > 257 > 164 > 161$

7. Denken Sie sich eine 3-stellige Zahl aus und notieren Sie zu dieser Zahl die gesuchten Angaben.

Hier hängt die Lösung von der gewählten Zahl ab.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

11.2a LÖSUNGEN – Das Dezimalsystem: Stellenwertumwandlungen

1. Wandeln Sie in andere Stellenwerte um und schreiben Sie das Ergebnis als Zahl. Sortieren Sie nach der Wertigkeit der Stellen, also HZE.

Bsp.: $18E + 21E + 10Z = 1Z \text{ (8E)} + 2Z \text{ (1E)} + 1H = 1H \text{ 3Z (9E)}, \text{Zahl: } 139$

$12Z + 23E + 71Z = 1H \text{ 2Z} + 2Z \text{ 3E} + 7H \text{ 1Z} = 8H + 3Z + 6E, \text{Zahl: } 853$

$22Z + 2H + 98E = 2H \text{ 2Z} + 2H + 9Z \text{ 8E} = 4H \text{ 11Z } 8E = 5H + 1Z + 8E, \text{Zahl: } 518$

$44E + 36Z = 4Z \text{ 4E} + 3H \text{ 6Z} = 10Z + 4E + 3H = 1H + 4E + 3H = 4H + E, \text{Zahl: } 404$

$135E + 2H + 31Z = 1H \text{ 3Z } 5E + 2H + 3H \text{ 1Z} = 6H + 4Z + 5E, \text{Zahl: } 645$

2. Schreiben Sie die **Zahlwörter** zu den Zahlen aus Aufgabe 1 auf.

Bsp.: 139 → einhundert, neun und dreißig

853: Achthundert, drei und fünfzig

518: Fünfhundert und acht zehn

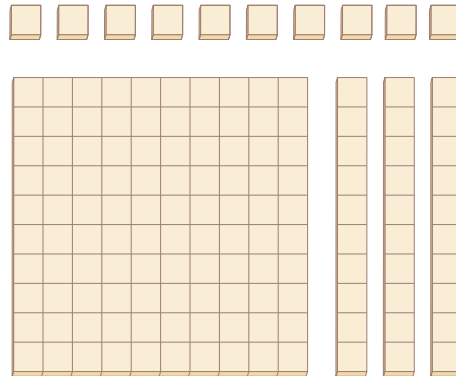
404: vierhundert und vier

645: Sechshundert, fünf und vierzig

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

3. Stellen Sie die Zahlen aus Aufgabe 1 in Einern, Zehnern und Hundertern mit **Mehrsystemblöcken (Dienes-Material¹)** und in der **Stellenwert-tabelle** dar.

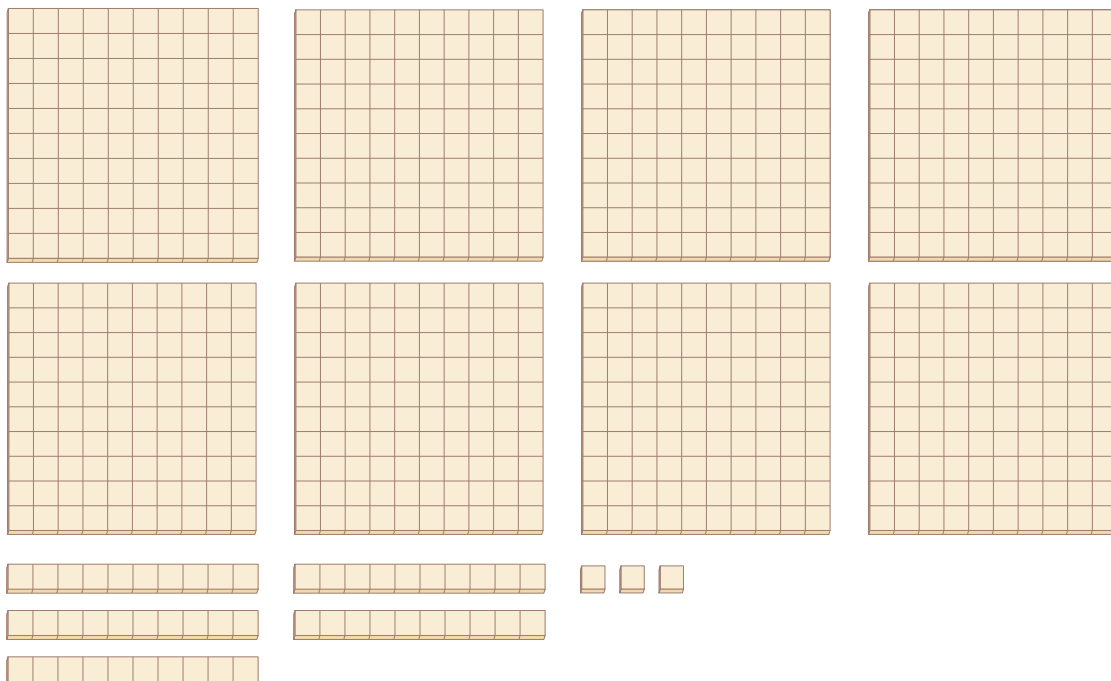
Beispiel:



H	Z	E
1	3	9
8	5	3
5	1	8
4	0	4
6	4	5

Darstellung mit Mehrsystemblöcken:

853:



¹ Wenn keine Mehrsystemblöcke in ausreichender Anzahl zur Verfügung stehen, bietet sich auch Spielgeld an. Hier sollten allerdings ausschließlich Hundert-Euro-Scheine, Zehn-Euro-Scheine und Ein-Euro-Münzen verwendet werden, um die Analogie zur Bündelung im Stellenwertsystem zu erhalten. Andere Geldscheine wie z. B. 20-Euro-Scheine weichen vom Stellenwertsystem der Zahlen ab.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

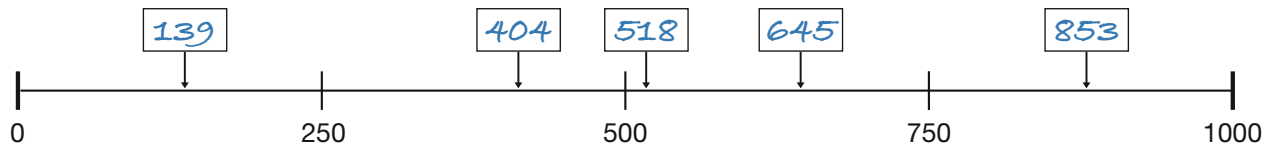
518:

404:

645:

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

4. Tragen Sie die Zahlen aus Aufgabe 1 am **Zahlenstrahl** ein.



5. Tragen Sie folgende Zahlen in die **Stellenwerttabelle** ein.

	H	Z	E
409	4	0	9
Zweihundertvierzehn	2	1	4
$700 + 260 + 14$	9	7	4
9 Z 31 E 5 H	6	2	1
	8	3	1

6. Beantworten Sie die folgenden Fragen.

Wie heißt die größte 3-stellige Zahl? 999

Wie heißt die kleinste 3-stellige Zahl? 100

Wie heißt die größte 2-stellige Zahl? 99

Wie heißt die kleinste 2-stellige Zahl? 10

Wie heißt die größte 4-stellige Zahl? *9.999*

Wie heißt die kleinste 4-stellige Zahl 1.000

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/Teile	Dezimalsystem	

11.5a LÖSUNGEN – Runden, schätzen und überschlagen

1. Ermitteln Sie die Überschläge. Prüfen Sie, ob die Antworten stimmen und kreuzen Sie an.

Aufgabe	Antworten	überschlag	richtig	falsch
138 + 198	< 300	$140 + 200 = 340$		☒
78 + 152 + 251	≈ 400	$80 + 150 + 250 = 480$		☒
80 + 150 + 199 + 310	< 600	$80 + 150 + 200 + 300 = 730$		☒
65 ct + 45 ct + 30 ct	> 1,50 €	$70 \text{ ct} + 50 \text{ ct} + 30 \text{ ct} = 1,50 \text{ €}$		☒
389 € + 49 € + 47 €	< 500 €	$390 \text{ €} + 50 \text{ €} + 50 \text{ €} = 490 \text{ €}$	☒	
Spielergebnisse von Karen: 346 P., 165 P., 98 P.	Hans hat insgesamt 500 P. und gewonnen.	$350 \text{ P.} + 170 \text{ P.} + 100 \text{ P.} = 630 \text{ P.}$		☒
Eine Schule hat 8 Klassen.	Das sind mehr als 1000 Schüler/-innen.	Selbst bei großen Klassen à 30 Schüler/-innen sind das $8 \cdot 30 = 240 \text{ Sch.}$		☒
In wie viele Linienbusse passen 890 Passagiere?	maximal 3	Das wären rd. $900 : 3 = 300 \text{ P.}$		☒

2. Welche Aufgaben können nicht stimmen? Begründen Sie.

- a) Ein Tante-Emma-Laden verkauft am Tag 1678 Liter Milch.
1678 l Milch am Tag würde bedeuten, dass bei 8 Stunden Öffnungszeit mehr als 200 l Milch stündlich verkauft werden müssten. Das ist für einen Tante-Emma-Laden sehr viel und eher unwahrscheinlich.
- b) In eine Streichholzschachtel passen 900 Büroklammern.
Eine Handvoll Büroklammern sind je nach Größe der Hand ca. 50–100 Büroklammern und eine Handvoll Büroklammern passt nicht in eine Streichholzschachtel.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

- c) 1000 Blatt Papier im Stapel sind so hoch wie ein Esstisch.

500 Blatt Papier sind ca. 5 cm hoch, dann müsste der Esstisch 10 cm hoch sein...

- d) In die Aktentasche von Herrn Müller passen 78 Pakete Zucker (1 kg).

78 Pakete Zucker passen in einen großen Wanderrucksack (ca. 78 l Volumen), Aktentaschen sind kleiner als große Wanderrucksäcke.

- e) Die längste Eisenbahnbrücke der Welt ist so lang wie 35 Autos.

Ein Auto ist etwa 4–5 m lang (Mittelklasse-Wagen), 35 Autos wären dann etwa 140–175 m lang (Stoßstange an Stoßstange – die Länge eines Fußballfeldes ist 100 m), dann müsste also die längste Eisenbahnbrücke der Welt relativ kurz sein.

Tatsächlich ist die derzeit längste Eisenbahn-Brücke der Welt 54000 m (54 km) lang, also $54000/5 = 10800$ Autos (540 Fußballfelder) lang.

- f) Für 160 Aktenordner DIN A4 breit braucht man 2 Umzugskartons (groß).

160 Aktenordner auf zwei Kartons verteilt, bedeutet, dass in jeden Karton die Hälfte, also 80 Aktenordner passen müssten – unmöglich.

- g) Ein Mensch, der 1000 Tage alt ist, geht schon zur Schule.

1 Jahr hat 365 Tage, dann ist ein Mensch mit 1000 Tagen fast 3 Jahre alt – und sicher noch nicht in der Schule.

3. Schätzen Sie zunächst und prüfen Sie dann Ihr Ergebnis.

Hier hängt die Lösung von den Schätzungen und Gegebenheiten vor Ort ab.

Inhaltsverzeichnis

13 MULTIPLIKATION (Alina Guther unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I	Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?	2
II	Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?	4
III	An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?	5
IV	Wo finden sich didaktische Erläuterungen?	5
V	Welche Materialien werden benötigt?	7
13.1	Die Operationslogik der Multiplikation	7
13.1.1	Kursgespräch – Mengenhandlung Multiplikation	7
13.1.2	Partnerarbeit – Mengenhandlung Multiplikation	11
13.1.3	Einzelarbeit – Rechenskizzen/Zusammenhang von Addition und Multiplikation	13
13.1.4	Einzelarbeit – Gesamt- und Teilmengen bei der Multiplikation	16
13.1.5	Einzelarbeit – Funktion der Faktoren/Faktorentausch	19
13.2	Das kleine Einmaleins	28
13.2.1	Kursgespräch – Zehnmal	28
13.2.2	Kursgespräch – Zweimal	33
13.2.3	Einzelarbeit – Zehnmal- und Zweimal-Aufgaben	34
13.2.4	Kursgespräch – Fünfmal	35
13.2.5	Einzelarbeit – Fünfmal-Aufgaben	38
13.2.6	Routinisierungsaufgabe – Einmaleins würfeln	39

13 MULTIPLIKATION

(Alina Guther unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Die Multiplikation ist für *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* mit vielen Fehlschlüssen behaftet. Im Vergleich zur Addition und Subtraktion ist das Vervielfachen einer Menge abstrakter. Denn beim Multiplizieren wird nicht einfach eine Menge hinzugefügt bzw. weggenommen, sondern eine Menge wird vervielfacht. Demzufolge ist das Nachvollziehen der Mengenhandlung anhand der Gleichung schwieriger als bei Addition und Subtraktion. Ein weiterer Unterschied ist, dass die Teilmengen nicht direkt an der Aufgabe – an den Faktoren – abgelesen werden können. Auch dieser Aspekt führt dazu, dass die Mengenhandlung, also das, was mit den Mengen passiert, schwieriger nachzuvollziehen ist. Ist den Teilnehmerinnen und Teilnehmern nicht deutlich, was auf der Mengenebene passiert, können Mal-Aufgaben schließlich nicht her- bzw. abgeleitet¹ werden.

Die Hauptfrage der Multiplikation „Wie viel sind es insgesamt?“ ist dieselbe wie bei der Addition. Da diese Frage jedoch mit der Addition und mit dem „Dazutun“ einer Menge assoziiert wird, stellt die Herausarbeitung der Hauptfrage eine weitere Hürde beim Verstehen der Operationslogik dar.

Demzufolge sind die wichtigsten Erkenntnisse, die die Teilnehmer/-innen bezüglich der Multiplikation aus diesem Kurs mitnehmen sollten, folgende:

- Wie bei Addition und Subtraktion ist es auch bei der Multiplikation essenziell, ein mengenhaft-dynamisches Verständnis für die Rechenoperation zu entwickeln. Mengenhaft-dynamisch meint, dass den Teilnehmerinnen und Teilnehmern bewusst ist, was mit den Mengen bei einer multiplikativen Handlung passiert. Denn nur aus der Logik, dass bei $3 \cdot 2$ dreimal eine Zweiermenge vorhanden ist ($2 + 2 + 2 = 6$), lässt sich verstehen, dass $3 \cdot 2$ insgesamt sechs sind.
- Die Teilnehmer/-innen sollten nach der Bearbeitung der nachfolgenden Unterrichtskonzepte wissen, wie Multiplikation und Addition in Zusammenhang stehen. Dies erleichtert einerseits die mengenhafte Vorstellung ($3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 \rightarrow$ die Zwei ist drei Mal vorhanden), andererseits sind sie damit in der Lage, eine Aufgabe wie $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ in $6 \cdot 4$ umzuwandeln und folglich komplizierte Rechenwege (das einzelne Addieren der Vieren) zu vermeiden.
- Aus dem Wissen über den mathematischen Zusammenhang zwischen Addition und Multiplikation ergibt sich der nachfolgende Erkenntnisschritt: Wenn bekannt ist, dass $6 \cdot 4$ das Gleiche meint wie $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$, dann können die Teilnehmer/-innen auch erkennen, dass aus $5 \cdot 4 = 20$ die Aufgabe $6 \cdot 4$ abgeleitet werden kann. Sie wissen z. B., dass $5 \cdot 4$ insgesamt zwanzig sind und zu $6 \cdot 4$ nur noch eine Vier hinzuaddiert werden muss. Das sind dann $6 \cdot 4 = 24$.
- Alle Möglichkeiten zur Ableitung von Mal-Aufgaben, die im Kapitel *Das kleine Einmaleins* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 2, Kapitel 13.2) thematisiert werden, basieren auf dem Wissen um den Zusammenhang von Addition und Multiplikation bei einem gleichzeitig vorhandenen mengenhaft-dynamischen Verständnis der Rechenoperationen.
- Wichtig ist weiterhin, welche Frage die Multiplikation eigentlich immer beantwortet. Oder anders: Warum sollte ich Mal-Aufgaben ausrechnen? Was möchte ich damit erfahren?

Beispiel:

Drei Kinder haben jeweils zwei Kugeln Eis bekommen.

$$3 \cdot 2 \text{ Eiskugeln} = 2 \text{ Eiskugeln} + 2 \text{ Eiskugeln} + 2 \text{ Eiskugeln} = 6 \text{ Eiskugeln}$$

Egal, welche Sachsituationen zu verschiedenen Mal-Aufgaben erdacht werden, am Ende steht immer die

¹ Die Substantive *Herleitung* und *Ableitung* und die Verben *ableiten* und *herleiten* werden in diesem Text synonym verwendet.

Frage danach, wie viele es insgesamt sind. Dieselbe Frage wie bei der Addition, denn jede Multiplikations-Aufgabe kann in eine Additions-Aufgabe umgeschrieben werden.

- Wenn Mal-Aufgaben in eine Mengenhandlung überführt werden, haben der erste und der zweite Faktor unterschiedliche Funktionen. Die Teilnehmer/-innen werden sich vielleicht noch aus der Schulzeit daran erinnern, dass es egal ist, ob man $5 \cdot 4$ oder $4 \cdot 5$ rechnet. Dies ist allerdings nur teilweise korrekt. Richtig ist: Für die Gesamtmenge, d. h. für die Lösung der Aufgabe, ist es nicht relevant, ob $5 \cdot 4$ oder $4 \cdot 5$ gerechnet wird. Beide Aufgaben haben dieselbe Lösung zur Folge. Für das mengenhaft-dynamische Verständnis und die Umwandlung von Additions- in Multiplikationsaufgaben macht es jedoch einen Unterschied.

Denn $5 \cdot 4$ entspricht der Additions-Aufgabe $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ und $4 \cdot 5$ entspricht der Additionsaufgabe $5 + 5 + 5 + 5$. Haben die Teilnehmer/-innen nicht verstanden, dass der erste Faktor angibt, wie viele Teilmengen vorhanden sind (der zweite Faktor gibt an wie groß eine Teilmenge ist), werden sie Probleme haben, Mal-Aufgaben herzuleiten. Nur wenn die Operationslogik verstanden ist, und dazu zählt auch die Funktion des ersten und zweiten Faktors, können Mal-Aufgaben abgeleitet werden. Dies verdeutlicht nachfolgendes Beispiel für eine falsche Herleitung der Mal-Aufgabe $6 \cdot 4$.

Beispiel für die falsche Herleitung einer Multiplikations-Aufgabe, resultierend aus einem mangelnden Wissen um die unterschiedliche Bedeutung der Faktoren:

$$\begin{array}{rclclcl} 6 \cdot 4 & \rightarrow & 5 \cdot 4 & + & 6 (!)^* \\ 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 & \rightarrow & 4 + 4 + 4 + 4 + 4 & + & 6 (!)^* \end{array}$$

Erst wird $5 \cdot 4 = 20$ gerechnet. Das ist hilfreich und eine der Aufgaben, die relativ schnell routinisiert werden. Anschließend wird fälschlicherweise eine Sechs anstatt der fehlenden sechsten Vier zur Zwanzig hinzugerechnet. Diese Art von Rechenfehler entsteht aus einer Unsicherheit bezüglich der unterschiedlichen Funktion des ersten und zweiten Faktors.

- Die Teilnehmer/-innen sollen nach der Erarbeitung der *Operationslogik der Multiplikation* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 2, Kapitel 13.1) auch die Folgen eines Faktorentausches beschreiben können. Der Tausch der Faktoren macht für die zu ermittelnde Gesamtmenge, d. h. für die Beantwortung der Frage „Wie viele haben wir insgesamt?“, keinen Unterschied. Jedoch gewinnt der Tausch der Faktoren bei Betrachtung einer Sachsituation an Bedeutung.

Beispiele:

Drei Kinder bekommen jeweils zwei Eiskugeln. Zusammen haben sie nun 6 Eiskugeln. Die Eltern bezahlen sechs Kugeln Eis:

$$3 \cdot 2 \text{ Eiskugeln} = 6 \text{ Eiskugeln}$$

Werden die Faktoren jedoch getauscht, entsteht eine andere Gleichung und demzufolge auch eine andere Sachsituation:

$$2 \cdot 3 \text{ Eiskugeln} = 6 \text{ Eiskugeln}$$

Zwei Kinder erhalten jeweils drei Kugeln Eis. Insgesamt sind sechs Kugeln zu bezahlen.

Es macht einen Unterschied, ob drei oder nur zwei Kugeln Eis gegessen werden können und ob drei oder nur zwei Personen ein Eis erhalten.

Gleich ist jedoch, dass in beiden Situationen die Frage „Wie viele Eiskugeln sind es insgesamt?“ bzw. „Wie viele Eiskugeln müssen insgesamt bezahlt werden?“ die Antwort „sechs“ nach sich zieht. Denn für die Gesamtmenge macht es keinen Unterschied, ob $2 \cdot 3$ oder $3 \cdot 2$ gerechnet wird.

DIDAKTISCHE EINFÜHRUNG

- Im Kapitel *Das kleine Einmaleins* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 2, Kapitel 13.2) ist ein Weg zum Herleiten und anschließenden Routinisieren des kleinen Einmaleins beschrieben. Das Erlernen des Einmaleins wird in diesem Kurs nicht dadurch erreicht werden, dass die Teilnehmer/-innen alle Aufgaben auswendig lernen. Das haben die Teilnehmer/-innen während ihrer Schulzeit mit ziemlicher Sicherheit schon versucht. Selbst wenn durch Auswendiglernen einige Aufgabensätze bekannt sind, ist dieses Wissen, ohne Kenntnis der Operationslogik, nicht übertragbar und somit auch nicht für Ableitungen nutzbar. Vielmehr soll in den nachfolgenden Unterrichtskonzepten das bereits vorhandene Wissen der Teilnehmer/-innen genutzt und erweitert werden, sodass infolgedessen alle Aufgaben des kleinen Einmaleins und später auch Multiplikationsaufgaben mit größeren Zahlen abgeleitet werden können. Um Mal-Aufgaben abzuleiten, ist es unabdingbar, sich mit der Zerlegung von Faktoren zu beschäftigen.

Wenn die Lösung der Aufgabe $4 \cdot 8$ nicht bekannt ist, können die Teilnehmer/-innen zwischen verschiedenen Rechenwegen wählen. Alle hier vorgestellten Rechenwege haben gemeinsam, dass dabei der erste Faktor zerlegt wird.

Beispiele:

$$4 \cdot 8 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 8 = 16 + 16 = 32$$

Die Vier wurde in zwei und zwei zerlegt. Jeder Faktor muss wiederum mit acht multipliziert werden.

$$4 \cdot 8 = 5 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = 40 - 8 = 32$$

Die Vier wurde in fünf und minus eins zerlegt. Auch die Zerlegung in negative Faktoren ist möglich.

$$4 \cdot 8 = 3 \cdot 8 + 1 \cdot 8 = 24 + 8 = 32$$

Die Vier kann auch in drei und eins zerlegt werden.

Die Teilnehmer/-innen werden auf Zerlegungen zurückgreifen, von welchen sie die Mal-Aufgaben bereits im Kopf haben. Manche Teilnehmer/-innen favorisieren die Addition von Zahlen, weshalb sie eher selten in negative Faktoren zerlegen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Eine Verständnisschwierigkeit ist, dass nach $10 \cdot \text{irgendeine Zahl}$ Schluss mit den Mal-Aufgaben wäre. Folgendes Wissen über die Multiplikation ist dann noch nicht sicher:

- Entweder der Zusammenhang von Addition und Multiplikation ist noch nicht komplett erschlossen. Dann wissen die Teilnehmer/-innen, dass $10 \cdot 6$ das Gleiche bedeutet wie $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$. Daraus kann geschlossen werden, dass es möglich ist, immer noch eine weitere Sechs zu addieren. Dann ist die Sechs z. B. elfmal oder zwölfmal vorhanden.
- Oder es ist noch kein mengenhaft-dynamisches Verständnis für die Rechenoperation vorhanden. Denn dann wäre bekannt: Wenn ich in zehn Monaten jeweils 6 € sparen kann, können auch im elften Monat wieder 6 € gespart werden. $11 \cdot 6 \text{ €} = 66 \text{ €}$. Jetzt wären insgesamt schon 66 € gespart worden.

Kursleiter/-innen sollten unbedingt auf das unfreiwillige Vertauschen der Faktoren beim Herleiten von Mal-Aufgaben achten. Wenn nicht klar ist, dass $6 \cdot 4$ das Gleiche bedeutet wie $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$, kann es passieren, dass beim Herleiten zwar Bezug auf $5 \cdot 4 = 20$ genommen wird, dann aber fälschlicherweise noch eine 6 addiert wird. Hier wird es nicht von Erfolg gekrönt sein, weiter die Herleitung von Mal-Aufgaben zu üben. Es muss das Grundverständnis, d. h. die Operationslogik der Multiplikation, ausgebaut werden.

Ist kein umfassendes Operationsverständnis für die Multiplikation vorhanden, dann kann es passieren, dass die Teilnehmer/-innen nur einen Weg zum Herleiten der Mal-Aufgaben kennen. Die Kursleitung sollte immer auch nach weiteren Möglichkeiten der Herleitung fragen. Es kann sein, dass sich die Teilnehmer/-innen jeden einzelnen Weg zur Herleitung gemerkt, also Rechenwege auswendig gelernt haben.

Ein Beispiel: Ein/-e Teilnehmer/-in kann Achtmal-Aufgaben nur über den Weg fünfmal *die Zahl* und dann noch dreimal *die Zahl* lösen ($5 \cdot __ + 3 \cdot __$). Bei manchen Aufgaben könnte aber über zehnmal *die Zahl* minus zweimal *die Zahl* schneller hergeleitet werden ($10 \cdot __ - 2 \cdot __$).

Dazu nachfolgend ein Vergleich.

Beispiele:

$$8 \cdot 2 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = \mathbf{10 + 6} = 16$$

$$8 \cdot 9 = 5 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = \mathbf{45 + 27} = 72$$

Achtmal-Aufgaben über Fünfmal-Aufgaben herleiten.

$$8 \cdot 2 = 10 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = \mathbf{20 - 4} = 16$$

$$8 \cdot 9 = 10 \cdot 9 - 2 \cdot 9 = \mathbf{90 - 18} = 72$$

Achtmal-Aufgaben über Zehnmal-Aufgaben herleiten.

Bei der Aufgabe $8 \cdot 2$ haben beide Rechenwege – der über fünfmal die Zwei und der über zehnmal die Zwei – einen ähnlichen Schwierigkeitsgrad.

Bei der Aufgabe $8 \cdot 9$ hingegen ist der Weg über $10 \cdot 9$ etwas leichter als die Lösung über $5 \cdot 9$ herzuleiten. Wenn $10 \cdot 9 - 2 \cdot 9$ gerechnet wird, enthält die Rechnung keinen Zehnerübergang ($90 - 18$ anstatt $45 + 27$). Bei Teilnehmerinnen und Teilnehmern, die ausschließlich über Fünfmal-Aufgaben herleiten, auch wenn eine andere Herleitung schneller zur Lösung führen würde, sollten Kursleiter/-innen überprüfen, welche Gründe es für die einseitige Herleitungsstrategie gibt. Es besteht die Möglichkeit, dass entweder die Operationslogik der Subtraktion oder der Zahlaufbau zweistelliger Zahlen noch nicht vollständig verstanden wurde. Gibt es Unsicherheiten innerhalb dieser beiden Themengebiete – der Operationslogik oder dem Zahlaufbau –, ist das Lösen von Minusaufgaben schwieriger als das Lösen von Additionsaufgaben.

Wissenslücken und nicht übertragbares Wissen führen oft dazu, dass Mal-Aufgaben mit größeren Zahlen oder Divisionsaufgaben nicht mehr gelöst werden können. Die Kursleitung fragt aus diesem Grund immer auch nach weiteren Möglichkeiten zur Herleitung der Mal-Aufgabe: „Wie könnte die Aufgabe $8 \cdot 8 = ?$ noch hergeleitet werden?“, „Wie können Sie $8 \cdot 8 = ?$ mithilfe der Aufgabe $10 \cdot 8$ ausrechnen?“²

Zählen manche Teilnehmer/-innen immer wieder die einzelnen Malreihen hoch (z. B. die 5er-Reihe: $5 \dots 10 \dots 15 \dots 20 \dots 25 \dots 30 \dots 35$ usw.), kann dies entweder die Folge einer sehr lang praktizierten Strategie sein oder der Hinweis auf ein fehlendes Operationsverständnis. Auch in diesem Fall fragt die Kursleitung nach, wie man z. B. auch von $10 \cdot 5 = 50$ auf $5 \cdot 5$ ableiten kann. Wenn dies beantwortet werden kann, durchbricht die Kursleitung die Gewohnheiten der Teilnehmer/-innen, indem nicht nur nach einer Mal-Aufgabe gefragt wird, sondern von vorgegebenen Aufgaben abgeleitet wird. Können Teilnehmer/-innen nicht ableiten, ist unbedingt das Grundverständnis für die Multiplikation weiter auszubauen.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Vor der Beschäftigung mit der Operationslogik der Multiplikation müssen die Teilnehmer/-innen wissen, dass Zahlen Anzahlen beschreiben (*kardinaler Zahlbegriff*). Außerdem sollten sie, aufgrund des operationalen Zusammenhangs, die Operationslogik der Addition und Subtraktion verstanden haben. Da die Teilnehmer/-innen sich zur Lösung von Aufgaben des kleinen Einmaleins im Zahlbereich bis 100 bewegen müssen, soll einerseits der Zahlaufbau zweistelliger Zahlen verstanden sein und andererseits muss sicher bis 100 addiert und subtrahiert werden können.

² Wenn der/die Teilnehmer/-in z. B. immer den Weg $5 \cdot 8 + 3 \cdot 8$ wählt, könnte eine andere Aufgabe vorgegeben werden. Hat der/die Teilnehmer/-in ein umfassendes Operationsverständnis, dann kann er/sie auf Nachfrage auch von $10 \cdot 8$ auf $8 \cdot 8$ schließen.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
 - > Stufe 2 – Operationslogik der Multiplikation, S. 102–106.
 - > Stufe 2 – Erwerb des kleinen Einmaleins, S. 102–106.
 - > Stufe 2 – Multiplikation mit mehrstelligen Zahlen, S. 107 ff.
- Meyerhöfer, Wolfram; Guthier, Alina; Grütte, Dagmar; Weilke, Cornelia (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen: Praxismaterial. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
 - > Stufe 1 – Kapitel 3, S. 17www.grundbildung.de/unterricht

V Welche Materialien werden benötigt?

- *Kursgespräch und Partnerarbeit – Mengenhandlung Multiplikation:*
Für jedes Team 15 Gegenstände (Steckwürfel, Wendeplättchen, Stifte, Büroklammern o. Ä.)
- Kapitel 13.2:
Jede/-r Teilnehmer/-in erhält einen Satz Mengenbilder aus der KOPIERVORLAGE *Mengenbilder*.
- *Kursgespräch – Zehnmal:*
Pro Kursteilnehmer/-in ein laminiertes Hunderterfeld und ein Folienstift
- *Spiel Einmaleins würfeln:*
 - > Je Zweierteam einen Würfel mit den Zahlen 1 bis 10, einen Sechserwürfel und Klebezettel (zum Bekleben und Beschriften des Sechserwürfels)
 - > eventuell Spielgeld

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Schlagwörter: Das Ganze • Die Teile • Einzelarbeit • Gleichungen • Grafische Darstellung von Mengenhandlungen und Sachsituationen • Kursgespräch • Mengen • Multiplikation • Partnerarbeit • Zahlen bis 100

13.1 Die Operationslogik der Multiplikation

Exploration

Das nachfolgende Kursgespräch und die Partnerarbeit sollen die Teilnehmer/-innen in die Lage versetzen, Mal-Aufgaben in Mengenhandlungen zu übersetzen. Es wird deutlich, dass bei einer multiplikativen Mengenhandlung eine Menge mehrfach vorhanden ist – die Menge wird vervielfacht¹. An der Mengenhandlung wird weiteres Wissen um die Operationslogik der Multiplikation verdeutlicht:

- Welche Frage beantworten Multiplikationsaufgaben?
- Welche Gleichungen passen zur vorgespielten Handlung?
- Welche Plus- und welche Mal-Aufgaben passen zur Handlung?
- Welche unterschiedliche Bedeutung haben der erste und der zweite Faktor?
- Wie wirkt sich ein Tausch der Faktoren auf die Mengenhandlung aus?

Ähnlich wie bei der Addition und Subtraktion soll das Kursgespräch *Mengenhandlung Multiplikation* einerseits der Vorbereitung der sich anschließenden Partnerübung dienen, andererseits auch grundlegende Einsichten bezüglich der Operationslogik der Multiplikation hervorbringen. Diese werden dann während der nachfolgenden Übung vertieft. Während der Übung hat die Kursleitung die Möglichkeit zu überprüfen, ob alle Teilnehmer/-innen die wichtigen Erkenntnisschritte mitgegangen und somit für die nächsten Erkenntnisschritte, zum Herleiten und Automatisieren des kleinen Einmaleins bereit sind.

13.1.1 Kursgespräch – Mengenhandlung Multiplikation

Durchführung und didaktische Hinweise

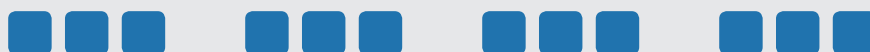
Die Teilnehmer/-innen werden aufgefordert, genau zu beobachten, was passiert, sodass sie anschließend beschreiben können, was die Kursleitung getan hat.

Die Kursleitung spielt eine multiplikative Mengenhandlung vor. Dazu können Steckwürfel oder auch andere Gegenstände verwendet werden. Es sind ausreichend große Pausen zwischen den einzelnen Handlungsschritten nötig, damit die Teilnehmer/-innen Zeit haben zu erkennen, um welche Menge es bei der Aufgabe gehen soll.

Beispiel für das Vorspielen einer multiplikativen Mengenhandlung:

Die Kursleitung holt drei Steckwürfel aus einem Schrank und legt diese Würfel auf einen Tisch. Dann geht die Kursleitung erneut zum Schrank und holt noch einmal drei Steckwürfel. Das Ganze soll noch zweimal wiederholt werden.

Nun ist die Kursleitung viermal gelaufen und hat jeweils drei Steckwürfel geholt.



Die Teilnehmer/-innen beschreiben nun, was sie beobachtet haben. Folgende Fragen sind hilfreich, um die dazugehörigen Additions- und Multiplikationsgleichungen zu finden:

¹ Die Worte *vervielfacht* und *vervieracht* werden häufig in ihrem Gehalt nicht verstanden und schließlich sogar simultan verwendet. Die Kursleitung sollte also genau hinhören und dieses Missverständnis aufklären!

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Was habe ich (genau) getan? Und was habe ich danach gemacht?
Welche Frage könnten wir uns jetzt stellen? Wie viele Gegenstände habe ich gebracht?²
Wie viele Gegenstände habe ich jedes Mal gebracht?
Wie viele Gegenstände habe ich insgesamt auf den Tisch gelegt?
Welche Gleichung passt zu dieser Aufgabe?

Wenn sofort die Mal-Aufgabe ($4 \cdot 3$ oder $3 \cdot 4$) genannt wird, hilft folgende Frage, um die Operationslogik herauszuarbeiten.

Wie kann ich ausrechnen, wie viele Gegenstände insgesamt gebracht wurden?

Eine häufige Antwort ist: „Drei plus drei plus drei und noch einmal drei. Das sind dann zwölf.“

Wenn die Teilnehmer/-innen keine passende Additions- oder Multiplikations-Aufgabe nennen, fragt die Kursleitung direkt, welche Plus-Aufgabe zu den Handlungen passt. Bei der Suche nach der Mal-Aufgabe hilft oft die folgende Frage.

Wie kann man diese Plus-Aufgabe kürzer aufschreiben? Wie kann ich leichter rechnen?

Wenn die passende Gleichung gefunden wurde, kann die Kursleitung gemeinsam mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern überlegen, *warum* sie das eigentlich zusammengerechnet haben. Welche Frage stellt sich nun?

Warum haben Sie das zusammengerechnet?
Was wollen wir durch das Ausrechnen der Aufgabe Neues erfahren?
Was wissen wir nun – nach der Ergebnisfindung – Neues?
Was hat uns das Lösen der Aufgabe gebracht?
Welche Frage kann man an diese Aufgabe stellen?
Welche Frage kann aus der Gleichung abgeleitet werden?

An dieser Stelle können noch keine verallgemeinernden Rückschlüsse (in der Art: „Die Multiplikation fragt immer nach ...“) erwartet werden bzw. die Kursleitung sollte an diesem Punkt noch nicht die Erkenntnisse zusammenfassen. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern wird ausreichend Zeit gegeben, um wiederkehrende Zusammenhänge selbst zu entdecken.

² Die Kursleitung beachtet, dass auf diese Frage mit der Gesamt- oder den Teilmengen geantwortet werden kann. Bei der Aufgabe $4 \cdot 3$ Würfel könnten die Teilnehmer/-innen sagen, die Kursleiterin bzw. der Kursleiter hätte 12 Würfel gebracht. Oder sie schauen auf die Teilhandlungen und äußern, die Kursleiterin bzw. der Kursleiter hätte immer drei gebracht. Die Kursleitung muss die Unterschiede mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern herausarbeiten: Habe ich 12 oder 3 Würfel gebracht? Warum kann beides richtig sein?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Die unterschiedliche Bedeutung der Faktoren

Ist nun deutlich geworden, welche Frage durch die Berechnung der Aufgabe beantwortet wird und welche Plus- und Mal-Aufgabe zur vorgespielten Gleichung passen, können sich die Teilnehmer/-innen der unterschiedlichen Bedeutung der Faktoren widmen.³

Dazu zurück zur Beispielaufgabe $4 \cdot 3$ Würfel = 12 Würfel.

Die Kursleitung erinnert die Teilnehmer/-innen an die passende Multiplikations-Aufgabe. Dazu wird die Aufgabe an die Tafel geschrieben. Hilfreich ist auch eine Visualisierung der Mengenhandlung – eine Rechenskizze – ähnlich der Abbildung zum Beispiel für das Vorspielen einer multiplikativen Mengenhandlung.

Exkurs Fachtermini

Es bietet sich weiter an, mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein Tafelbild über die Fachtermini bezüglich einer Multiplikationsgleichung anzufertigen. Es ist für das Rechnen nicht entscheidend, ob diese Fachworte bekannt sind. Für Teilnehmer/-innen ist es aber von Vorteil immer genau zu wissen, über welchen Teil der Mal-Aufgabe gerade gesprochen wird.

Rechenoperation: **Multiplikation**

Verb: **multiplizieren**

$$\begin{array}{ccc} \text{Faktor} & \cdot & \text{Faktor} = \text{Produkt} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{1. Faktor} & & \text{2. Faktor} \end{array}$$

Folgende Fragen helfen beim Herausstellen der unterschiedlichen Bedeutung der beiden Faktoren (hier am Beispiel der Aufgabe $4 \cdot 3$ Würfel = 12 Würfel).

Was sagt uns der erste Faktor? Wofür steht der erste Faktor?

Wo ist die Vier bei den Würfeln? Kann man die Vier/eine Vierermenge sehen?

Was sagt der zweite Faktor? Wofür steht der zweite Faktor?

Welche Rolle spielte die Drei bei der Würfelgeschichte?

Auswirkung eines Faktorentausches auf die Mengenhandlung

Ist die Erkenntnis gesichert, dass der erste Faktor angibt, wie oft die zweite Zahl da ist, werden die Teilnehmer/-innen gefragt, welche Auswirkungen ein Tausch des ersten und des zweiten Faktors zur Folge hat.

Wie muss die Handlung verändert werden, wenn die Aufgabe $3 \cdot 4$ Würfel lautet?

Wie oft müssen wir laufen (um neue Gegenstände zu holen)?

Wie viel muss bei jedem Gang mitgebracht werden?

Was ändert sich zur vorangegangenen Handlung? Und was bleibt gleich?

³ Die Kursleitung beachtet, dass es keineswegs sachlich zwingend ist, dass der zweite Faktor die vervielfachte Zahl angibt und der erste Faktor angibt, wie oft vervielfacht wird. Es handelt sich lediglich um eine kulturelle Konvention. Wir wissen nicht, ob es Kulturkreise gibt, in denen die Konvention andersherum ist. Die Kursleitung sollte es als Option in Erwägung ziehen, wenn Teilnehmer/-innen aus anderen Kulturkreisen die Konvention anders erinnern.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Hat die Kursleitung den Eindruck, dass ein/-e Teilnehmer/-in schon eine gute Idee hat, kann diese/-r gebeten werden, die veränderte Handlung vorzuspielen. Besonders gewinnbringend ist es, wenn aus den Fragen eine Diskussion entsteht, in der sich alle Teilnehmer/-innen trauen, ihre Ideen und Vermutungen zu äußern. Werden *falsche* Lösungsideen durch die Kursleitung aufgegriffen, kann z. B. über folgende Aspekte diskutiert werden:

- die Folgen des Faktorentausches,
- die Folgen der Änderung des ersten oder zweiten Faktors.

Die Konsequenzen der falschen Lösung können gemeinsam mit allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern nachvollzogen werden. Damit fühlt sich der/die Teilnehmer/-in mit der falschen Lösung wertgeschätzt und gleichzeitig entsteht für alle Teilnehmer/-innen ein gewinnbringender Austausch über die mathematischen Zusammenhänge.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

13.1.2 Partnerarbeit – Mengenhandlung Multiplikation

Durchführung und didaktische Hinweise

KOPIERVORLAGEN 1 bis 3

Jeweils zwei Teilnehmer/-innen erhalten einen Satz der kopierten (und ausgeschnittenen)

 **Kopiervorlage 1.** Die Gleichungszettel werden vor dem Team auf den Tisch gelegt. Eine Person zieht einen Gleichungszettel und spielt die darauf notierte Gleichung vor. Anschließend beantwortet die andere Person die Fragen auf den  **Kopiervorlagen 2 und 3.**

Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern sollte 30 Minuten Zeit zum gegenseitigen Vorspielen der Aufgaben und zum parallelen Beantworten der Fragen des Aufgabenblattes gegeben werden. Die Kursleitung schaut kurz vor Ablauf der Zeit, ob von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern noch mehr Zeit benötigt wird.

Die Zweierteams sollen sich abwechseln, sodass am Ende der Aufgabe jede/-r Teilnehmer/-in vier Aufgaben vorgespielt und vier Aufgaben angeschaut hat. Die Kursleitung geht während der Übung von Team zu Team und schaut, ob es noch Teilnehmer/-innen gibt, die Probleme mit der Aufgabenstellung oder mathematische Verständnisschwierigkeiten haben. Die Kursleitung kann sich dort einbringen, wo es Probleme gibt, und entsprechende Fragen stellen, die den Teilnehmerinnen und Teilnehmern bei der Lösung der Aufgabe helfen. Die nachfolgend aufgelisteten Fragen müssen an das Verständnisproblem der Teilnehmer/-innen angepasst werden.

Fragen zur Unterstützung bei Verständnisproblemen

Bei allgemeinen Verständnisproblemen:

Was hat Ihr Partner/Ihre Partnerin eben getan?

Bei Problemen mit 1. und 2. Faktor:

Wie oft hat er/sie das getan?

Um welche Menge geht es bei dieser Aufgabe?

Welche Menge wird vervielfacht?

Wie oft ist diese Menge da?

Welche Rolle spielte die ____ (der erste oder zweite Faktor) in der vorgespielten Handlung?

Woher wissen Sie, dass ____ (1. Faktor) mal die ____ (2. Faktor) da ist?

(Zum Beispiel: Woher wissen Sie, dass sechsmal die Fünf da ist? Woher wissen Sie, dass sechs Fünfer vorhanden sind?)

Bei Problemen bezüglich der Gesamtmenge/der Lösungsfindung:

Wie viele sind es insgesamt?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

KV 1 bis 3

Die Kursleitung macht von folgenden Faktoren abhängig, ob im Anschluss an diese Partnerarbeit noch ein Auswertungsgespräch durchgeführt wird:

- Können alle Teilnehmer/-innen die Gleichungen richtig vorspielen?
- Können alle Teilnehmer/-innen die Fragen auf den Aufgabenblättern richtig beantworten?
- Haben alle Teilnehmer/-innen den Unterschied zwischen der Funktion des ersten und des zweiten Faktors verstanden?
- Können die Teilnehmer/-innen Fragen zu den multiplikativen Mengenhandlungen entwickeln?
- Finden die Teilnehmer/-innen nicht nur die entsprechende Mal-, sondern auch die passende Plus-Aufgabe zur Handlung?

Wenn ja, kann mit dem Kurs zu den sich anschließenden Unterrichtssequenzen *Einzelarbeit – Rechenskizzen, Gesamt-/Teilmenge und Funktion der Faktoren* übergegangen werden. Sollte es nur leichte Unsicherheiten bei einzelnen Personen geben, kann dennoch inhaltlich vorangegangen und können die sich anschließenden Aufgabenblätter bearbeitet werden. Die Kursleitung sollte sich jedoch in besonderer Weise den inhaltlich noch unsicheren Teilnehmern und Teilnehmerinnen widmen. Sie unterstützt durch die oben stehenden Fragen die Teilnehmer/-innen bei Verständnisproblemen.

Sollte es jedoch mehrheitlich große Verständnisprobleme bezüglich der Multiplikation geben, ist das Vorspielen weiterer multiplikativer Handlungen sinnvoll. Die Kursleitung unterstützt die Teilnehmer/-innen durch entsprechende Fragestellungen, die richtigen und elementaren Einsichten zu erhalten.

KOPIERVORLAGE 4

Es können auch die  **Kopiervorlage 4** (und die  **Kopiervorlagen 1–3**) genutzt und damit weitere Multiplikationsgleichungen von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern bearbeitet werden. Mit jedem Schritt vom Kursgespräch zur Partnerarbeit und von der Partnerarbeit zu den nachfolgenden Aufgabenblättern werden die Teilnehmer/-innen zunehmend selbstständiger ihr Wissen um die Multiplikation anwenden. Zeigen einzelne Teilnehmer/-innen noch immer Unsicherheiten bezüglich der Operationslogik, geht die Kursleitung mit ihnen wieder zurück zur vorhergehenden Übung bzw. zum vorausgegangenen Gespräch, um die dortigen Inhalte abzusichern.

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Bei der Multiplikation wird der immer gleiche Summand addiert. Die Multiplikation ist demnach eine Addition gleicher Summanden.
- Bei einer Multiplikations-Aufgabe wird eine Zahl vervielfacht, d. h., eine Zahl ist nach der Vervielfachung mehrfach vorhanden.
- Bei der Multiplikation wird gefragt: „Wie viele sind es insgesamt?“
- Auch bei einer Additionsaufgabe wird gefragt, wie viele es insgesamt sind. Dabei werden aber auch unterschiedliche Summanden addiert.
- Der erste Faktor gibt an, wie oft die Teilmenge vorhanden ist. Der zweite Faktor gibt die Größe der einzelnen Teilmengen an.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

13.1.3 Einzelarbeit – Rechenskizzen/Zusammenhang von Addition und Multiplikation

Exploration

In den folgenden Unterrichtssequenzen werden sich die Teilnehmer/-innen weitestgehend selbstständig mit multiplikativen Sachsituationen auseinandersetzen. In drei Themenbereichen wird jeweils auf unterschiedliche Schwerpunkte fokussiert:

- Rechenskizzen/Zusammenhang von Addition und Multiplikation
- Gesamt- und Teilmengen
- Funktion der Faktoren/Faktorentausch

Es wird jeweils zuerst ein Aufgabenblatt gemeinsam mit der Kursleitung bearbeitet und anschließend folgt die Einzelarbeitsphase.

Im ersten Themenbereich *Rechenskizzen/Zusammenhang von Addition und Multiplikation* werden Rechenskizzen erstellt. Diese Form der Visualisierung hat sich in der Arbeit mit *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* als äußerst hilfreich erwiesen – vor allem, wenn es den Teilnehmerinnen oder Teilnehmern schwer fällt, die entsprechenden Gleichungen zu einer umschriebenen Sachsituation zu finden. Aus den erstellten Zeichnungen werden die entsprechenden Teilmengen und so auch die Additions-Aufgabe ersichtlich. Mithilfe der Plus-Aufgabe gelingt das Herausarbeiten der passenden Multiplikationsaufgabe leichter. Während des Anfertigens einer Skizze setzen sich die Teilnehmer/-innen intensiver mit der Aufgabe auseinander und notieren nicht schnell *irgendeine* Gleichung. Zudem fallen Fehlschlüsse schon bei der Erstellung der Skizzen oder beim Übersetzen in eine Gleichung auf. Auch das Finden der Frage zur Sachsituation ist mit einer Skizze wesentlich vereinfacht.

Mithilfe der **Aufgabenblätter 13.1c und 13.1d** werden sich die Teilnehmer/-innen intensiver mit den Gesamt- und Teilmengen beschäftigen. Im Unterschied zur Addition und Subtraktion sind bei der Multiplikation die einzelnen Teilmengen nicht mehr direkt aus der Gleichung ablesbar. Die multiplikative Mengenhandlung ist schwerer aus der Gleichung abzulesen als bei Additions- und Subtraktions-Aufgaben. Die Beschäftigung mit Gesamt- und Teilmengen wird zu einem tieferen Verständnis der Multiplikation führen. Auch das Herleiten der Aufgaben des kleinen Einmaleins und das spätere Multiplizieren werden durch die Beschäftigung mit den verschiedenen Aspekten der Operationslogik erleichtert.

In der dritten Arbeitsphase dieses Abschnittes setzen sich die Teilnehmer/-innen noch intensiver mit der Funktion des ersten und des zweiten Faktors auseinander. Nur wenn sie die unterschiedliche Funktion der beiden Faktoren verstanden haben, ist gesichert, dass sie Mal-Aufgaben problemlos ableiten können und somit das kleine Einmaleins routinisieren.

Zu jedem der drei Erarbeitungsschritte gibt es Blankokopiervorlagen, sodass die Kursleitung weitere Aufgabenblätter entwerfen kann. Sie kann die vorgegebenen Aufgaben um weitere Beispiele erweitern, falls von einzelnen Teilnehmern und Teilnehmerinnen die jeweilige Essenz des Abschnittes noch nicht sicher verstanden wurde.

Durchführung und didaktische Hinweise

AB 13.1a

Die Kursleitung gibt jedem/-r Teilnehmer/-in das **Aufgabenblatt 13.1a**.

Die Teilnehmer/-innen erhalten zwei Minuten Zeit, sich die Sachsituation und die dazugehörigen Aufgabenstellungen anzuschauen. Anschließend geht die Kursleitung alle Aufgaben gemeinsam mit ihnen durch. Die Kursleitung erfragt, ob es bereits Teilnehmer/-innen gibt, die schon Ideen haben, wie die einzelnen Aufgaben zu erledigen bzw. die Fragen zu beantworten sind. Das **Aufgabenblatt 13.1a** kann gemeinsam mit dem Kurs besprochen und bearbeitet werden, das nachfolgende **Aufgabenblatt 13.1b** hingegen bearbeiten die Teilnehmer/-innen selbstständig.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Rechenskizze

Wesentlich für eine Skizze/Zeichnung ist die Bewusstwerdung darüber, worum es in der Aufgabe geht. Ist das Portemonnaie wichtig oder sind es die Scheine? Geht es darum, wie viele Scheine es sind oder um den Wert und somit auch um den Gesamtwert der Geldscheine? Die Frage, wie viele Scheine es sind, wäre nicht passend, da dies in der Sachsituation bereits beschrieben wird. Um zu sagen, wie viele Scheine Sophia im Portemonnaie hat, müsste nicht gerechnet werden.

Also könnte eine passende Rechenskizze z. B. drei Scheine mit einem Wert von jeweils 5€ enthalten. Ebenfalls wäre es möglich, drei Fünfermengen zu zeichnen. Ob die Fünfer in Scheinen vorliegen, ist zweitrangig. Es geht bei dieser Aufgabe darum zu ermitteln, wie viel Geld es insgesamt ist.

Frage

Selbst eine passende Fragestellung zu entwickeln, ist für viele Teilnehmer/-innen sicher ungewohnt. Wie bereits unter *Rechenskizze* beschrieben wurde, geht es darum, herauszufinden, was mit den angegebenen Zahlen berechnet werden kann. Häufig entwickeln Teilnehmer/-innen sehr interessante Fragen. Vielleicht interessiert sie, wie lange das Geld reicht. Oder Teilnehmer/-innen fragen sich, ob Sophia vielleicht auch noch Kleingeld dabei hat und formulieren deshalb die erwartete Frage, wie viel Geld sie insgesamt habe, nicht. Die Kursleitung sollte die verschiedenen Antworten und Ideen ernst nehmen: Manchmal lösen sich wesentliche Hindernisse beim mathematischen Lernen auf.

Plus-Aufgabe

Die Plus-Aufgabe kann aus der Skizze abgelesen werden. Sollte es beim Zuordnen der Plus-Aufgabe Probleme geben, ist es wahrscheinlich, dass die Operationslogik der Addition noch nicht verstanden wurde und es muss mit dem/-r Teilnehmer/-in thematisch zurückgegangen werden. Das Verständnis der Operationslogik der Addition ist Voraussetzung für das Verstehen der Multiplikation.

Mal-Aufgabe

Das Ermitteln der Mal-Aufgabe ist schwieriger als das Zuordnen der Plus-Aufgabe. Nehmen wir das Beispiel vom **Aufgabenblatt 13.1a** zu Hilfe. Wahrscheinlich wissen die Teilnehmer/-innen, dass es um drei und fünf gehen muss. Aber $5 \cdot 3$ oder $3 \cdot 5$? Können die Teilnehmer/-innen das aus ihrer Skizze nicht ablesen, stellt die Kursleitung ähnliche Fragen wie bei der Aufgabe und dem Kursgespräch *Mengenhandlung Multiplikation*:

- „Wie kann die Plus-Aufgabe anders/in kürzerer Form aufgeschrieben werden?“
- „Um welche Zahl geht es hier?“
- „Wie oft ist diese Zahl da, fünfmal oder dreimal?“
- „Sind es $5 \cdot 3$ Euro oder sind es $3 \cdot 5$ Euro?“

Antwort

Die Kursleitung weist die Teilnehmer/-innen darauf hin, dass die Formulierung eines passenden Antwortsatzes leichter fällt, wenn sie sich die Frage vorher noch einmal durchlesen. Das erneute Lesen der Frage kann aber auch dazu führen, dass die Teilnehmer/-innen selbst feststellen, dass die berechnete Zahl nicht zur Frage passt.

Die Kursleitung ermutigt die Teilnehmer/-innen, auch bei Unsicherheiten ihre Lösungsideen zu notieren. Manchen Menschen fällt es leichter, Antworten mit einem Bleistift aufzuschreiben, wenn sie sich nicht ganz sicher sind.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

AUFGABENBLATT 13.1b

Wurde das **Aufgabenblatt 13.1a** erfolgreich erarbeitet, sollen die Teilnehmer/-innen das **Aufgabenblatt 13.1b** allein bearbeiten. Dazu sollten zunächst 15 Minuten Zeit gegeben werden. Anschließend prüft die Kursleitung, ob eine Zeitugabe erforderlich ist.

Im Anschluss an die fünfzehnminütige Einzelarbeit finden sich jeweils zwei Teilnehmer/-innen zusammen und besprechen ihre Ergebnisse. Sie sollen sich – wenn möglich – auf eine Lösung einigen und diese nach zehn Minuten Beratungszeit vorstellen.

Die Kursleitung geht während der Einzel- und der Besprechungszeit der Zweiergruppen zu den Teilnehmerinnen und Teilnehmern. Dabei schaut sie, ob es Personen gibt, die große Probleme mit der Bearbeitung des Aufgabenblattes haben. Diese Teilnehmer/-innen sollten mit entsprechenden Fragestellungen aus dem Kursgespräch *Mengenhandlung Multiplikation* unterstützt werden.

Wenn sich die Zweiergruppen beraten haben, kann die Kursleitung, je nach Gruppendynamik, entweder die Ergebnisse durch eine der Zweiergruppen vorstellen lassen oder die Fragen und Antworten mit allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern gemeinsam durchsprechen. Die Kursleitung lässt diverse Rechenskizzen an die Tafel zeichnen. Diese werden schließlich miteinander verglichen.

Die Teilnehmer/-innen sollten bei der Vorstellung begründen, wie sie zur Lösung gekommen sind. Wer sicher verstanden hat, worum es geht, kann sein Vorgehen auch erklären. Interessant ist auch, ob andere Teilnehmer/-innen bei einer bestimmten Aufgabe andere Ideen hatten. Die Kursleitung sollte nicht nur nachfragen, wenn etwas falsch ist, sondern möglichst bei jeder Antwort – auch den richtigen Antworten – nachhaken und sich die Ergebnisse begründen lassen. Teilnehmer/-innen und Kursleitung diskutieren gemeinsam, warum eine Lösungsidee eventuell nicht zum Ziel geführt hat.

Sollte die Kursleitung bemerken, dass einige Teilnehmer/-innen

- keine passende Skizze anfertigen können,
- keine Fragestellungen und Antworten finden oder
- keine Gleichungen zu den Sachsituationen finden,

dann sollte sie  **Kopiervorlage 5** nutzen. Die Kursleitung hat damit auch die Möglichkeit, zusätzliche Aufgaben zu erstellen. Neben Beispielen, die vielleicht im Unterrichtsverlauf aufgetaucht sind, sind mögliche Multiplikationssituationen für die Erstellung weiterer Aufgabenblätter:

- Talita geht jede Woche dreimal/achtmal/neunmal joggen. Wie oft war sie innerhalb von vier/sechs/acht Wochen joggen?
- Für eine Kanne Tee braucht man jeweils zwei Teebeutel. Zoe soll fünf/acht/15 Kannen Tee kochen.
- In einer Packung Kaugummi sind immer sechs Streifen. Ella kauft sich sieben/drei/12 Packungen.

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Bei der Multiplikation wird eine Zahl vervielfacht.
- Durch eine Multiplikationsgleichung kann eine Mengenhandlung beschrieben werden, bei der eine Menge mehrfach vorhanden ist bzw. diese Menge nach der Handlung mehrfach vorhanden sein soll.
- Die multiplikative Mengenhandlung kann immer als Additions- und als Multiplikations-Aufgabe beschrieben werden. Die entsprechenden Plus- und Mal-Aufgaben sollen die Teilnehmer/-innen anhand der umschriebenen Sachsituation, mithilfe von Rechenskizzen, den Erkenntnissen um Gesamt- und Teilmengen und mit dem Wissen um die unterschiedlichen Funktionen des ersten und des zweiten Faktors herausfinden.
- Bei der Multiplikation wird, wie bei der Addition, immer die Gesamtmenge berechnet. Deshalb stellt auch die Multiplikationsgleichung immer die Frage danach, wie viele es insgesamt sind. Die Teilnehmer/-innen sollen zur jeweiligen Sachsituation eine passende Fragestellung formulieren können.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1.4 Einzelarbeit – Gesamt- und Teilmengen bei der Multiplikation

In den vorangegangenen Unterrichtseinheiten haben sich die Teilnehmer/-innen mit dem Zusammenhang von Addition und Multiplikation beschäftigt und wurden darüber hinaus in die Arbeit mit Rechenskizzen eingeführt. Das vorliegende Unterrichtskonzept beschäftigt sich mit Gesamt- und Teilmengen bei Multiplikationsaufgaben. Das Wissen darum, wie groß die Gesamt- und Teilmengen bei einer Mal-Aufgabe sind, wird es den Teilnehmerinnen und Teilnehmern erleichtern, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Mal-Aufgaben zu entdecken.

Sobald den Teilnehmerinnen und Teilnehmern z. B. bewusst ist, wie die Aufgabe $5 \cdot 6$ mit der Aufgabe $6 \cdot 6$, aber auch mit der Aufgabe $4 \cdot 6$ in Zusammenhang steht, werden sie Aufgaben flexibler ableiten. Ein schnelles, sicheres und flexibles Wissen um das Herleiten von Aufgaben des Einmaleins führt dazu, dass das Einmaleins schneller routinisiert wird und vermutete Ergebnisse kurzfristig auf Richtigkeit überprüft werden können.

Bevor die Teilnehmer/-innen sich intensiv mit den Gesamt- und Teilmengen bei der Multiplikation beschäftigen haben, besteht häufig die Vermutung, dass vier und drei bei der Aufgabe $4 \cdot 3$ die Teilmengen sind. Ist nicht geklärt, dass bei dieser Aufgabe die Teilmengen drei, drei, drei und drei sind ($4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$), ist auch nicht erklärbar, wie $4 \cdot 3$ zusammen zwölf sein soll, denn vier *und* drei sind zusammen sieben ($4 + 3 = 7$). Besteht die Vermutung, dass vier und drei die Teilmengen sind, ist auch nicht von $4 \cdot 3$ auf $5 \cdot 3$ zu schließen: Es kann nicht erklärt werden, dass von $4 \cdot 3$ ($3 + 3 + 3 + 3$) zu $5 \cdot 3$ ($3 + 3 + 3 + 3 + 3$) eine drei addiert werden muss.

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 13.1c

Jede/-r Teilnehmer/-in erhält ein **Aufgabenblatt 13.1c**. Es wird ausreichend Zeit gegeben, um die Sachsituation und die dazugehörigen Aufgabenstellungen durchzulesen. Anschließend geht die Kursleitung Aufgabe für Aufgabe gemeinsam mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern durch. Worauf bei den Punkten *Rechenskizze*, *Frage*, *Plus- und Mal-Aufgabe* und *Antwort* zu achten ist, wurde bereits in der *Einzelarbeit – Rechenskizzen/Zusammenhang von Addition und Multiplikation* erläutert. Hinzu kommen im vorliegenden Unterrichtskonzept, mit den **Aufgabenblättern 13.1c–13.1d**, die Fragen nach der Gesamtmenge und den Teilmengen.

Gesamtmenge

Das Wort *Gesamtmenge* beschreibt jene Menge, die nach der Vervielfachung einer Zahl vorliegt. Mit den nachfolgenden Fragen kann die Kursleitung den Teilnehmerinnen und Teilnehmern beim Erschließen des Begriffes *Gesamtmenge* bzw. bei der Übertragung des Begriffes auf die Operationslogik der Multiplikation helfen:

Wie viele sind es insgesamt?
 Wie viele sind es zusammen?
 Wie viele sind es, wenn man die Vervielfachung durchgeführt hat?
 Wie viele sind es, wenn man alle(s) zusammenzählt?

Die Frage nach der Gesamtmenge ist leichter zu beantworten, wenn die Teilnehmer/-innen bereits Rechenskizzen anfertigen und die passenden Plus-Aufgaben zur Handlung benennen können. Um die Gesamtmenge zu finden, muss gewusst werden, was bei dieser Aufgabe berechnet werden soll. Sollen z. B. die Stunden vor dem Fernseher, die Kekse oder etwas ganz anderes ausgerechnet werden?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Teilmengen

Das Herausarbeiten der Teilmengen ist unserer Erfahrung nach etwas schwieriger als das Finden der Gesamtmenge. Um die Frage nach den Teilmengen zu beantworten müssen die Teilnehmer/-innen wissen, was zusammengerechnet werden soll (Kekse, Stunden, ..., s.o.) und aus welchen Teilen sich die Gesamtmenge zusammensetzt.

Beispiel:

Frieda möchte innerhalb von drei Stunden in jeder Stunde acht Kekse essen. Sie möchte demnach acht Kekse essen, noch einmal acht Kekse und in der letzten Stunde erneut acht Kekse ($8 \text{ Kekse} + 8 \text{ Kekse} + 8 \text{ Kekse} = 24 \text{ Kekse}$). Die Teilmengen lauten also acht, acht und acht.

Es könnte fälschlicherweise angenommen werden, die Teilmengen wären einfach die beiden Faktoren. Im Keksbeispiel würden dann drei und acht als Teilmengen genannt. Bei diesem Fehlschluss kann die Kursleitung zeichnerisch oder mit Material (Steckwürfel, Wendeplättchen o. Ä.) veranschaulichen, dass dies nicht sein kann. Frieda hätte, wenn drei und acht die Teilmengen wären, nur drei und acht Kekse gegessen, also zusammen elf. Das stimmt jedoch nicht mit der Sachsituation überein. Die Unterscheidung von erstem Faktor – der Zahl, die sagt, wie oft die Teilmengen vorhanden sind, – und den eigentlichen Teilmengen ist Grundlage eines sicheren Operationsverständnisses.

Folgende Fragen helfen zu verstehen, was eine Teilmenge ist:

Aus welchen Teilen hat sich das Ganze/die Gesamtmenge der 24 Kekse zusammengesetzt?

Woher wissen wir, welche Menge hier vervielfacht werden soll?

Wie viele Kekse werden hier vervielfacht?

Woher wissen wir, wie oft hier vervielfacht werden soll?

Wie oft werden die Stundenportionen vervielfacht?

Die Teilnehmer/-innen erhalten das **Aufgabenblatt 13.1d**. Für die Bearbeitung können vorerst 15 Minuten Zeit veranschlagt werden. Nach Ablauf der 15 Minuten überprüft die Kursleitung, ob das Zeitfenster ausreichend war.

Sollte es Schwierigkeiten bei der Aufgabenbearbeitung geben, stellt die Kursleitung zusammen mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern die Sachsituationen mit Material (Steckwürfel, Wendeplättchen, Kugelschreiber o. Ä.) nach. Die Kursleitung stellt gezielte Fragen, um bei der Bearbeitung einzelner Punkte zu unterstützen (siehe *Einzelarbeit – Rechenskizzen/Zusammenhang Addition und Multiplikation*).

Bei der ersten Sachsituation wurde offengelassen, für wie viele Wochen der Kaugummikauf berechnet werden soll. Es werden von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern wahrscheinlich unterschiedliche Fragestellungen genannt, die unterschiedliche Antworten zur Folge haben. Bei der Auswertung können verschiedene Ideen gesammelt werden. Nachfolgend einige Beispiellösungen:

- nach einer Woche: $1 \cdot 9\text{€} = 9\text{€}$
- nach zwei Wochen: $2 \cdot 9\text{€} = 18\text{€}$
- nach vier Wochen: $4 \cdot 9\text{€} = 36\text{€}$
- nach zehn Wochen: $10 \cdot 9\text{€} = 90\text{€}$

Die Kursleitung entscheidet, ob sie nach der Einzelarbeitsphase den Zwischenschritt der paarweisen Auswertung einbaut (wie bei den Erläuterungen zum **Aufgabenblatt 13.1b** beschrieben).

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Die Kursleitung macht es von der Gruppendynamik und dem Zeitbudget abhängig, ob sie die Aufgaben mit dem gesamten Kurs durchgeht oder ob die Ergebnisse in Tandems vorgestellt werden.

Die Teilnehmer/-innen werden immer dazu aufgefordert, ihre Antworten zu erläutern. Folgende Fragen unterstützen das Erläutern:

Wie und warum sind Sie zu dieser Lösung gekommen?

Könnte nicht auch ____ richtig sein?

Haben die anderen Teilnehmer/-innen andere Ideen/Lösungen?

Bestehen bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern größere Unsicherheiten, kann die Kursleitung mit der  **Kopiervorlage 6** ähnliche Aufgabenblätter entwerfen. Die Inhalte, vor allem das Wissen um den Zusammenhang von Addition und Multiplikation, das Identifizieren von Gesamt- und Teilmengen und schließlich das Entwickeln einer passenden Gleichung sind unbedingte Voraussetzung für das Routinisieren des Einmaleins. Dieses Wissen muss sicher und gefestigt sein, bevor mit dem Kurs das kleine Einmaleins (siehe Kapitel 13.2) erarbeitet wird.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1.5 Einzelarbeit – Funktion der Faktoren/Faktorentausch

Gegenstand der nachfolgenden Aufgabenblätter ist die unterschiedliche Rolle der Faktoren in Multiplikationsaufgaben. Die Lösung – die Gesamtmenge – bleibt gleich, egal, welche Zahl die erstgenannte ist, aber die Mengenhandlung ändert sich. Die Unterscheidung des ersten und des zweiten Faktors ist wichtig für die Her- und Ableitung von Aufgaben des Einmaleins. Nur wenn die Teilnehmer/-innen sicher wissen, dass bei $4 \cdot 3$ ($3 + 3 + 3 + 3$) die Drei viermal vorhanden ist, können sie leicht von $4 \cdot 3$ auf $5 \cdot 3$ ($3 + 3 + 3 + 3 + 3$) schließen. Die Teilnehmer/-innen schlussfolgern mit diesem Wissen sicher, dass bei $5 \cdot 3$ im Vergleich zu $4 \cdot 3$ nur eine Drei mehr vorhanden ist.

Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ist an dieser Stelle des Kurses bereits bewusst, dass der erste Faktor angibt, wie oft die Zahl an der Stelle des zweiten Faktors vorhanden ist. Nun stehen die Konsequenzen eines Faktorentausches im Mittelpunkt. Anschließend werden die Teilnehmer/-innen aufgefordert, selbst eine Sachsituation zu beschreiben, bei der die Faktoren getauscht wurden.

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 13.1e

Vor der Bearbeitung des Aufgabenblattes sollte diesmal nicht angekündigt werden, welche Thematik im Fokus des **Aufgabenblattes 13.1e** steht. Es könnte stattdessen angekündigt werden, dass nun überprüft wird, ob das Wissen um die Mal-Aufgaben bei allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern sicher ist. Die Fragestellungen nach Plus- und Mal-Aufgaben und den Gesamt- und Teilmengen dürften nunmehr kein Problem darstellen, da diese bereits in den vorhergehenden Unterrichtssequenzen abgefragt wurden. Sollte es Teilnehmer/-innen geben, die Schwierigkeiten beim Finden der zusammengehörigen Additions- und Multiplikationsaufgaben oder bezüglich der Gesamt- und Teilmengen haben, werden diese Themen erst abgesichert. Eine Möglichkeit, um diese Gedanken abzusichern, ist das Erstellen von Aufgabenblättern mit den  **Kopiervorlagen 5 und 6**.

Darüber hinaus spricht die Kursleitung mit dem/der Teilnehmer/-in über die Aufgaben und ergründet dabei, welcher mathematische Zusammenhang noch nicht verstanden wurde.

Besonderer Fokus liegt nun auf dem Faktorentausch, denn der einzige Unterschied zwischen der oberen und der unteren Aufgabe auf dem **Aufgabenblatt 13.1e** liegt darin, dass die Faktoren getauscht wurden.

Rückschau

Im Auswertungsgespräch geht es um die wichtigsten Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den Aufgaben. Dabei helfen folgende Fragestellungen:

Was ist Ihnen bei beiden Aufgaben aufgefallen?
 Gibt es Gemeinsamkeiten zwischen der oberen und der unteren Aufgabe? Was ist gleich geblieben und was hat sich verändert?
 Hat sich die Frage geändert?
 Sehen Ihre Rechenskizzen für die obere Aufgabe anders aus als für die untere Aufgabe?
 Sind die Plus-Aufgaben/Mal-Aufgaben unterschiedlich? Wie unterscheiden sich die Plus-Aufgaben? Wie unterscheiden sich die Mal-Aufgaben?
 Hat sich die Gesamtmenge geändert? Haben sich die Teilmengen geändert?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Sollten im Anschluss an die Bearbeitung des **Aufgabenblattes 13.1e** noch Unsicherheiten bestehen oder sollen Aufgaben für zu Hause mitgegeben werden, kann die Kursleitung mithilfe des **Aufgabenblattes 13.1f** (Blankoformat) weitere Aufgabenblätter erstellen. Die Kursleitung notiert auf der Vorlage zwei ähnliche Sachsituationen mit getauschten Faktoren, um das Wissen um die Konsequenzen eines Faktorentausches zu festigen.

Beispiele für Rechengeschichten mit vertauschten Faktoren:

- Carlotta isst jeden Tag zwei Scheiben Brot. Wie viele Scheiben hat sie an 7 Tagen insgesamt gegessen?
- Carlotta isst jeden Tag sieben Scheiben Brot. Wie viele Scheiben hat sie dann an zwei Tagen insgesamt gegessen?
- Martin kauft drei Packungen mit Muffins. In den Packungen sind jeweils vier Muffins.
- Martin kauft vier Dreierpacks mit Muffins.

13.1g

Auf dem **Aufgabenblatt 13.1g** sollen die Teilnehmer/-innen eine bereits vorgegebene Sachsituation umschreiben und dabei die Textteile ändern, die einen Faktorentausch anzeigen.

Im sich anschließenden Auswertungsgespräch werden die Teilnehmer/-innen ihre unterschiedlichen Ideen zur geänderten Sachsituation vortragen und schließlich gemeinsam mit der Kursleitung überlegen:

Wie hat sich die Geschichte geändert?
Was ist gleich an den Geschichten?
Was unterscheidet sich bei beiden Geschichten?
Muss die Rechenskizze nach dem Faktorentausch anders aussehen?
Haben sich Frage und Antwort geändert?
Haben sich die Teilmengen geändert?
Hat sich die Gesamtmenge geändert?
Hat sich die Vervielfachung geändert?

Die selbst geschriebenen Geschichten der Teilnehmer/-innen dürften sich nicht wesentlich voneinander unterscheiden, da ausschließlich die Faktoren getauscht und die dafür wichtigen Stellen in der Geschichte abgeändert werden sollen. Leon muss nun sechs Eierpackungen mit jeweils zehn Eiern kaufen. Die Frage nach der Gesamtmenge der Eier und die Antwort 60 Eier bleiben gleich.

Auch zum **Aufgabenblatt 13.1g** gibt es ein **Aufgabenblatt 13.1h** im Blankoformat, mit dem die Kursleitung den Aufgabenumfang individuell erweitern kann. Die Kursleitung beschreibt dafür Sachsituationen, die es den Teilnehmerinnen und Teilnehmern möglich machen, selbst die Geschichte so umzuschreiben, dass die Faktoren vertauscht sind.

Beispiele:

In jeder Wohnung wohnen genau zwei Personen. Im Haus gibt es sechs Wohnungen.
Kai ist heute mit vielen Autos Probe gefahren. Er war in fünf Autohäusern und in jedem hat er ein Auto zur Probe gefahren.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Ihr Wissen um die Operationslogik der Multiplikation sollte mit der Bearbeitung der **Aufgabenblätter 13.1a** bis **13.1h** erweitert und vertieft worden sein.
- Sie sind nun in der Lage, zu Sachsituationen die entsprechenden Multiplikationsaufgaben zu finden. Wenn zuerst die entsprechende Plus-Aufgabe herausgearbeitet wird, hilft das, die korrekte Mal-Aufgabe zu finden.
- Des Weiteren können die Teilnehmer/-innen Fragestellungen zu multiplikativen Sachsituationen entwickeln. Die Teilnehmer/-innen klären vorab, was sie herausfinden möchten und welche Informationen einer Sachsituation von Relevanz sind.
- Die Teilnehmer/-innen können Sachsituationen analysieren und filtern die wichtigen Angaben aus einer Text- oder Sachaufgabe heraus. Darüber hinaus erlesen sie, was sie mit diesen Aufgaben berechnen können.
- Um sich den Umgang mit Mal-Aufgaben in Zukunft zu erleichtern, haben die Teilnehmer/-innen gelernt, Rechenskizzen zu Sachsituationen anzufertigen. Durch das Anfertigen von Skizzen setzen sich die Teilnehmer/-innen intensiver mit den Mengen und der Handlung auseinander, bevor eine Gleichung notiert und berechnet wird.
- Die Teilnehmer/-innen können sicher Gesamt- und Teilmengen in Mal-Aufgaben benennen. Dies ist Grundlage für die Herleitung von Mal-Aufgaben. Bei der Herleitung von Aufgaben des Einmaleins ist es wichtig zu wissen, welche Zahl zu $4 \cdot 3$ hinzugefügt wird, um $5 \cdot 3$ zu ermitteln.
- Für die Routinisierung des Einmaleins ist es außerdem von Vorteil zu erkennen, wie sich ein Faktorentausch auf die Sachsituation auswirkt.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 1



$$1 \cdot 8 = 8$$

$$8 \cdot 1 = 8$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$5 \cdot 3 = 15$$

$$2 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 2 = 0$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 2

1. Aufgabe

Welche Plus-Aufgabe passt zur vorgespielten Aufgabe?

Welche Mal-Aufgabe passt zur vorgespielten Handlung?

Welche Bedeutung hat der erste Faktor?

Der erste Faktor gibt an

Was gibt der zweite Faktor an?

Der zweite Faktor gibt an

Welche Frage kann an die Aufgabe gestellt werden?

Wie viele

2. Aufgabe

Welche Plus-Aufgabe passt zur vorgespielten Aufgabe?

Welche Mal-Aufgabe passt zur vorgespielten Handlung?

Welche Bedeutung hat der erste Faktor?

Der erste Faktor gibt an

Was gibt der zweite Faktor an?

Der zweite Faktor gibt an

Welche Frage kann an die Aufgabe gestellt werden?

Wie viele

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 3

3. Aufgabe

Welche Plus-Aufgabe passt zur vorgespielten Aufgabe?

Welche Mal-Aufgabe passt zur vorgespielten Handlung?

Welche Bedeutung hat der erste Faktor?

Was gibt der zweite Faktor an?

Welche Frage kann an die Aufgabe gestellt werden?

4. Aufgabe

Welche Plus-Aufgabe passt zur vorgespielten Aufgabe?

Welche Mal-Aufgabe passt zur vorgespielten Handlung?

Welche Bedeutung hat der erste Faktor?

Was gibt der zweite Faktor an?

Welche Frage kann an die Aufgabe gestellt werden?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 4



$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$
$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$
$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$
$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 5

Sachsituation:

Rechenskizze:

Frage:

Plus-Aufgabe:

Mal-Aufgabe:

Antwort:

Sachsituation:

Rechenskizze:

Frage:

Plus-Aufgabe:

Mal-Aufgabe:

Antwort:

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 6

Sachsituation:

Frage:

Rechenskizze:

Plus-Aufgabe:

Mal-Aufgabe:

Antwort:

Gesamtmenge:

Teilmenge:

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Schlagwörter: Das Ganze • Die Teile • Einzelarbeit • Kursgespräch • Mengen • Multiplikation • Spiel • Vortrag • Zahlen bis 100

13.2 Das kleine Einmaleins

Exploration

In den folgenden Unterrichtsgesprächen und Einzelarbeitszeiten wird mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern erarbeitet, wie sie Mal-Aufgaben ableiten können. Das kleine Einmaleins wird nicht auswendig gelernt, sondern die Teilnehmer/-innen werden mit ihrem vorhandenen Wissen um die Operationslogik der Multiplikation zukünftig alle Aufgaben berechnen können. Nach mehrmaligem Herleiten der Aufgaben routinisieren die Teilnehmer/-innen i. d. R. das kleine Einmaleins.

In einem ersten Schritt werden die eventuell schon bekannten und zum Herleiten besonders wichtigen Mal-Aufgaben besprochen – die Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben. Viele Teilnehmer/-innen wissen schon die Antwort auf die Frage „Wie viel ist zehnmal fünf?“. Trotzdem ist es notwendig zu wissen, wie diese Lösung zustande kommt. Nur so sind sie in der Lage, bei Unsicherheit Ergebnisse zu überprüfen, indem sie Divisions-Aufgaben ableiten. Die Teilnehmer/-innen werden am Ende dieses Kurses also nicht nur wissen, dass $10 \cdot 5$ insgesamt 50 sind, sondern auch, warum dies so ist.

Haben sie die Logik des Ableitens verstanden, werden sie später auch Aufgaben mit großen Faktoren berechnen können. Dazu ein Beispiel: Wenn bekannt ist, was bei der Verzehnfachung einer Zahl passiert, können die Teilnehmer/-innen später auch Aufgaben wie $10 \cdot 18$ berechnen.

Nach der Beschäftigung mit Zehnmal-Aufgaben wird die Berechnung von Zweimal-Aufgaben näher betrachtet. Zweimal-Aufgaben sind deshalb einfach zu berechnen, weil die Zahlen *nur* verdoppelt werden. Diese Verdoppelung wird Gegenstand des Kursgespräches *Zweimal* und der Einzelarbeit *Zehnmal- und Zweimal-Aufgaben* sein.

Auch die Fünfmal-Aufgaben sind einigen Teilnehmerinnen und Teilnehmern bereits bekannt. Für diese wird anschließend ein Weg zur Herleitung erarbeitet.

Die anderen Mal-Aufgaben (z. B. Dreimal-Aufgaben, Achtmal-Aufgaben usw.) können schließlich mit dem Wissen um die Zehnmal-, Zweimal-, Fünfmal- und Einmal-Aufgaben abgeleitet werden. Mithilfe des Wissens um die Operationslogik der Multiplikation werden alle Aufgaben des Einmaleins her- bzw. abgeleitet.¹

Die Teilnehmer/-innen sind in den nachfolgenden Stunden aufgefordert, möglichst viele mathematische Zusammenhänge selbst zu entdecken. Für die Zahlen Eins bis Fünf stehen Vorlagen für Mengenbilder zur Verfügung. Die Zahlen Sechs bis Zehn setzen die Teilnehmer/-innen aus den vorliegenden Mengenbildern der Zahlen Eins bis Fünf zusammen. Mit diesen Mengenbildern werden Mal-Aufgaben visualisiert, sodass die Teilnehmer/-innen Strukturen erkennen können, die für das Ableiten der Mal-Aufgaben wichtig sind.

13.2.1 Kursgespräch – Zehnmal

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung stellt allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein laminiertes Hunderterfeld² zur Verfügung. In dieses können Mal-Aufgaben eingezeichnet werden. Werden Mal-Aufgaben in ein Hunderterfeld eingezeichnet, ist besonders der Faktorentausch gut nachzuvollziehen.

¹ Die aktuelle Version (2017) von Kapitel 13 beansprucht noch nicht die Herleitung des kompletten Einmaleins. Vorerst liegen ausschließlich Unterrichtskonzepte zur Herleitung von Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben vor.

² Ein Hunderterfeld befindet sich in der  KOPIERVORLAGE 7. Dieses wird so einlaminiert, dass mit einem Folienstift immer wieder neue Mal-Aufgaben eingezeichnet werden können.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Herausarbeitung der Gesamt- und Teilmengen

Die Kursleitung bittet alle Teilnehmer/-innen, zehnmal die Drei ($10 \cdot 3$) in das Hunderterfeld einzuzeichnen. Nach dem Einzeichnen könnte die Anordnung wie folgt aussehen.

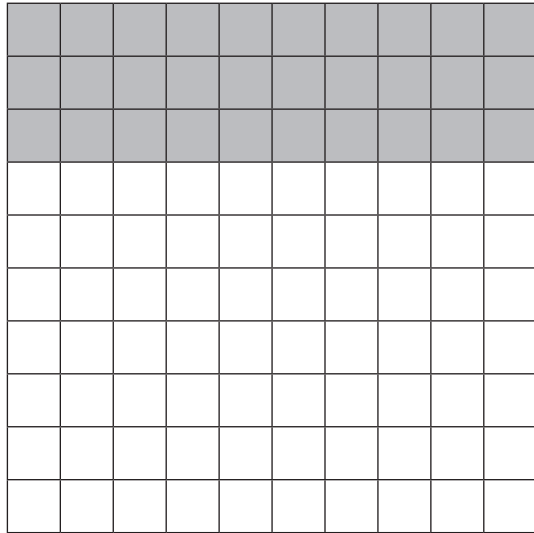


Abbildung 13.2-1: Waagerechte Kennzeichnung von $3 \cdot 10$ in einem Hunderterfeld

Die Dreiermengen wurden jeweils senkrecht eingezeichnet. Es sind zehn Dreiermengen eingezeichnet. Sollten die Teilnehmer/-innen die Dreier durcheinander gemalt haben, werden sie gebeten, immer eine Dreiermenge in eine Zeile oder in eine Spalte zu zeichnen. Es ist auch möglich, die Dreiermengen waagerecht einzuzeichnen.

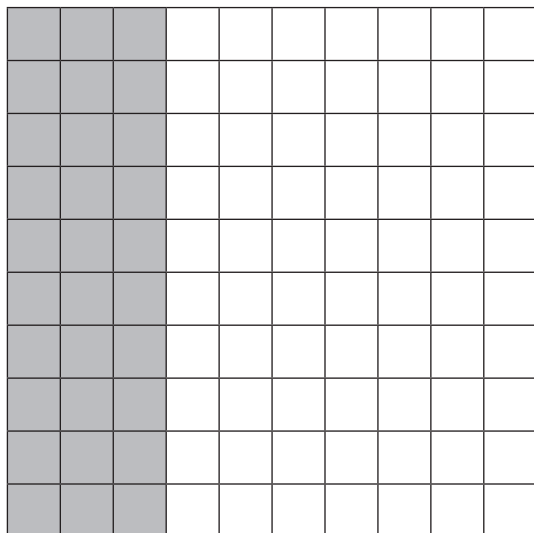


Abbildung 13.2-2: Senkrechte Kennzeichnung von $3 \cdot 10$ in einem Hunderterfeld

Bleiben wir beim ersten Beispiel – die Dreiermengen wurden waagerecht eingezeichnet.

Mögliche Fragen der Kursleitung an die Teilnehmer/-innen zur Herausarbeitung der Gesamt- und Teilmengen sind:

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Wie viel sind $10 \cdot 3$ insgesamt?
 Kann man im Hunderterfeld leicht erkennen, dass $10 \cdot 3$ insgesamt 30 sind? Woran kann man sehen, dass es insgesamt 30 sind?
 Wie viele Kästchen/Punkte haben Sie insgesamt eingezeichnet?
 Was können Sie in dieser Anordnung (alle Dreier in einer Linie nebeneinander) gut erkennen?

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 10 \cdot 3 = 30$$

Abbildung 13.2-3: Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe $10 \cdot 3$ in einem Hunderterfeld

Die Dreiermenge ist zehnmal vorhanden. Alle Teilnehmer/-innen haben die entsprechende Mengenhandlung durchgeführt, indem sie die Drei zehnmal eingezeichnet haben. Sie haben dabei die Dreiermenge vervielfacht. Zudem ist am Hunderterfeld gut zu erkennen, dass bei der Multiplikation die Gesamtmenge gesucht wird, denn es wurden insgesamt 30 Punkte/Kästchen eingezeichnet.

Anwendung des Faktorentausches

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer/-innen:

Wie heißt die Malaufgabe, wenn ich nun die waagerechten Mengen betrachte?
 Welche Malaufgabe können Sie erkennen, wenn Sie die waagerechten Mengen betrachten?

Nun werden die Mengen betrachtet, die waagerecht in einer Reihe sind. Das sind jeweils zehn. Von den waagerechten Zehnern sind insgesamt drei vorhanden. Also: $3 \cdot 10 = 30$. Wenn zehnmal die Drei vorhanden ist, lassen sich im Umkehrschluss auch dreimal die Zehn – drei Zehner – finden.

Der soeben beschriebene Zusammenhang kann mit allen Zehnmal-Aufgaben verdeutlicht werden, sobald die Mengen in geordnete Reihen gelegt werden. Sobald eine Zahl zehnmal vorhanden ist, sind entsprechend der Zahl, die verzehnfacht wurde, gleich viele Zehner vorhanden.

$$10 \cdot 5 = 5 \cdot 10 = \text{fünf Zehner}$$

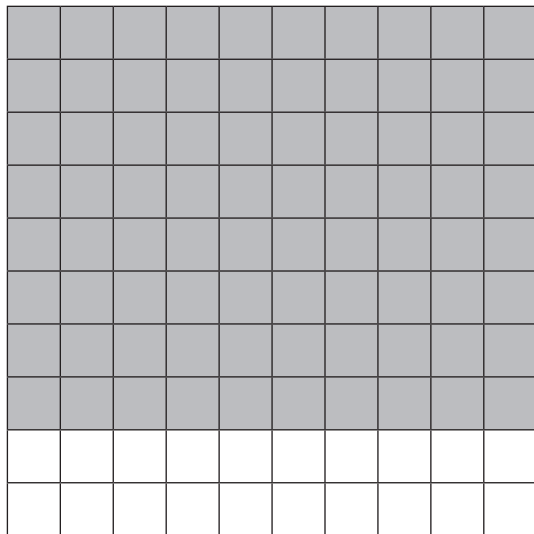
$$10 \cdot 9 = 9 \cdot 10 = \text{neun Zehner}$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Weitere Beispiele eines Faktorentausches bei Zehnmal-Aufgaben

Es ist empfehlenswert, noch mindestens ein weiteres Beispiel für den Faktorentausch bei einer Verzehnfachung zu betrachten. Der Zusammenhang wird auf dem [Aufgabenblatt 13.2a](#) zu einem späteren Zeitpunkt in diesem Unterrichtskonzept noch weiter vertieft.

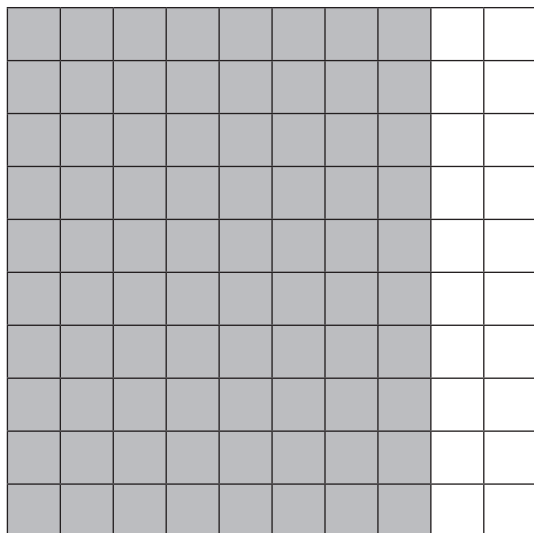
Die Kursleitung fordert die Teilnehmer/-innen auf, eine Achtermenge in eine Spalte des Hunderterfeldes zu zeichnen. Anschließend soll diese Achtermenge verzehnfacht werden. Die Teilnehmer/-innen haben 10 · 8 Kästchen angemalt.



$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 10 \cdot 8 = 80$$

Abbildung 13.2-4: Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe $10 \cdot 8$ in einem Hunderterfeld

Die Teilnehmer/-innen werden aufgefordert, das Blatt einmal (um 90 Grad/um ein Viertel) zu drehen. Nach der Drehung ist zu erkennen, dass in jeder Spalte zehn Einer sind.



$$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 8 \cdot 10 = 80$$

Abbildung 13.2-5: Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe $8 \cdot 10$ in einem Hunderterfeld

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Die Kursleitung fasst zusammen.

Wenn zehnmal die Acht vorhanden ist, müssen auch acht Zehner vorhanden sein.

Die Kursleitung schätzt ab, ob weitere Übungen erforderlich sind oder ob thematisch zur nachfolgenden Unterrichtssequenz *Zweimal-Aufgaben* übergegangen werden kann.

Ist eine weitere Übung geplant, können die Teilnehmer/-innen z. B. aufgefordert werden, sich selbst ein ähnliches Beispiel zu suchen und dieses in das Hunderterfeld einzuzeichnen. Dazu gibt die Kursleitung fünf Minuten Zeit und unterstützt die Teilnehmer/-innen, denen diese Aufgabe schwer fällt. Anschließend präsentieren die Teilnehmer/-innen ihre Ergebnisse und besprechen diese miteinander.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

13.2.2 Kursgespräch – Zweimal

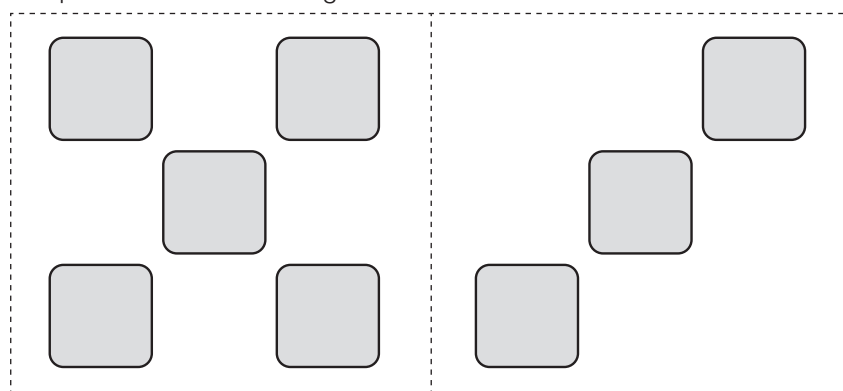
Durchführung und didaktische Hinweise

KOPIERVORLAGE 8

Alle Teilnehmer/-innen erhalten einen Satz der Mengenbilder aus der  **Kopiervorlage 8**.

Die Mengen – Sechser-, Siebener-, Achter-, Neuner- und Zehnermengen – können aus den vorliegenden Kopiervorlagen zusammengesetzt werden. Deshalb stehen die Fünfermengen auch in doppelter Ausführung zur Verfügung, damit die Teilnehmer/-innen auch zehn Zehnermengen legen können. Für eine Achtermenge beispielsweise kann die Kursleitung zehn Fünfer- und zehn Dreiermengen kopieren, zusammenkleben und anschließend laminieren.

Beispiel für eine Achtermenge:



Im nachfolgenden Kursgespräch werden Zweimal-Aufgaben berechnet. Alle Teilnehmer/-innen sollen verstehen, dass jede Zweimal-Aufgabe den Auftrag zur Verdoppelung der Ausgangsmenge enthält. Die Kursleitung gibt den Auftrag, verschiedene Zweimal-Aufgaben, wie z.B. $2 \cdot 5$ oder $2 \cdot 8$, mit den kopierten Mengenbildern zu legen.



Nach dem Legen fragt die Kursleitung die Teilnehmer/-innen:

*Wie kann man Aufgaben ausrechnen, bei denen etwas zweimal vorhanden ist?
Geht das auch bei großen Zahlen? Beispielsweise bei $2 \cdot 1 \text{ Million}$ oder $2 \cdot 3000$?*

Hierbei geht es darum, dass die Teilnehmer/-innen alle Zweimal-Aufgaben schnell berechnen können, weil sie das Prinzip der Verdoppelung verstanden haben. Die Teilnehmer/-innen sollen verstehen, dass *zweimal* und Verdoppelung dasselbe ist. Formal kann es wie folgt formuliert werden: $2 \cdot x = x + x$. Wenn dieser Zusammenhang von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern nicht unmittelbar verstanden wird, kann mit folgender Strukturbetrachtung gearbeitet werden:

$$5 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

$$4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$$

$$3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3$$

$$2 \cdot 3 = 3 + 3$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$5 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

$$4 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7$$

$$3 \cdot 7 = 7 + 7 + 7$$

$$2 \cdot 7 = 7 + 7$$

$$1 \cdot 7 = 7$$

Es wird deutlich, dass *zwei Mal eine Zahl* genau der Verdoppelung dieser Zahl entspricht.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.2.3 Einzelarbeit – Zehnmal- und Zweimal-Aufgaben

Kopiervorlage 9 und Aufgabenblatt 13.2a

Mit dem folgenden **Aufgabenblatt 13.2a** kann sich die Kursleitung versichern, ob alle Kursteilnehmer/-innen verstanden haben, wie und warum man Zehnmal- und Zweimal-Aufgaben sehr leicht berechnen kann.

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung zeigt zunächst noch einmal, wie auf dem Hunderterfeld Mal-Aufgaben eingezeichnet werden: Es wird z. B. ein „4 · 6“-Feld eingekreist. Die Kursleitung zeigt, dass dort 4-mal 6 Elemente gesehen werden sollen und dass damit die Aufgabe $4 \cdot 6$ visualisiert wurde. Die Kursleitung verdeutlicht zudem, dass auch der Blickwinkel auf die Situation geändert werden kann – durch Drehen des Blattes oder durch *Umdenken*; so werden 6-mal 4 Mengenelemente gesehen, damit ist die Aufgabe $6 \cdot 4$ gemeint. Es ist zu erkennen, dass $4 \cdot 6$ und $6 \cdot 4$ die gleiche Gesamtmenge aufweisen. Die Kursleitung legt nun den Teilnehmerinnen und Teilnehmern das **Aufgabenblatt 13.2a** vor. Nach einer Bearbeitungszeit von ca. 10 Minuten werden die Ergebnisse im Kurs ausgewertet. Während der Bearbeitung des Aufgabenblattes geht die Kursleitung zu den Teilnehmerinnen und Teilnehmern und beobachtet, ob vor allem die Aufgabe des Einkreisens richtig verstanden worden ist. Die Teilnehmer/-innen begründen im sich anschließenden Auswertungsgespräch, warum die Aufgaben leicht zu berechnen sind.

Wichtig ist hierbei die Erkenntnis, dass bei Zehnmal-Aufgaben entsprechend viele Zehner vorhanden sind. Denn $10 \cdot \text{die Sechs}$ heißt auch, es ist sechsmal die Zehn vorhanden, also sechs Zehner (= 60). Dieser Zusammenhang wird den Teilnehmerinnen und Teilnehmern nochmals mithilfe eines Hunderterfeldes verdeutlicht. Es soll ein Verständnis geschaffen werden, das über „man muss nur eine Null anhängen“ hinausgeht. Haben einige Teilnehmer/-innen sich die Thematik noch nicht gänzlich erschlossen, kann die Kursleitung mit der  **Kopiervorlage 9** weitere Aufgabenblätter erstellen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

13.2.4 Kursgespräch – Fünfmal

Auch das Herleiten von *Fünfmal-Aufgaben* ist ein wichtiger Schritt zum Ableiten von Einmaleins-Aufgaben. Die *Fünferreihe* ist nicht die am schwersten herzuleitende *Malreihe*³, aber während der nachfolgenden Unterrichtsstunden muss erstmals ein Ableitungszusammenhang verstanden und verwendet werden. Um Fünfmal-Aufgaben zu berechnen, wird die Gesamtmenge einer Zehnermultiplikation halbiert. Denn die Besonderheit bei *Fünfmal-Aufgaben* ist, dass die Gesamtmenge einer Fünfmal-Aufgabe immer genau die Hälfte der Zehnmal-Aufgabe der gleichen Zahl ist. Dafür ein Beispiel:

$10 \cdot 4 = 40 \rightarrow$ deshalb ist $5 \cdot 4 = 20$ (■) $\rightarrow$ weil in $10 \cdot 4$ einmal $5 \cdot 4$ (■) und noch einmal $5 \cdot 4$ (◆) enthalten sind.

◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■

Durchführung und didaktische Hinweise

Um dies zu veranschaulichen, zeichnet die Kursleitung mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern eine Zehnmal-Aufgabe in das Hunderterfeld. Sollte der Kurs zu groß sein, kann die Kursleitung die Mengen auch an die Tafel zeichnen oder einen Overheadprojektor benutzen. Zum Beispiel könnte viermal zehn, wie in der obigen Abbildung, eingezeichnet werden. Die Menge soll anschließend so geteilt werden, dass die Zehner in Fünf und Fünf getrennt sind.

Nachfolgend ein weiteres Beispiel. Die Kursleitung zeichnet erneut mit dem Kurs eine Zehnmal-Aufgabe in ein Hunderterfeld: z. B. zehnmal die Neun ($10 \cdot 9$) bzw. neunmal zehn ($9 \cdot 10$).

³ Reihe wurde hier bewusst kursiv gesetzt, da in diesem Kurs eben keine Reihen auswendig gelernt werden sollen, sondern Kompetenzen zum Ab- und Herleiten der Aufgaben des Einmaleins erworben werden. Gerade die „Fünferreihe“ wird oft auswendig gewusst. Und trotzdem sollen die Teilnehmer/-innen des Kurses lernen, Fünfmal-Aufgaben herzuleiten, um mithilfe der Fünfmal-Aufgaben Viermal-, Sechsmal-, Siebenmal- und Achtmal-Aufgaben ableiten zu können.

⁴ Wir haben kein Kriterium, um zu entscheiden, ob diese Konstellation mit $9 \cdot 10$ oder mit $10 \cdot 9$ eingezeichnet werden soll. Die Argumentation funktioniert mit beiden Sprechweisen, man muss die einmal gewählte Sprechweise aber konsequent weiter verwenden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

Die Teilnehmer/-innen werden aufgefordert, einen Strich senkrecht und mittig durch das Hunderterfeld zu ziehen. Die Kursleitung fragt:

Welche Malaufgabe sehen Sie nun auf der linken Seite der Linie?
 Welche Malaufgabe sehen Sie auf der rechten Seite der Linie?
 Sind rechts und links unterschiedlich oder sind gleich viele Kästchen gekennzeichnet?

◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■
◆	◆	◆	◆	◆	■	■	■	■	■

Wenn die Teilnehmer/-innen erkannt haben, dass nun die Aufgaben $5 \cdot 9$ (◆) und $5 \cdot 9$ (■), bzw. $9 \cdot 5$ (◆) und $9 \cdot 5$ (■), zu sehen sind, erfragt die Kursleitung, wie viele Punkte/Quadrate nun in dem einen und dem anderen Feld sein müssen. Hierbei ist es wichtig zu erkennen, dass in beiden Hälften genau gleich viele Punkte sind. Die Gesamtmenge wurde genau halbiert.

Die Kursleitung lässt im Anschluss die Teilnehmer/-innen selbstständig eine Aufgabe finden, mit der sie zeigen können, dass *fünfmal* die Hälfte von *zehnmal* sein muss.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Es ist zwar schnell erklärt, wie man von Zehnmal-Aufgaben zu Fünfmal-Aufgaben gelangt, wirklich sicher ist das Wissen jedoch erst, wenn der/die Teilnehmer/-in den Zusammenhang (eventuell mehrfach) selbst entdeckt und mehrmals selbstständig mit dem Sachverhalt umgeht.

Die wichtigsten Erkenntnisse zu diesem Zeitpunkt sind:

Bei der mittigen Zerlegung einer verzehnfachten Menge wird die Gesamtmenge genau halbiert. Ist die Gesamtmenge halbiert, ist zu erkennen, dass in einer Zehnmal-Aufgabe genau zwei Fünfmal-Aufgaben enthalten sind.

$$\begin{aligned}
 10 \cdot 9 &= 5 \cdot 9 + 5 \cdot 9 \\
 90 &= 45 + 45
 \end{aligned}$$

Demnach muss die Fünfmal-Aufgabe einer Zahl genau die Hälfte der Zehnmal-Aufgabe der gleichen Zahl sein.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.2.5 Einzelarbeit – Fünfmal-Aufgaben

Durchführung und didaktische Hinweise

Aufgabenblätter 13.2b und 13.2c

Alle Aufgabenblätter legen den Fokus auf die Mengenbetrachtung bei Mal-Aufgaben. Es ist nicht entscheidend, wie schnell die Lösungen berechnet werden. Vielmehr sollen die Teilnehmer/-innen verstehen, dass in einer Zehnmal-Aufgabe zwei Fünfmal-Aufgaben enthalten sind und dass sie deshalb nur die Gesamtmenge der Zehnmal-Aufgabe halbieren müssen. So erfahren sie, wie viele es insgesamt sind, wenn sie eine Zahl fünfmal haben.

Die Kursleitung achtet darauf, dass alle Teilnehmer/-innen die Aufgabenstellung verstanden haben. Die Fragestellungen werden gemeinsam mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgegangen, ohne jedoch bereits Lösungen zu nennen. Die Kursleitung erinnert die Teilnehmer/-innen daran, Fragen zu stellen, falls sie etwas nicht verstanden haben.

Die Bearbeitungszeit je Aufgabenblatt wird zwischen zehn und 15 Minuten betragen. Es wird vorerst nur ein Aufgabenblatt ausgegeben und im Anschluss an die Bearbeitung werden die Lösungen im Kurs besprochen. Wenn die Gruppendynamik es zulässt, finden sich nach der Bearbeitung Zweiergruppen zusammen. Sie vergleichen ihre Lösungen miteinander und besprechen diese.

Die Teilnehmer/-innen werden immer wieder aufgefordert, ihre Lösungen zu begründen. Wenn nötig, kann die Kursleitung auch falsche Behauptungen aufstellen, um eine Diskussion anzustoßen. Die Kursleitung behauptet z. B.:

*Im linken Kasten sind eindeutig mehr Kreise als Quadrate als im rechten Kasten.
Im linken und rechten Kasten sind unterschiedliche Aufgaben eingezeichnet.
Man muss immer nochmal nachzählen, ob die verfünffachte Menge wirklich die Hälfte der zehnfachen Menge ist.*

Es besteht für die Kursleitung wieder die Möglichkeit, ähnliche Aufgabenblätter zu erstellen. Dafür sind die



Kopiervorlagen 10 und 11 vorgesehen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.2.6 Routinisierungsaufgabe – Einmaleins würfeln

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Teilnehmer/-innen bilden Zweiergruppen. Jede Gruppe erhält zwei Würfel, einen Würfel mit den Zahlen 1 bis 10 und einen Würfel, auf den die Zahlen 2, 5 und 10 geklebt wurden. Dazu können Notizklebezettel oder normales Papier, das mit Klebestreifen am Würfel befestigt wird, genutzt werden.

Wenn die Teilnehmer/-innen würfeln, bekommen sie immer eine Aufgabe in Kombination aus:

$$2 \cdot \text{irgendeine Zahl (1 bis 10)}$$

$$5 \cdot \text{irgendeine Zahl (1 bis 10)}$$

$$10 \cdot \text{irgendeine Zahl (1 bis 10)}$$

Der *gebastelte* Würfel mit den Zahlen 2, 5 und 10 ist immer (!) der erste Faktor. Es kann demnach nicht die Aufgabe $7 \cdot 10$, sondern nur die Aufgabe $10 \cdot 7$ gewürfelt werden. Diese Festlegung, welcher der erste und welcher der zweite Faktor ist, wird verhindern, dass Teilnehmer/-innen bestimmte Herleitungen vermeiden. Werden einige Wege der Ableitung vermieden, besteht i. d. R. eine Wissenslücke. Können die Teilnehmer/-innen hingegen flexibel herleiten, weil sie alle Zusammenhänge verstanden haben, werden sie immer den schnelleren Weg nutzen.

Nun werden abwechselnd Aufgaben gewürfelt und anschließend berechnet. Es sollte nicht nur die Lösung gesagt werden, sondern immer auch, wie diese Aufgabe berechnet werden kann, wenn man das Ergebnis nicht weiß. Die Teilnehmer/-innen sollen die Herleitung der Zweimal-, Fünfmal- und Zehnmal-Aufgaben üben. Sollten die Teilnehmer/-innen Schwierigkeiten haben, den Rechenweg zu formulieren, hilft die Vorstellung, die Aufgabe jemandem erklären zu müssen, der die Aufgabe nicht lösen kann. Sind die Teilnehmer/-innen im Formulieren des Rechenweges geübt, werden sie schon während des Herleitens ihren Rechenweg beschreiben – sie denken laut.

Nach der Herleitung der Mal-Aufgabe wird die Gesamtmenge notiert.

Nun würfelt der/die Mitspieler/-in auch eine Aufgabe und löst diese. Auch der/die Mitspieler/-in sollte erklären, wie er/sie zur Lösung gekommen ist bzw. die Aufgabe lösen würde, wenn er/sie die Lösung noch nicht weiß. Schließlich berechnet der/die Mitspieler/-in mit der größeren Zahl den Unterschied zwischen den gewürfelten Zahlen und erhält diese als Punkte. Anstatt in Form von Punkten, kann der Unterschied auch mit Spielgeld ausgezahlt werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Nachfolgend eine Spielanleitung für den Kurs und ein praktisches Beispiel zu diesem Spiel.

Spielablauf: 1 · 1-Würfelspiel

1. Spieler/-in 1 würfelt und rechnet die Mal-Aufgabe aus.
2. Spieler/-in 1 erklärt, wie man diese Aufgabe errechnen kann.
3. Spieler/-in 2 würfelt und rechnet die Mal-Aufgabe aus.
4. Spieler/-in 2 erklärt, wie er/sie diese Aufgabe ausgerechnet hat bzw. ausrechnen würde.
5. Die Spieler/-innen vergleichen ihre erwürfelten Zahlen.
6. Der/Die Spieler/-in mit der größeren Zahl errechnet den Unterschied und bekommt diesen als Punkte gutgeschrieben.
7. Wer am Ende die meisten Punkte hat, ist der/die Sieger/-in.

Das 1 · 1-Würfelspiel: ein Beispiel

Jutta würfelt eine 5 und eine 7. Sie soll die Aufgabe $5 \cdot 7$ berechnen. Ihr fällt sofort ein, dass es insgesamt 35 sind, sie muss aber noch erklären, wie sie die Aufgabe errechnen würde, wenn sie die Lösung nicht wüsste. Jutta sagt: „Ich weiß ja was $10 \cdot 7$ ist. Das sind 70. Und dann die Hälfte: sind 35.“

Justus würfelt 10 und 3. Er erklärt: „Bei $10 \cdot 3$ ist zehnmal die Drei da, das ist dasselbe wie dreimal die Zehn. Deshalb sind es insgesamt 30.“

Da Jutta die größere Zahl gewürfelt hat, muss sie den Unterschied von 30 und 35 berechnen. Sie erhält 5 Punkte bzw. 5 Euro Spielgeld.

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Sie können nun Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben herleiten. Die Teilnehmer/-innen wussten vielleicht schon vorher die Zehnerreihe auswendig und ihnen war bekannt, dass bei Zehnmal-Aufgaben nur eine Null angehängt werden muss. Nun wissen sie aber auch, warum das so ist.
- Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ist nun bekannt, dass bei der Verzehnfachung einer Zahl ($10 \cdot \underline{\quad}$) diese Zahl dann zehnmal vorhanden ist ($\underline{\quad} \cdot 10$). Es werden Zehner gebildet. Und zwar genau so viele Zehner wie die Zahl, die verzehnfacht werden soll. Das ist die Begründung dafür, dass einfach nur *Nullen angehängt* werden müssen.
- Des Weiteren wissen die Teilnehmer/-innen nun, dass es sich bei Zweimal-Aufgaben um die Aufforderung handelt, die Ausgangsmenge zu verdoppeln. Wenn eine Menge zweimal vorhanden ist, ist es genauso, wie wenn zu dieser Menge die gleiche Menge addiert wird ($\underline{\quad} + \underline{\quad}$).
- Außerdem können die Teilnehmer/-innen von Zehnmal-Aufgaben alle Fünfmal-Aufgaben ableiten. Dazu wird die Gesamtmenge, die durch die Verzehnfachung entstanden ist, halbiert. Denn wenn eine Zahl zehnmal vorhanden ist, ist sie fünfmal und noch einmal fünfmal vorhanden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 7

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 8 – Mengenvbilder



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

A 4x4 grid of 16 squares. Each square contains a smaller gray square with a black outline. The gray squares are arranged in a checkerboard pattern, with one gray square in each of the 16 cells of the 4x4 grid. The gray squares are positioned such that they are not adjacent to each other horizontally or vertically, but they are adjacent diagonally.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 9

Bitte kreisen Sie die Mengen in einer Spalte (von oben nach unten) ein.
Welche Mal-Aufgaben können Sie erkennen, wenn Sie die Zahlen von oben nach unten (in einer Spalte) anschauen?

Wie viele sind es insgesamt?

Bitte kreisen Sie die Mengen von links nach rechts (in einer Reihe) ein.
Welche Mal-Aufgabe können Sie erkennen, wenn Sie die Zahlen von links nach rechts (in einer Reihe) anschauen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Wie viele sind es insgesamt?

Bitte zeichnen Sie in den Kasten die Mal-Aufgabe $2 \cdot \underline{\quad}$ mit Kreisen oder Kästchen ein.

Welche Plus-Aufgabe hilft dabei, die Aufgabe $2 \cdot \underline{\quad}$ auszurechnen, ohne dass die einzelnen Punkte gezählt werden müssen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 10

Welche Mal-Aufgabe ist in den Kästen dargestellt?

© Copyright: Deutscher Volkshochschul-Verband e. V.

Welche Mal-Aufgabe wurde im linken Kasten dargestellt?

Welche Mal-Aufgabe sehen Sie im rechten Kasten?

Was fällt auf, wenn Sie den linken und den rechten Kasten miteinander vergleichen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Wie kann Ihnen die Aufgabe $10 \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ helfen, die Aufgabe $5 \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ zu lösen?

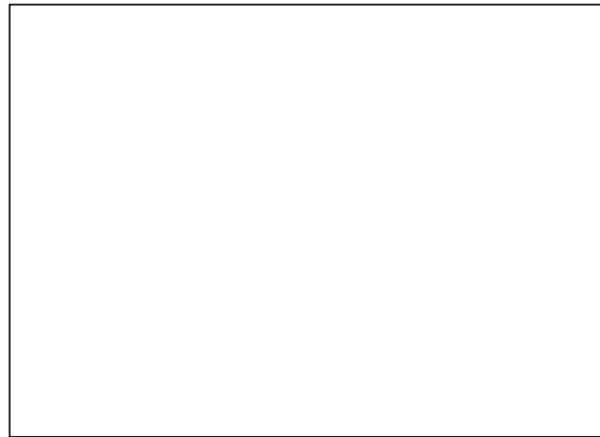
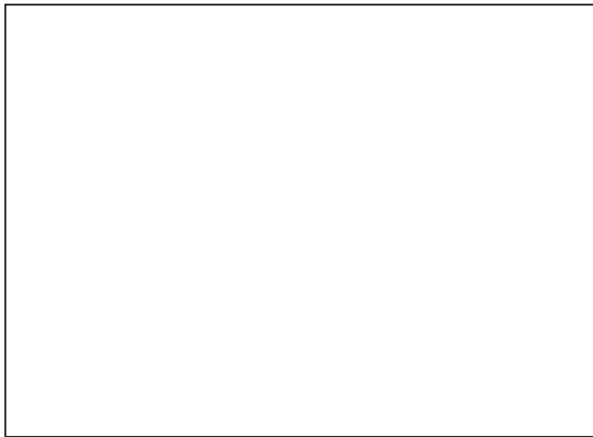
Werten Sie die Ergebnisse zusammen mit der Kursleitung aus!

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 11

Welche Mal-Aufgabe wird im linken Kasten abgebildet?



Wenn Sie die Zeichen verdoppeln würden, welche Mal-Aufgabe wäre dann oben abgebildet?

Wenn Sie bereits wissen, dass $10 \cdot \underline{\quad}$ Zeichen insgesamt $\underline{\quad}$ Zeichen sind: Wie können Sie dann ausrechnen, wie viel $5 \cdot \underline{\quad}$ Zeichen sind?

Was haben die Aufgaben $10 \cdot \underline{\quad}$ und $5 \cdot \underline{\quad}$ miteinander zu tun?

Werten Sie die Ergebnisse zusammen mit der Kursleitung aus!

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1a Drei Fünf-Euro-Scheine

Sophia hat in ihrem Portemonnaie drei 5-Euro-Scheine. (Sachsituation)

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.

Eine Rechenskizze ist eine Zeichnung, die die oben beschriebene Situation verdeutlicht und sichtbar macht.

Welche **Frage** kann hier gestellt werden? Was kann hier ausgerechnet werden?

Wie lautet die passende **Plus-Aufgabe**?

Wie lautet die passende **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1 b Container und Brötchen

Am Hafen werden Container mit neuen Autos beladen. In jeden Container passen vier Autos. Insgesamt gibt es sechs Container. Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.

Welche **Frage** kann hier gestellt werden? Was kann hier ausgerechnet werden?

Wie lautet die passende **Plus-Aufgabe**?

Wie lautet die passende **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

Clara verteilt Brötchen. Jede/-r der 7 Kursteilnehmer/-innen bekommt 2 Brötchen. Fertigen Sie eine passende *Rechenskizze* an.

Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

13.1c Friedas Kekse

Frieda möchte pro Stunde immer genau acht Kekse essen. Sie sitzt am Abend drei Stunden vor dem Fernseher.

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.

Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Wie groß ist die Gesamtmenge?

Wie groß sind die Teilmengen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1d Kaugummi und Badezimmerfliesen

Eric gibt jede Woche 9€ für Kaugummi aus.

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.

Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Wie groß ist die Gesamtmenge?

Wie groß sind die Teilmengen?

Herr Boden verlegt Fliesen in einem kleinen Bad. In jede Reihe passen immer 7 Fliesen. Er musste nur 6 Reihen verlegen.
Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Wie groß ist die Gesamtmenge?

Wie groß sind die Teilmengen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1e Lippenstifte in Handtaschen

Senta hat fünf verschiedene Handtaschen. In jeder Tasche sind zwei Lippenstifte.

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.

Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Wie groß ist die Gesamtmenge?

Wie groß sind die Teilmengen?

Senta hat zwei weitere Handtaschen im Auto. In jeder findet sie genau fünf Lippenstifte.

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Wie groß ist die Gesamtmenge?

Wie groß sind die Teilmengen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1f Blanko

Formulieren Sie selbst eine Sachsituation ähnlich den anderen Aufgabenblättern. Fertigen Sie dann entsprechend eine *Rechenskizze* an.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Wie groß ist die Gesamtmenge?

Wie groß sind die Teilmengen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1g Eierdiät

In der kleinen Eierpackung sind immer sechs Eier. Weil Leon die neueste Eierdiät machen möchte, kauft er gleich zehn Packungen.
Fertigen Sie eine *Rechenskizze* an.

Welche **Frage** kann hier gestellt werden? Und wie lautet die **Antwort**?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Nach dem Tausch der Faktoren lautet die neue Aufgabe:

$$\underline{\quad\quad} \cdot \underline{\quad\quad} = \underline{\quad\quad}$$

Wie ändert sich die Geschichte, wenn Sie die Faktoren tauschen?

Sie sollen nichts hinzuerfinden. Schreiben Sie nur die Geschichte um.

Fertigen Sie zu der neuen Geschichte eine *Rechenskizze* an und notieren Sie die passende **Frage** und **Antwort**.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1h Blanko

Denken Sie sich selbst eine ähnliche Sachsituation aus.
Fertigen Sie dazu eine *Rechenskizze* an.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

Welche **Frage** kann hier gestellt werden? Und wie lautet die **Antwort**?

Nach dem Tausch der Faktoren lautet die neue Aufgabe:

_____ = _____

Wie ändert sich die Geschichte, wenn Sie die Faktoren tauschen?

Sie sollen nichts hinzuerfinden. Schreiben Sie nur die Geschichte um.

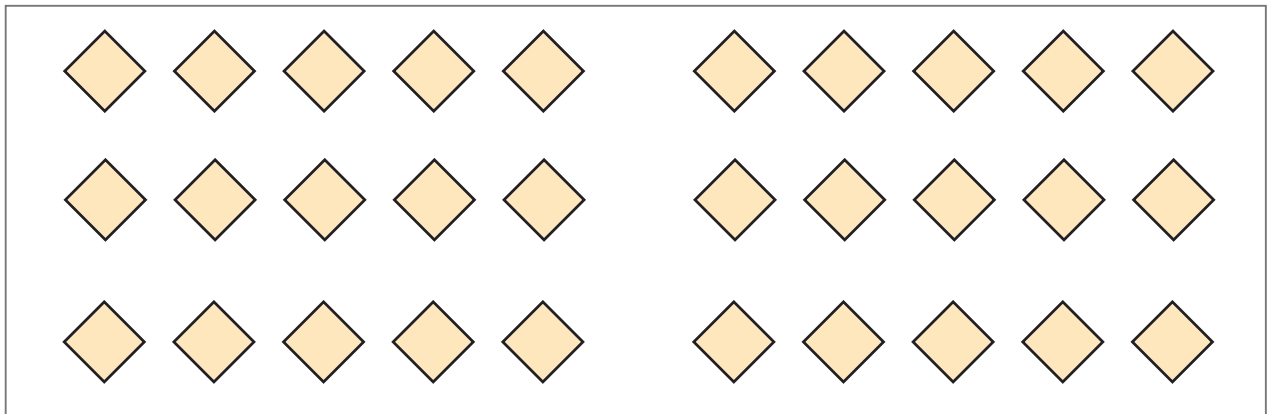
Fertigen Sie zu der neuen Geschichte eine *Rechenskizze* an und notieren Sie die passende **Frage** und **Antwort**.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.2a Karos

Bitte kreisen Sie die Karos in einer Spalte (von oben nach unten) ein.



Welche Mal-Aufgabe können Sie erkennen, wenn Sie die Mengen in einer Spalte anschauen?

Wie viele Karos sind es insgesamt?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Bitte kreisen Sie die Mengen von links nach rechts (in einer Zeile) ein.

Welche Mal-Aufgabe können Sie erkennen, wenn Sie die Menge von links nach rechts (in einer Zeile) anschauen?

Wie viele Karos sind es insgesamt?

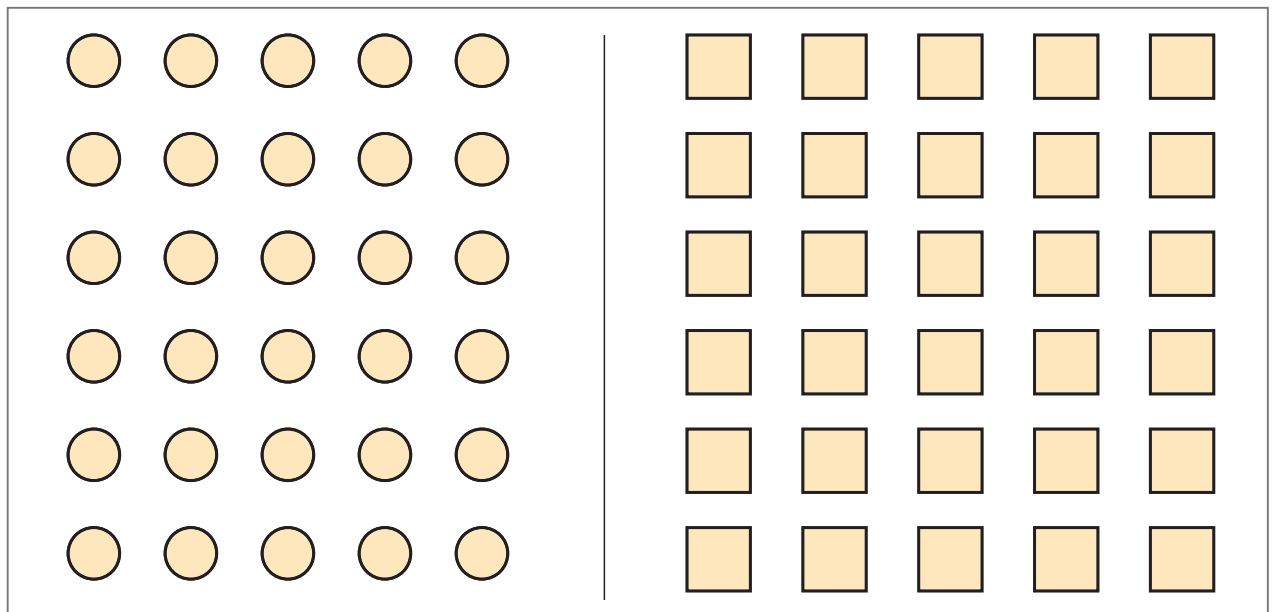
Zeichnen Sie in den Kasten die Mal-Aufgabe $2 \cdot 7$ mit Kreisen oder Kästchen ein.

Welche Plus-Aufgabe hilft dabei, die Aufgabe $2 \cdot 7$ auszurechnen, ohne die einzelnen Punkte zählen zu müssen?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.2b Punkte und Quadrate

Bitte schauen Sie sich folgende Abbildung genau an.



Welche Mal-Aufgabe ist in beiden Kästen zusammen dargestellt?

Welche Mal-Aufgabe wurde im linken Kasten (●) dargestellt?

Welche Mal-Aufgabe sehen Sie im rechten Kasten (□)?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Was fällt auf, wenn Sie den linken (●) und den rechten (■) Kasten miteinander vergleichen?

Wie kann Ihnen die Aufgabe $10 \cdot 6$ helfen, die Aufgabe $5 \cdot 6$ zu lösen?

Bitte werten Sie die Ergebnisse gemeinsam mit der Kursleitung aus!

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.2c Sterne

Bitte schauen Sie sich folgende Abbildung genau an.



Welche Mal-Aufgabe wird im Kasten abgebildet?

Wenn Sie die Sterne verdoppeln würden, welche Mal-Aufgabe wäre dann oben abgebildet?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Ihnen ist bereits bekannt, dass $10 \cdot 9$ Sterne insgesamt 90 Sterne sind.
Wie können Sie mithilfe von $10 \cdot 9$ Sternen ausrechnen, wie viel $5 \cdot 9$ Sterne sind?

Was haben die Aufgaben $10 \cdot 9$ und $5 \cdot 9$ miteinander zu tun?

Bitte werten Sie im Anschluss an die Arbeitszeit die Ergebnisse mit der Kursleitung aus!

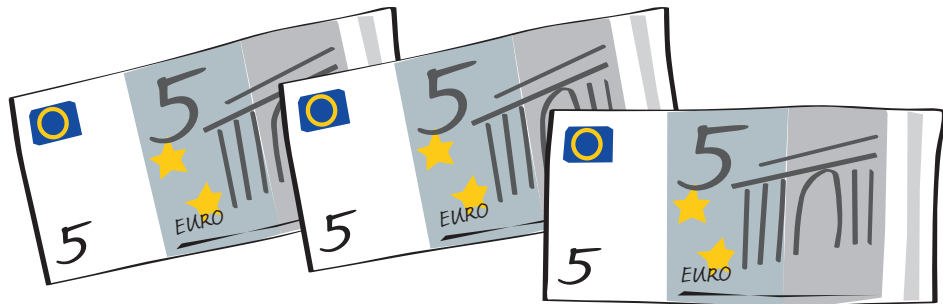
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

13.1a LÖSUNGEN – Drei Fünf-Euro-Scheine

Sophia hat in ihrem Portemonnaie drei 5-Euro-Scheine. (Sachsituation)

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.

Eine Rechenskizze ist eine Zeichnung, die die oben beschriebene Situation verdeutlicht und sichtbar macht.



Welche **Frage** kann hier gestellt werden? Was kann hier ausgerechnet werden?

Wie lautet die passende **Plus-Aufgabe**?

Wie lautet die passende **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Wie viel Geld hat Sophia insgesamt in ihrem Portemonnaie?

Um welche Zahl geht es hier?

Sind es $5 \cdot 3$ Euro oder sind es $3 \cdot 5$ Euro?

Plus-Aufgabe: $5 + 5 + 5 = 15$

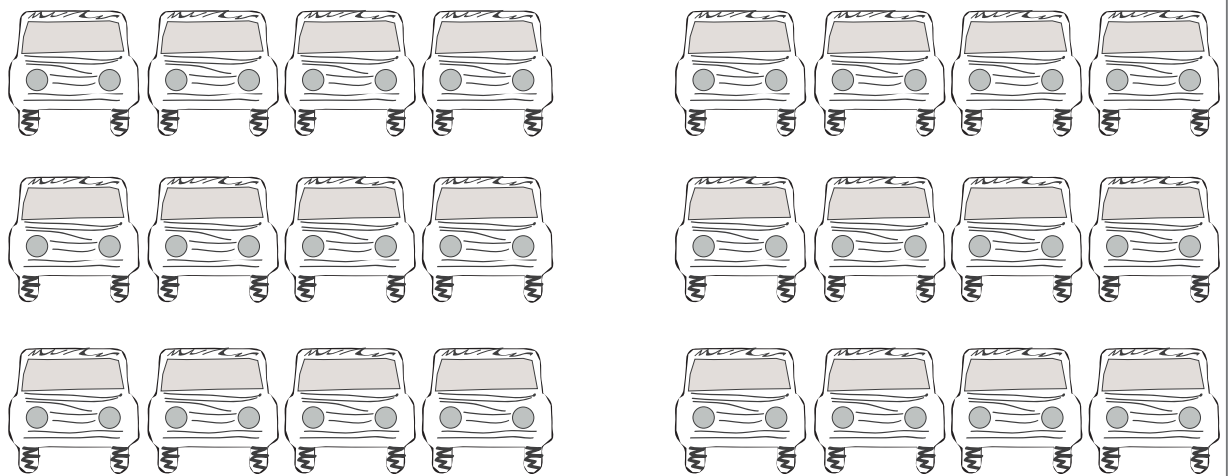
Mal-Aufgabe: $3 \cdot 5 = 15$

Antwort: Sophia verfügt insgesamt über 15 Euro in ihrem Portemonnaie.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

13.1b LÖSUNGEN – Container und Brötchen

Am Hafen werden Container mit neuen Autos beladen. In jeden Container passen vier Autos. Insgesamt gibt es sechs Container.
Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.



Welche **Frage** kann hier gestellt werden? Was kann hier ausgerechnet werden?

Wie lautet die passende **Plus-Aufgabe**?

Wie lautet die passende **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Wie viele Autos werden insgesamt in die Container verladen?

Um welche Zahl geht es hier?

Sind es $6 \cdot 4$ Autos oder $4 \cdot 6$ Autos?

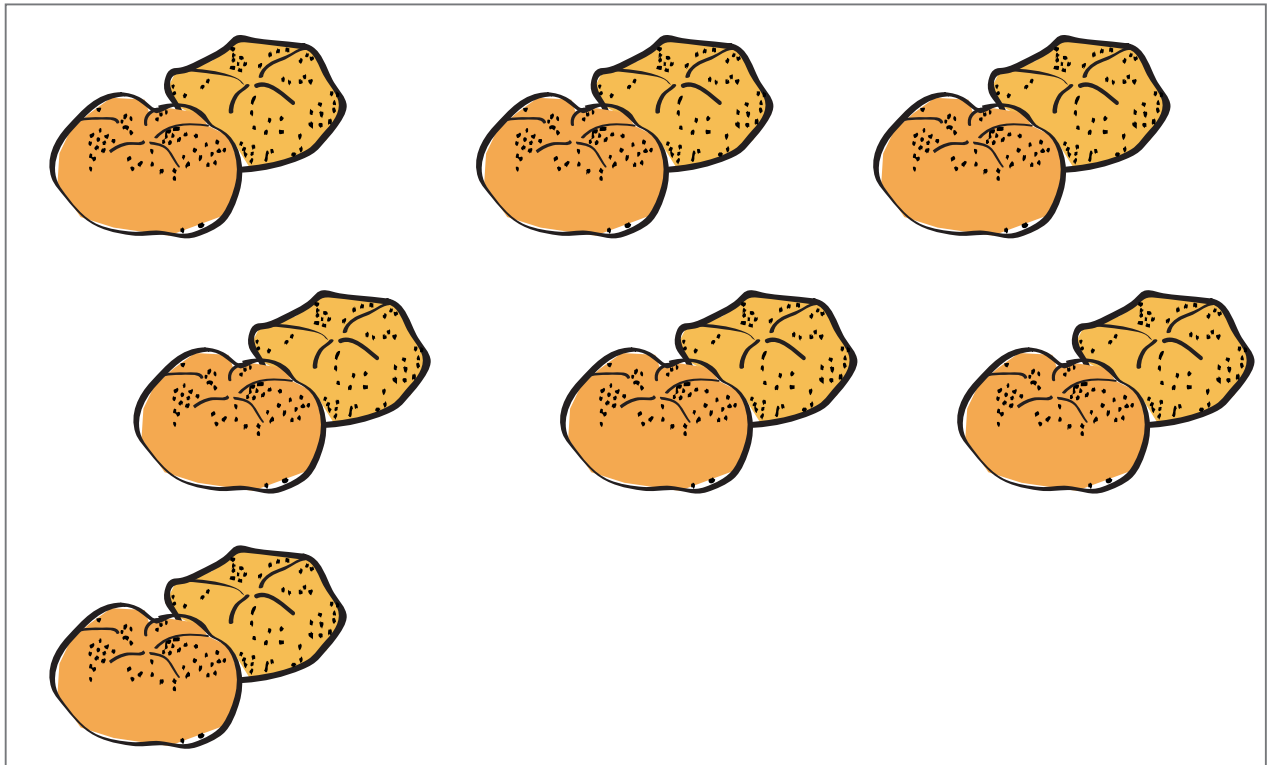
Plus-Aufgabe: $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

Mal-Aufgabe: $6 \cdot 4$

Antwort: Es passen insgesamt 24 Autos in die 6 Container.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Clara verteilt Brötchen. Jede/-r der 7 Kursteilnehmer/-innen bekommt 2 Brötchen. Fertigen Sie eine passende *Rechenskizze* an.



Welche **Frage** kann hier gestellt werden?
 Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?
 Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Wie viele Brötchen verteilt Clara?

Um welche Zahl geht es hier?

Plus-Aufgabe: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

Mal-Aufgabe: $7 \cdot 2$

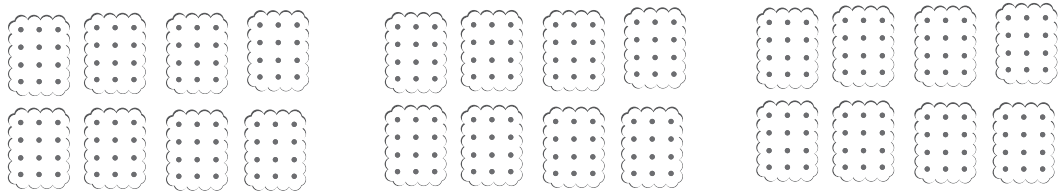
Antwort: Clara verteilt insgesamt 14 Brötchen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1c LÖSUNGEN – Friedas Kekse

Frieda möchte pro Stunde immer genau acht Kekse essen. Sie sitzt am Abend drei Stunden vor dem Fernseher.

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.



Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Wie viele Kekse insgesamt isst Frieda in den drei Stunden vor dem Fernseher?

Um welche Zahl geht es hier?

Plus-Aufgabe: $8 + 8 + 8 = 24$ Kekse

Mal-Aufgabe: $3 \cdot 8 = 24$ Kekse

Antwort: Nach drei Stunden hat Frieda insgesamt 24 Kekse gegessen.

Wie groß ist die Gesamtmenge? Wie groß sind die Teilmengen?

Die Gesamtmenge ist vierundzwanzig.

Die Teilmengen sind acht, acht und acht.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

13.1d LÖSUNGEN – Kaugummi und Badezimmerfliesen

Eric gibt jede Woche 9€ für Kaugummi aus.

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.



Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Bei der ersten Sachsituation wurde offengelassen, für wie viele Wochen der Kaugummikauf berechnet werden soll. Es werden von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern wahrscheinlich unterschiedliche Fragestellungen genannt, die unterschiedliche Antworten zur Folge haben. Bei der Auswertung können verschiedene Ideen gesammelt werden. Nachfolgend einige Beispiellösungen:

nach einer Woche: $1 \cdot 9\text{€} = 9\text{€}$

nach zwei Wochen: $2 \cdot 9\text{€} = 18\text{€}$

nach vier Wochen: $4 \cdot 9\text{€} = 36\text{€}$

nach zehn Wochen: $10 \cdot 9\text{€} = 90\text{€}$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Wie groß ist die Gesamtmenge?

Wie groß sind die Teilmengen?

Die Gesamtmenge beträgt 18, 36 bzw. 90.

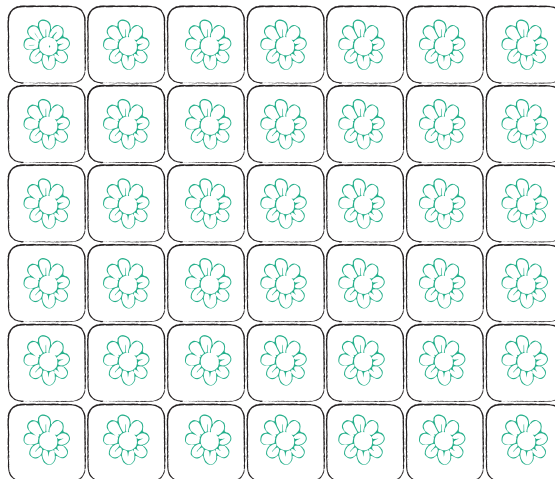
Die Teilmengen lauten neun und neun;

neun, neun, neun und neun bzw.

neun, neun, neun, neun, neun, neun, neun, neun, neun und
neun.

Herr Boden verlegt Fliesen in einem kleinen Bad. In jede Reihe passen immer 7 Fliesen. Er musste nur 6 Reihen verlegen.

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Wie viele Fliesen verlegt Herr Boden insgesamt im Bad?

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42 \text{ Fliesen}$$

$$7 \cdot 6 = 42 \text{ Fliesen}$$

Antwort: Für die Verlegung von 6 Reihen benötigt Herr Boden insgesamt 42 Fliesen.

Wie groß ist die Gesamtmenge?

Wie groß sind die Teilmengen?

Die Gesamtmenge lautet 42.

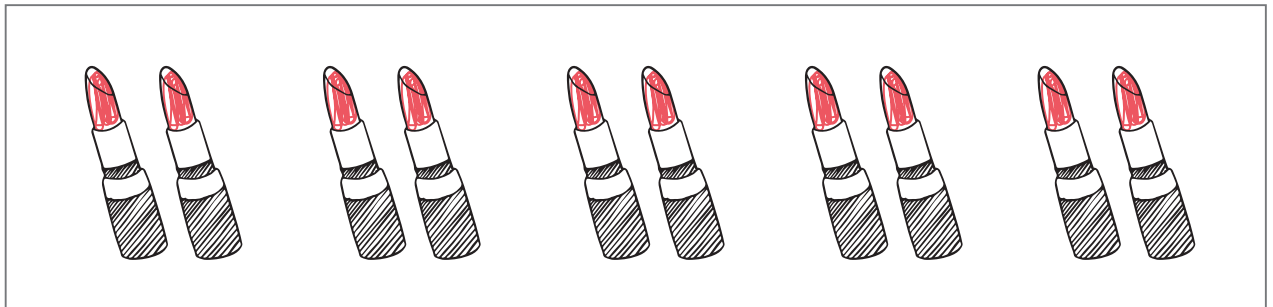
Die Teilmengen lauten sieben, sieben, sieben, sieben, sieben und sieben.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

13.1e LÖSUNGEN – Lippenstifte in Handtaschen

Senta hat fünf verschiedene Handtaschen. In jeder Tasche sind zwei Lippenstifte.

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.



Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Wie viele Lippenstifte findet Senta insgesamt in ihren fünf verschiedenen Handtaschen?

Um welche Zahl geht es?

Plus-Aufgabe: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ Lippenstifte

Mal-Aufgabe: $5 \cdot 2 = 10$ Lippenstifte

Antwort: Insgesamt findet sie 10 Lippenstifte.

Wie groß ist die Gesamtmenge?

Wie groß sind die Teilmengen?

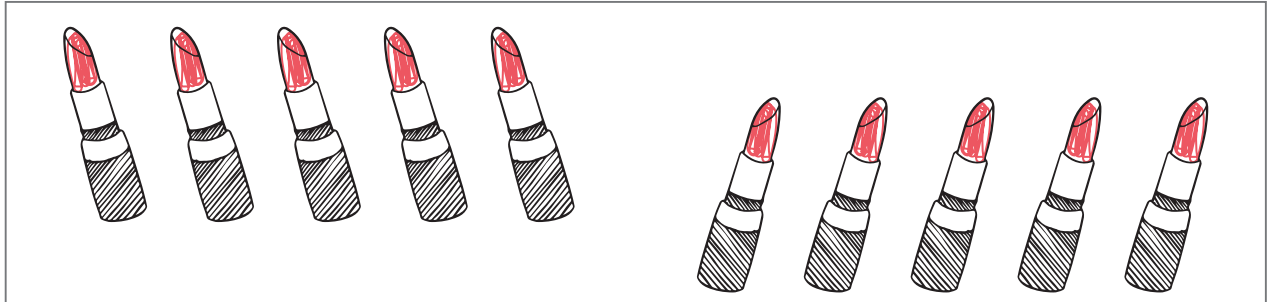
Die Gesamtmenge lautet 10.

Die Teilmengen sind zwei, zwei, zwei, zwei und zwei.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Senta hat zwei weitere Handtaschen im Auto. In jeder findet sie genau fünf Lippenstifte.

Bitte fertigen Sie eine *Rechenskizze* zur Aufgabe an.



Welche **Frage** kann hier gestellt werden?

Wie lauten die passende **Plus-Aufgabe** und **Mal-Aufgabe**?

Welche **Antwort** können Sie auf die Frage geben?

Wie viele Lippenstifte insgesamt befinden sich in diesen beiden Handtaschen?

Um welche Zahl geht es hier?

Plus-Aufgabe: $5 + 5 = 10$ Lippenstifte

Mal-Aufgabe: $2 \cdot 5 = 10$ Lippenstifte

Antwort: Senta findet insgesamt 10 Lippenstifte in den zwei weiteren Handtaschen aus ihrem Auto.

Wie groß ist die Gesamtmenge?

Wie groß sind die Teilmengen?

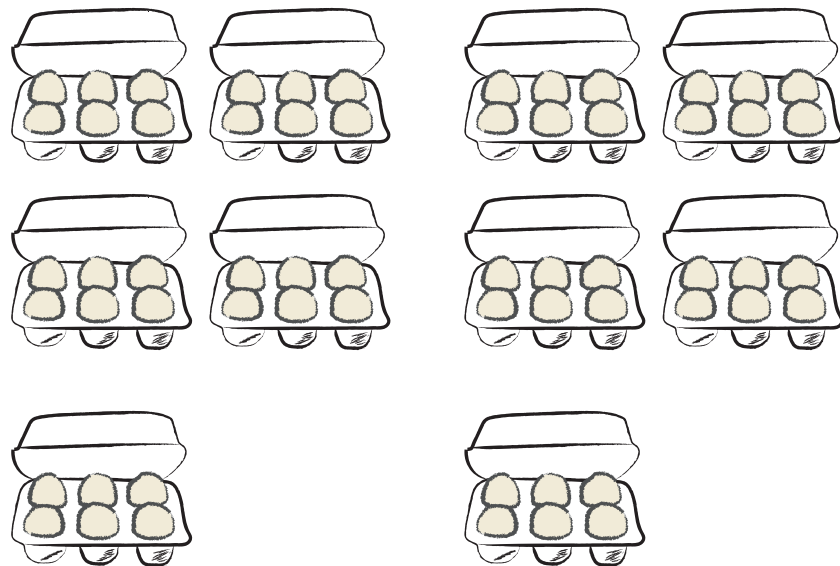
Es sind insgesamt 10 Lippenstifte.

Die Teilmengen sind fünf und fünf.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.1g LÖSUNGEN – Eierdiät

In der kleinen Eierpackung sind immer sechs Eier. Weil Leon die neueste Eierdiät machen möchte, kauft er gleich zehn Packungen. Fertigen Sie eine *Rechenskizze* an.



Welche **Frage** kann hier gestellt werden? Und wie lautet die **Antwort**?

Wie viele Eier kauft Leon insgesamt?

Um welche Zahl geht es hier?

Antwort: Leon hat insgesamt 60 Eier gekauft.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Nach dem Tausch der Faktoren lautet die neue Aufgabe:

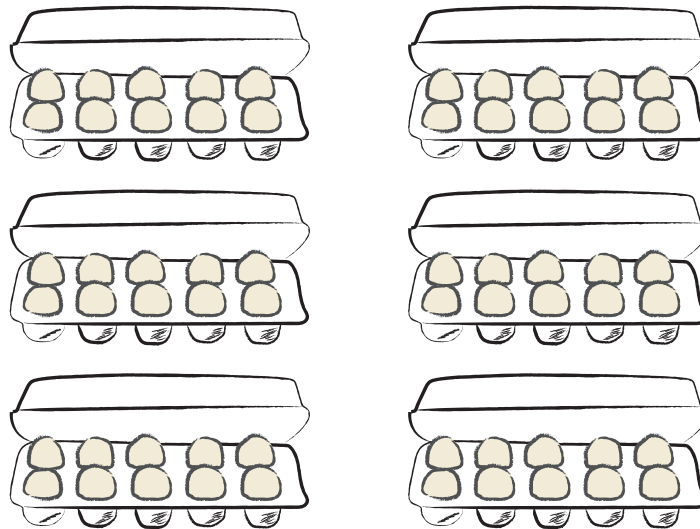
$$\underline{6} \cdot \underline{10} = \underline{60}$$

Wie ändert sich die Geschichte, wenn Sie die Faktoren tauschen?

Sie sollen nichts hinzuerfinden. Schreiben Sie nur die Geschichte um.

Fertigen Sie zu der neuen Geschichte eine *Rechenskizze* an und notieren Sie die passende **Frage** und **Antwort**.

In der großen Eierpackung sind immer zehn Eier. Weil Leon die neueste Eierdiät machen möchte, kauft er gleich sechs Packungen.



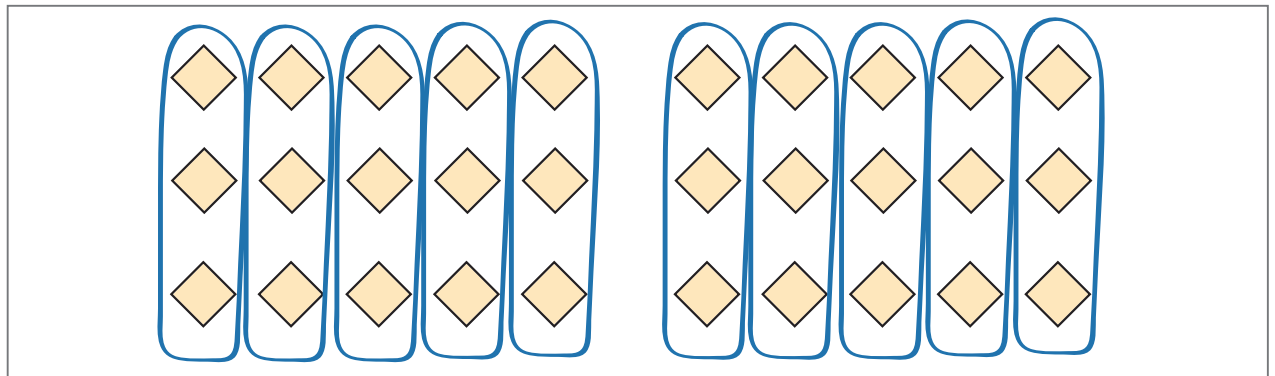
Wie viele Eier kauft Leon insgesamt?

Antwort: Leon hat insgesamt 60 Eier gekauft.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.2a LÖSUNGEN – Karos

Bitte kreisen Sie die Karos in einer Spalte (von oben nach unten) ein.



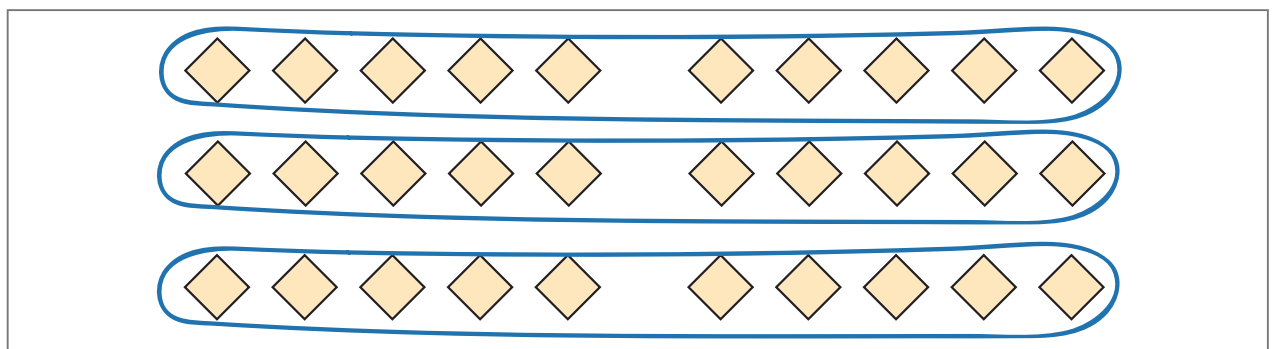
Welche Mal-Aufgabe können Sie erkennen, wenn Sie die Mengen in einer Spalte anschauen?

$10 \cdot 3$ Karos

Wie viele Karos sind es insgesamt?

30

Bitte kreisen Sie die Mengen von links nach rechts (in einer Zeile) ein.



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

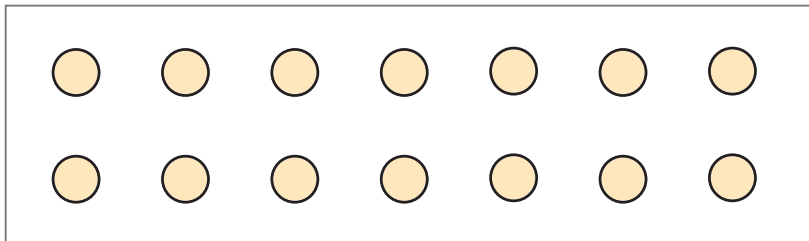
Welche Mal-Aufgabe können Sie erkennen, wenn Sie die Menge von links nach rechts (in einer Zeile) anschauen?

$3 \cdot 10$ Karos

Wie viele Karos sind es insgesamt?

30

Zeichnen Sie in den Kasten die Mal-Aufgabe $2 \cdot 7$ mit Kreisen oder Kästchen ein.



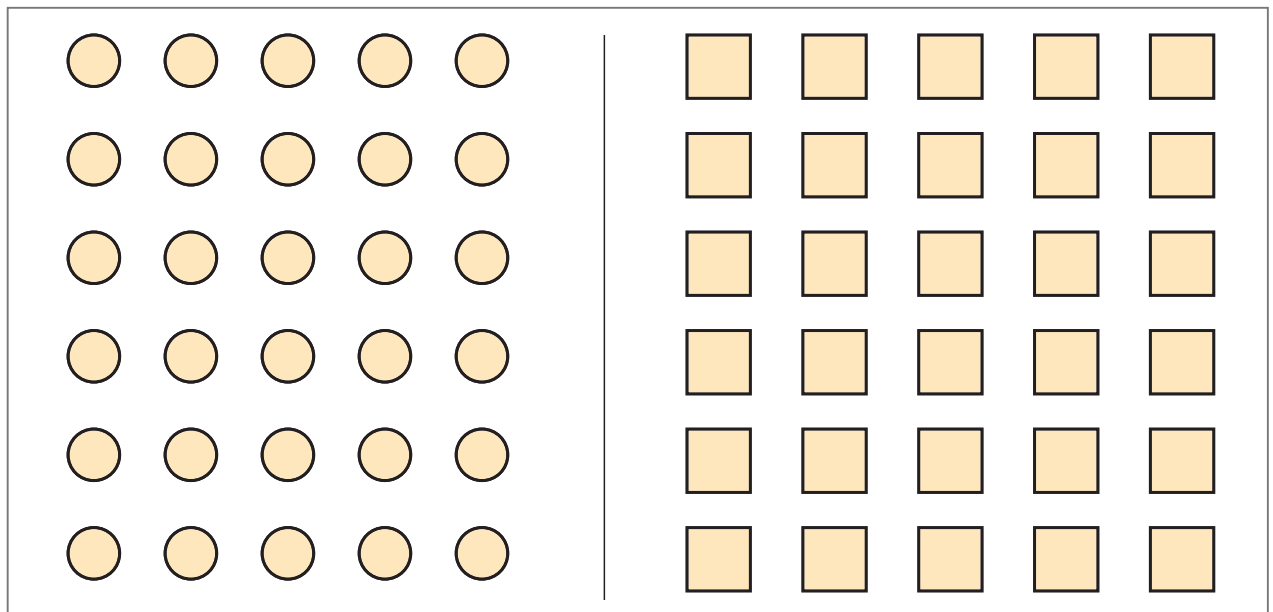
Welche Plus-Aufgabe hilft dabei, die Aufgabe $2 \cdot 7$ auszurechnen, ohne die einzelnen Punkte zählen zu müssen?

$7 + 7$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.2b LÖSUNGEN – Punkte und Quadrate

Bitte schauen Sie sich folgende Abbildung genau an.



Welche Mal-Aufgabe ist in beiden Kästen zusammen dargestellt?

$6 \cdot 10$

Welche Mal-Aufgabe wurde im linken Kasten (○) dargestellt?

$5 \cdot 10$

Welche Mal-Aufgabe sehen Sie im rechten Kasten (□)?

$5 \cdot 10$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Was fällt auf, wenn Sie den linken (●) und den rechten (■) Kasten miteinander vergleichen?

Sie enthalten gleich viele Symbole.

Wie kann Ihnen die Aufgabe $10 \cdot 6$ helfen, die Aufgabe $5 \cdot 6$ zu lösen?

Ich kann das Ergebnis von $10 \cdot 6$ halbieren/durch zwei teilen.

Bitte werten Sie die Ergebnisse gemeinsam mit der Kursleitung aus!

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

13.2c LÖSUNGEN – Sterne

Bitte schauen Sie sich folgende Abbildung genau an.



Welche Mal-Aufgabe wird im Kasten abgebildet?

$9 \cdot 5$

Wenn Sie die Sterne verdoppeln würden, welche Mal-Aufgabe wäre dann oben abgebildet?

$9 \cdot 10$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Ihnen ist bereits bekannt, dass $10 \cdot 9$ Sterne insgesamt 90 Sterne sind.
Wie können Sie mithilfe von $10 \cdot 9$ Sternen ausrechnen, wie viel $5 \cdot 9$ Sterne sind?

Ich kann das Ergebnis von $10 \cdot 9$ halbieren/durch zwei teilen.

Was haben die Aufgaben $10 \cdot 9$ und $5 \cdot 9$ miteinander zu tun?

$10 \cdot 9$ ist das Doppelte von $5 \cdot 9$

Bitte werten Sie im Anschluss an die Arbeitszeit die Ergebnisse mit der Kursleitung aus!

ABBILDUNG 13.2-1

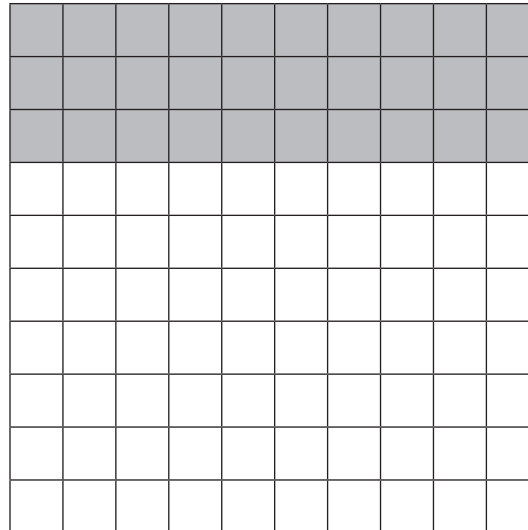
Waagerechte Kennzeichnung von $3 \cdot 10$ in einem Hunderterfeld

ABBILDUNG 13.2-2

Senkrechte Kennzeichnung von $3 \cdot 10$ in einem Hunderterfeld

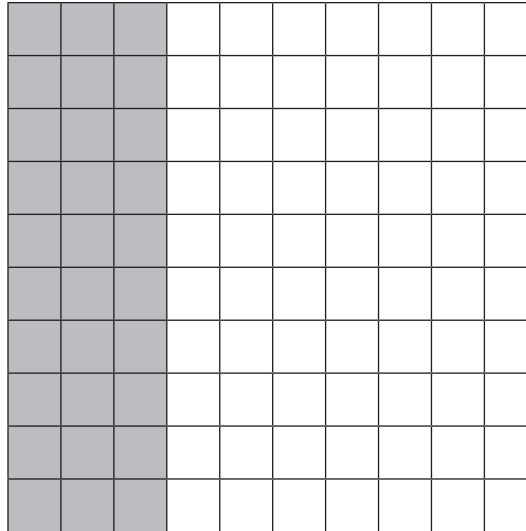
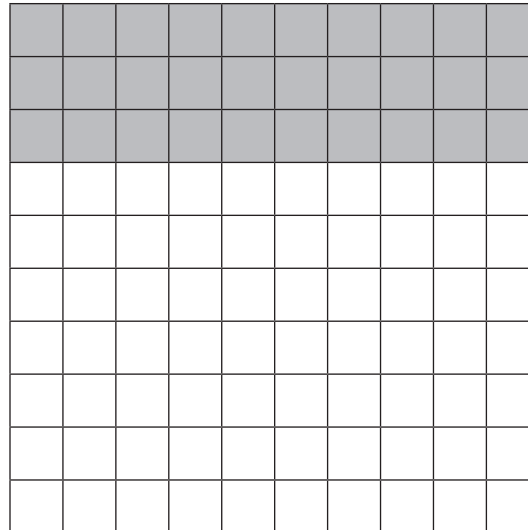
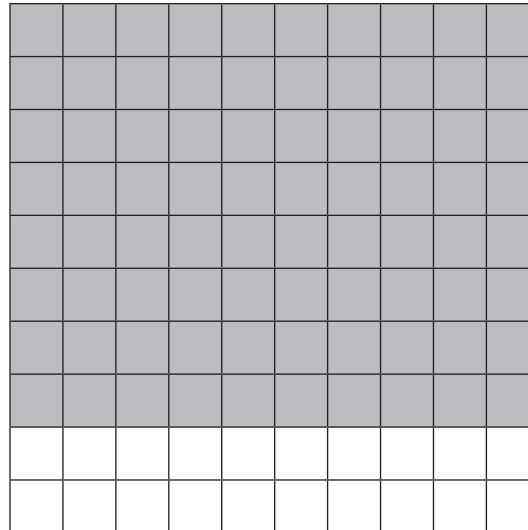


ABBILDUNG 13.2-3

Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe $10 \cdot 3$ in einem Hunderterfeld

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 10 \cdot 3 = 30$$

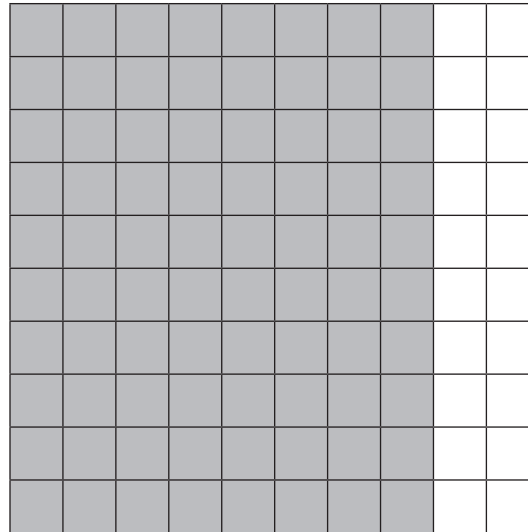
ABBILDUNG 13.2-4

Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe $10 \cdot 8$ in einem Hunderterfeld

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 10 \cdot 8 = 80$$

ABBILDUNG 13.2-5

Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe $8 \cdot 10$ in einem Hunderterfeld



$$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 8 \cdot 10 = 80$$

Inhaltsverzeichnis

17 TEILE, BRÜCHE UND PROZENTSÄTZE (Dagmar Grütte und Cornelia Weilke unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I	Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?	2
II	Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?	3
III	An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?	3
IV	Wo finden sich didaktische Erläuterungen?	4
V	Welche Materialien werden benötigt?	4
17.1	Teile (Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)	5
17.1.1	Vortrag – Teile von Zahlen	5
17.1.2	Kursgespräch und Aufgabenblätter – Teile von 30 und von 100	10
17.1.3	Vortrag – Ausblick	14
17.2	Brüche (in Bearbeitung)	
17.3	Dezimalzahlen (in Bearbeitung)	
17.4	Prozentsätze (Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)	15
17.4.1	Vortrag und Aufgabenblatt – Vom Hundertstel zu Prozentsätzen	15
17.4.2	Spiel – Prozentsätze-Mau-Mau	20
17.4.3	Vortrag und Aufgabenblatt – Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz	21
17.5	Prozente im Alltag (Cornelia Weilke unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)	32
17.5.1	Kursgespräch – Von der Theorie zur Praxis	33
17.5.2	Mathekonferenz und Kursgespräch – Prozentwert bestimmen	34
17.5.3	Vortrag – Verallgemeinerung und Transfer	45
17.5.4	Mathekonferenz und Kursgespräch – Prozentsatz bestimmen	48
17.5.5	Vortrag – Die Summe aller Teile ist das Ganze	53
17.5.6	Mathekonferenz und Kursgespräch – Grundwert für bequeme Prozentsätze	55
17.5.7	Vortrag und Kursgespräch – Formel zur Bestimmung des Grundwertes	60
17.5.8	Mathekonferenz – Grundwert für nicht bequeme Prozentsätze bestimmen	62
17.5.9	Vortrag – Vermehrte und verminderte Grundwerte	64
17.5.10	Mathekonferenz – Den vermehrten Grundwert bestimmen	65
17.5.11	Mathekonferenz – Den verminderten Grundwert bestimmen	68
17.5.12	Mathekonferenz – Prozentsatz bei vermehrtem Grundwert bestimmen	71

17 TEILE, BRÜCHE UND PROZENTSÄTZE

(Dagmar Grütte und Cornelia Weilke unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Für dieses Kapitel passt der Untertitel *Auf zur Prozentrechnung*. Es gibt einige Meilensteine, die die Teilnehmer/-innen meistern sollten, um mit Prozenten rechnerisch sicher und verständlich umgehen zu können. Dazu gehört vor allem, sich zu erschließen, worum es bei Prozentrechnungen geht. Als Meilensteine auf dem Weg zu einem solchen Verständnis können die Themen Teile, Brüche, Dezimalbrüche, Prozentsätze und deren Zusammenhänge angesehen werden.

Diese Themen bilden Schwerpunkte der ersten Unterkapitel. Allen drei Themen gemeinsam ist, dass Teile von einem Ganzen ermittelt werden oder umgekehrt von den Teilen auf das Ganze geschlossen wird. Der spezifische Charakter der Bruchzahlen sowie das Bruchrechnen werden in diesem Kapitel nicht eingeführt. Hier werden Bruchzahlen nur insoweit in den Blick genommen, wie es zur Erarbeitung eines Verständnisses der Prozentrechnung angemessen erscheint.

Teile einer Menge, einer Zahl oder einer Größe (Maßeinheit) können durch Summen oder durch Quotienten, Bruchzahlen oder Prozentsätze ausgedrückt bzw. dargestellt werden. Diese Größen sind ineinander umwandelbar. Den Teilnehmern und Teilnehmerinnen soll klar werden, dass diese nur jeweils anders ausgedrückt werden.

Beispiel für „die Hälfte von 30“:

- als Division durch 2: $30 : 2 = 15$
- als gleich große Zerlegung: $30 = 15 + 15$ oder $30 - 15 = 15$
- als Bruch: $\frac{1}{2} \cdot 30 = \frac{30}{2} = \frac{15}{1} = 15$ oder $0,5 \cdot 30 = 15$
- oder in Prozent: 50 % von 30 sind 15

In der Prozentrechnung werden rechnerische Bezüge von Teilen zu einem Ganzen oder umgekehrt von einem Ganzen zu seinen Teilen hergestellt. Dabei wird in Prozent ausgedrückt, in welchem Verhältnis ein Teil zum Ganzen, das 100 Prozent entspricht, steht. Das ist der sogenannte Prozentsatz. Das Ganze und die Teile werden auf 100 bezogen. Daher stammt auch die italienische bzw. lateinische Bedeutung des Wortes Prozent: von Hundert oder Hundertstel.

Prozentangaben begegnen den Teilnehmern und Teilnehmerinnen häufig in ihrem Alltag. Prozente werden in Diagrammen oder Zeitungsartikeln verwendet. Wenn beispielsweise die Bevölkerung einer Stadt wächst oder auch abnimmt, wenn Kosten steigen oder sinken, wird das in Prozenten angegeben. Bankgeschäfte werden über Zinsen abgewickelt, deren Geldwerte über Prozente ermittelt werden.

Wenn es den Teilnehmern und Teilnehmerinnen gelingt, Bezüge zwischen Teilen, Brüchen und Prozentsätzen herzustellen, erweitert sich ihr Zahlverständnis immens. Der Zahlbereich der natürlichen Zahlen wird um den Zahlbereich der gebrochenen Zahlen erweitert. Es erschließen sich Kommazahlen und einfache Rechenwege.

Beispiel für „25 % von 2.000 Euro“:

- 2.000 Euro mit 0,25 bzw. 25/100 multiplizieren
- 2.000 Euro durch vier teilen

Beispiel für „Zehn Prozent von 3.456“:

- durch zehn teilen

Um Prozente zu berechnen, haben sich zwei Grundverfahren etabliert:

1. Die Anwendung von Zuordnungen und des damit verbundenen sogenannten Dreisatzes.
2. Über den Zusammenhang $\text{Grundwert} \cdot \text{Prozentsatz} = \text{Prozentwert}$.
(Der Wert des Prozentsatzes wird als Hundertstel angegeben oder mit dem Prozentzeichen versehen.)

Beide Verfahren werden erläutert sowie deren Vor- und Nachteile abgewogen. Mithilfe vielfältiger Beispielaufgaben aus dem Alltag lernen die Teilnehmer/-innen, Routine zu entwickeln, um Prozentrechnungen durchzuführen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

- Sich die Zusammenhänge zwischen den oben genannten Meilensteinen – Teile, Brüche und Prozentsätze – zu erschließen, stellt eine große Herausforderung an das Abstraktionsvermögen der Teilnehmer/-innen dar.
- Prozentrechnungen können über Formeln durchgeführt werden. Die Fehlerquote steigt dabei aber, sobald die Aufgabenstellung von den gewohnten Routinen abweicht. Um Formeln richtig anwenden zu können, muss identifiziert werden, welche Zahlen zu welchen Symbolen/Formelbestandteilen gehören, und es muss der Sachverhalt mit seinen rechnerischen Zusammenhängen analysiert werden. Aus einer Sachsituation zu ermitteln, was das Ganze und was die Teile sind, scheint im Vergleich zum Arbeiten mit Formeln der erfolgversprechendere Weg zu sein.
- Die Rechenoperationen Multiplikation und Division sind wesentliche Grundlagen für das Verständnis rechnerischer Zusammenhänge der Prozentrechnung.
- Eine weitere Herausforderung besteht darin, zu erkennen, für welche Werte welche Zahlen in Dezimalzahlen (Zahlen in der Kommaschreibweise) stehen. Es ist zum Beispiel irritierend, dass die erste Zahl nach dem Komma für Zehntel steht, die Zweite für Hundertstel, dass dabei aber die Zehntel einen größeren Wert als die Hundertstel haben. Eigentlich ist zehn doch viel weniger als hundert. Warum verhält sich das bei Bruchzahlen genau entgegengesetzt? Zehntel sind größer als Hundertstel.
- Ein weit verbreitetes Missverständnis ist es auch, das Komma als eine Art Trennzeichen zwischen zwei natürlichen Zahlen anzusehen. Man glaubt dann, dass 0,7 kleiner sei als 0,18, weil ja $7 < 18$ ist.
- Oftmals trifft man auch auf die Vorstellung, dass das Komma ein Symmetriezeichen ist. Hier besteht der Glaube, dass rechts vom Komma „Eintel“ stehen, rechts davon Zehntel und rechts davon Hundertstel. Mit $35\% = 35 \text{ Hundertstel}$ entsteht der Fehlschluss, dass $35\% = 0,035$ ist. Wenn mit dieser Fehlannahme weitergerechnet wird, entstehen Resultate, die um den Faktor Zehn falsch sind.

Um Aufgaben der Prozentrechnung zu lösen bzw. die ermittelten Werte zu interpretieren, sehen Teilnehmer/-innen häufig eine hohe Barriere vor sich. Neben dem rechnerischen Erarbeiten der Zusammenhänge gilt es, diesen Lern- und Verstehensprozess psychologisch einfühlsam und motivierend zu begleiten. Im Selbstkonzept einiger Teilnehmer/-innen ist manifestiert, dass sie die Prozentrechnung niemals verstehen werden.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

- Meyerhöfer, Wolfram; Guther, Alina; Grütte, Dagmar; Weilke, Cornelia (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen: Praxismaterial. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
 - > Kapitel 2 – Kardinaler Zahlbegriff
 - > Kapitel 5 – Zahlzerlegungen
 - > Kapitel 9 – Zahlbereich der natürlichen Zahlen und Stellenwertsysteme
 - > Kapitel 13 – Rechenoperation Multiplikation und Division

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DWV-Rahmen-curriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
 - > Stufe 2 – Division, S. 110 ff.
 - > Stufe 3 – Ziele und Prinzipien, S. 125 ff.
 - > Stufe 3 – Mathematik fürs Leben, S. 135 ff.

www.grundbildung.de/unterricht

V Welche Materialien werden benötigt?

Laptop mit PowerPoint und Beamer

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Schlagwörter: Addition • Das Ganze • Die Teile • Division • Kursgespräch • Mengen • Multiplikation • Subtraktion • Vortrag • Zahlzerlegung • Zahlen bis 100

17.1 Teile (Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

Exploration

Eine Menge kann geteilt werden und entsprechend kann auch eine Zahl geteilt werden. Das, was mit *Teilen* gemeint ist, muss jedoch präzisiert werden. Die Teile, in die ein Ganzes geteilt wird, können unterschiedlich groß sein.

Beispiel für Zahlzerlegungen:

Die 27 kann in 7 und 20 zerlegt werden. Die 7 und die 20 sind Teile des Ganzen, der 27.

Die Teile können jedoch auch gleich groß sein. Zum Beispiel, wenn die 27 in drei gleich große Teile geteilt (zerlegt) wird. Die 27 kann in drei Neuner geteilt werden.

Wenn Zahlen in gleich große Zahlen geteilt werden, dann wird vom Dividieren oder der Division gesprochen.

Beispiel:

Die 30 kann in fünf gleich große Teile zerlegt werden, in fünf Sechser. 30 dividiert durch fünf ist sechs: $30 : 5 = 6$. Dabei wurde die 30 gefünftelt – in fünf Teile geteilt. Und eines dieser Fünftel ist sechs. Zwei dieser Fünftel sind zwölf ... Anders ausgedrückt, der fünfte Teil von 30 ist sechs.

Zahlen können auch in gleich große Zahlen mit einem Rest dividiert werden: So ist 31 geteilt durch fünf ebenfalls 6, jedoch bleibt der Rest 1.

17.1.1 Vortrag – Teile von Zahlen

Exploration

Die Kursleitung stellt Bezüge zum Begriff *Teile* her: Natürliche Zahlen können zerlegt werden – ein Gesamtes oder ein Ganzes wird in Teile zerlegt. Zum einen können die Teile addiert werden und ergeben das Ganze. Umgekehrt kann von dem Ganzen ein Teil subtrahiert werden, dann bleibt das andere Teil übrig.

Hier wird Vorwissen zur *Rechenoperation Division* mit deren Zusammenhängen zu den anderen Rechenoperationen vorausgesetzt. *Dividieren* heißt, das Ganze in *gleich große Teile* zu zerlegen. Werden diese gleich großen Teile wiederum zum Ganzen zusammengefasst, wird multipliziert oder addiert.

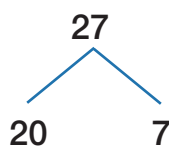
Diese Wiederholungen sollen zu der Fragestellung führen, ob alle natürlichen Zahlen in gleich große Teile geteilt werden können. Das ist nicht für alle natürlichen Zahlen möglich. Bei einigen dieser Teilungsoperationen bleibt ein Rest. Das leitet zum Zahlbereich der gebrochenen Zahlen über. Hier können alle Zahlen in gleich große Teile zerlegt werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung beginnt den Unterricht mit einem einführenden Vortrag:

Heute möchte ich mit Ihnen über Zahlen und ihre Teile diskutieren. Zahlen können in Teile zerlegt werden. Oder anders formuliert, in Zahlen sind andere Zahlen (Teile) enthalten. Am Beispiel der 27 möchte ich Ihnen zunächst zwei Versionen darstellen, nämlich eine beliebige Zahlzerlegung und eine Zahlzerlegung in gleich große Teile. Zunächst betrachten wir eine beliebige Zahlzerlegung:



Es gilt: $20 + 7 = 27$ oder $7 + 20 = 27$
 $27 - 7 = 20$ oder $27 - 20 = 7$
 $27 - 20 - 7 = 0$

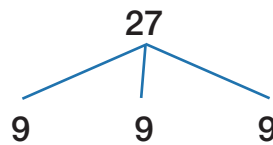
In der 27 sind beispielsweise 20 und 7 enthalten. Beide Teile können wieder zu dem Ganzen/ Gesamten zusammengefügt werden. Das wird durch die Rechenoperation der Addition dargestellt: $20 + 7 = 27$ oder $7 + 20 = 27$. Beide Summanden sind vertauschbar. Es gilt weiterhin, wenn von dem Ganzen ein Teil weggenommen wird, bleibt der andere Teil übrig: $27 - 7 = 20$ oder $27 - 20 = 7$. Werden von der 27 beide Teile subtrahiert, führt das zur Null. Diese rechnerischen Zusammenhänge gelten universell. Das heißt, alle natürlichen Zahlen können zerlegt werden.



Es gilt: $A + B = G$ oder $B + A = G$
 $G - A = B$ oder $G - B = A$
 $G - A - B = 0$

Wenn wir das Ganze mit G bezeichnen, kann das zum Beispiel in die Teile A und B zerlegt werden – wie in dem oberen Beispiel die 27 als Ganzes in die Teile 20 und 7. Dabei gilt der allgemeine Zusammenhang, dass die Teile A und B wieder zu dem Ganzen zusammengefügt werden können, und wir können dafür notieren: $A + B = G$ oder $B + A = G$. Von dem Ganzen kann auch jeweils ein Teil entfernt werden und der andere Teil bleibt übrig. Dafür kann allgemein $G - A = B$ bzw. $G - B = A$ notiert werden. Werden vom Ganzen beide Teile abgezogen ergibt das null. Betrachten wir nun die Zerlegung von Zahlen in **gleich große** Teile. Wird eine Zahl in **gleich große** Teile zerlegt/geteilt, dann wird davon gesprochen, dass die Zahl dividiert wird. Zum Beispiel kann die 27 in drei gleich große Teile geteilt werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	



Es gilt: $27 : 3 = 9$ und $3 \cdot 9 = 27$

oder $9 + 9 + 9 = 27$

oder $27 - 9 - 9 - 9 = 0$

9 ist ein Drittel von 27 – der dritte Teil

Es gilt: $27 : 3 = 9$. Wenn etwas in drei Teile geteilt wird, wird „gedreiteilt“. Das hat sich sprachlich zu **gedrittelt** eingeschliffen. Das Wort Drittel bedeutet, dass der dritte Teil gemeint ist. Ein Drittel von 27 ist also neun.

In der 27 ist die 9 dreimal enthalten: $3 \cdot 9 = 27$. Die einzelnen Teile 9 können auch zur 27 zusammengefügt werden: $9 + 9 + 9 = 27$. Entsprechend können Teile vom Gesamten/Ganzen abgezogen werden: $27 - 9 - 9 - 9 = 0$.

Ich möchte Ihnen anhand der Mengendarstellungen die beiden oben erläuterten Versionen der Teile der 27 zeigen. Zunächst die Aufteilung in 20 und 7:

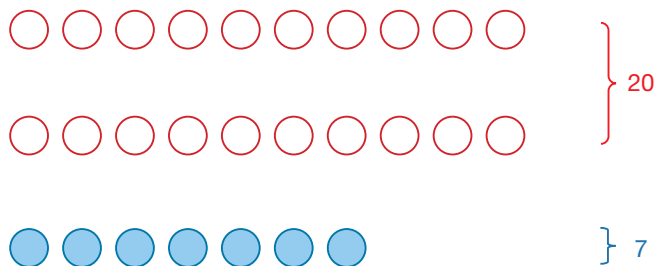


Abbildung 17.1-1: Mengendarstellung der Zahlzerlegung der 27 in 20 und 7

Von insgesamt 27 Kreisen sind in der Abbildung 20 ungefüllte und 7 gefüllte Kreise zu sehen. In dem Ganzen von 27 Kreisen sind also die Teile 20 ungefüllte Kreise und 7 gefüllte Kreise enthalten.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



Abbildung 17.1-2: Mengendarstellung 27 in drei gleich große Teile geteilt – unterschiedliche Anordnungen

Nun die Aufteilung in drei gleich große Teile:

Die 27 Kreise sind in der linken und rechten Darstellung unterschiedlich angeordnet. Links sind sie wie in der vorangegangenen Abbildung in Zehnerreihen angeordnet. Diese Abbildung ist angelehnt an die Zehnerstruktur (dekadische Struktur) unseres Zahlensystems. Allerdings können Sie hier nicht gut erkennen, dass es sich hierbei um drei gleich große Teile handelt. In der rechten Abbildung wurden lediglich die Kreise so verschoben, dass deutlich wird, dass die 27 in drei gleich große Teile geteilt wurde: ein gefülltes, ein ungefülltes, ein gestricheltes Drittel mit jeweils neun Kreisen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.1.2 Kursgespräch und Aufgabenblätter – Teile von 30 und von 100

Exploration

Die Teilnehmer/-innen überprüfen ihren Wissensstand bezogen auf die Inhalte des vorangegangenen Vortrages. Wenn beispielsweise die 100 in zwei *gleich große* Teile zerlegt wird, ist das gleichbedeutend mit der Division durch zwei. Die beiden gleich großen Teile sind jeweils 50. Die Hundert wird halbiert (eigentlich gezweitelt). Eine Hälfte der 100 ist 50. Es geht darum, mit diesen Zahlzerlegungen in gleich große Teile, einschließlich der zugehörigen Formulierungen, den Bezug zu Brüchen vorzubereiten und außerdem die wichtige Zahl 100 – das Fundament der Prozentrechnung – sicher zerlegen zu können.

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLÄTTER 17.1a und 17.1b

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer/-innen, zunächst gemeinsam im Unterricht die **Aufgabenblätter 17.1a Teile von 30 und 17.1b Teile von 100** zu bearbeiten. Ob beide Aufgabenblätter bearbeitet werden können, hängt von der zur Verfügung stehenden Zeit ab. Lösungen des Aufgabenblattes 17.1b können direkt auf die Prozentrechnung übertragen werden. Deswegen ist diesem die Priorität zu geben.

Je nach vorhandener Zeit und in Abhängigkeit vom Lerntempo der Teilnehmer/-innen werden die angegebenen Möglichkeiten, Teile der 30 und der 100 zu ermitteln, im Kurs besprochen oder von den Teilnehmern und Teilnehmerinnen selbstständig als Hausaufgabe bearbeitet.

Erfahrungsgemäß ist der Lernstand der Teilnehmer/-innen sehr unterschiedlich. Die Aufgaben sind als Wiederholung gedacht und können im Schwierigkeitsgrad variiert werden.

Zahlzerlegungen der 30 oder 100 in nicht gleich große Teile sollten die Teilnehmer/-innen beherrschen. Hierbei könnte der Fokus auf Zerlegungen wie 17 und 13 bei 30 oder 71 und 29 bei 100 gerichtet werden, um sich dabei erneut die rechnerischen Zusammenhänge und Zahlbeziehungen zu verdeutlichen. Mit wenig herausfordernden Zerlegungen wie die der 30 in 10 und 20 bzw. die der 100 in 40 und 60 sollten die Teilnehmer/-innen sich nicht zufrieden geben.

Sich damit zu beschäftigen, welche Möglichkeiten es gibt, die 30 oder 100 in gleich große Teile zu zerlegen, erfordert ein gutes Verständnis der Rechenoperation der Division.

Zahlbeziehungswissen ist eine weitere Voraussetzung, um Prozentrechnungen zu verstehen.

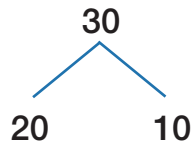
Der Schwerpunkt der gemeinsamen Bearbeitung im Unterricht sollte besonders auf die Ermittlung der Teile von 100 gelegt werden, um später direkte Bezüge zur Prozentrechnung herstellen zu können.

Wenn die Aufgabenblätter gemeinsam im Unterricht bearbeitet werden, könnte die Kursleitung folgende einleitende Gedanken formulieren:

*Gemeinsam möchte ich mit Ihnen das eben Gesagte auf die Zahlen 30 und 100 übertragen. Es geht darum, Teile der 30 (siehe **Aufgabenblatt 17.1a**) oder der 100 (siehe **Aufgabenblatt 17.1b**) zu ermitteln – zunächst Teile, die nicht gleich groß sind, und danach Teile, die gleich groß sind. Dabei überlegen wir uns, welche Formulierungen wir für den jeweiligen Prozess des Teilens finden können. Bitte notieren Sie die Lösungen, einschließlich der Rechnungen und Formulierungen, auf den zugehörigen Aufgabenblättern.*

*Es gibt viele Möglichkeiten, die 30 (oder 100) in **nicht** gleich große Teile zu zerlegen. Auf den Aufgabenblättern 17.1a bzw. b wurde die 30 in 20 und 10 bzw. die 100 in 60 und 40 zerlegt. Die passenden Additions- und Subtraktionsaufgaben sind angegeben. Dabei gilt allgemein, dass beide Teile zum Gesamten zusammengefügt werden können (Addition) bzw. vom Gesamten ein Teil entnommen werden kann und der andere Teil übrig bleibt (Subtraktion).*

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

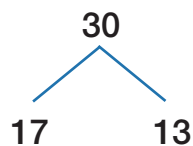


Rechenoperationen: $20 + 10 = 30$ oder $10 + 20 = 30$
 $30 - 10 = 20$ oder $30 - 20 = 10$

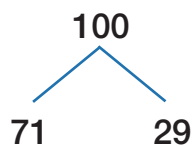


Rechenoperationen: $60 + 40 = 100$ oder $40 + 60 = 100$
 $100 - 40 = 60$ oder $100 - 60 = 40$

Die 30 kann aber auch beispielsweise in die 17 und 13 bzw. die 100 in die 71 und 29 zerlegt werden. Es gelten folgende rechnerische Zusammenhänge:



Rechenoperationen: $17 + 13 = 30$ oder $13 + 17 = 30$
 $30 - 13 = 17$ oder $30 - 17 = 13$



Rechenoperationen: $71 + 29 = 100$ oder $29 + 71 = 100$
 $100 - 29 = 71$ oder $100 - 71 = 29$

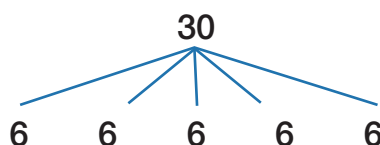
Auf den Aufgabenblättern ist Platz, um jeweils zwei weitere Beispiele einzufügen, wie die 30 bzw. die 100 in nicht **gleich** große Teile zerlegt werden können. Fragen der Kursleitung könnten sein:

*In welche weiteren nicht gleich großen Teile kann die 30 (oder 100) zerlegt werden?
 Wie lautet der rechnerische Zusammenhang zwischen dem Ganzen und den Teilen?
 Formulieren Sie Additions- und Subtraktionsaufgaben.*

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Im zweiten Teil der **Aufgabenblätter 17.1a** und **17.1b** geht es darum, die 30 bzw. die 100 in **gleich** große Teile zu zerlegen.

Um die 30 bzw. die 100 in **gleich** große Teile zu teilen, sind auf den Aufgabenblättern folgende Beispiele angegeben:



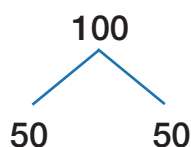
Rechenoperationen:

$$30 : 5 = 6 \text{ oder } 5 \cdot 6 = 30$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$$

Formulierungen:

fünf Teile, jedes Teil ist sechs,
gefunftelt, der fünfte Teil ist sechs



Rechenoperationen:

$$100 : 2 = 50 \text{ oder } 2 \cdot 50 = 100$$

$$50 + 50 = 100$$

Formulierungen:

zwei Teile, jedes Teil ist 50
halbiert, gezeiteilt, der halbe Teil/die Hälfte ist 50
der zweite Teil ist 50

Gemeinsam werden weitere Möglichkeiten gesucht und besprochen, in welche gleich großen Teile die 30 oder 100 außerdem zerlegt werden können.

Wenn Sie die 30 (oder 100) in gleich große Teile teilen, welche Divisionsaufgaben passen dazu?

Welche Teile haben Sie ermittelt?

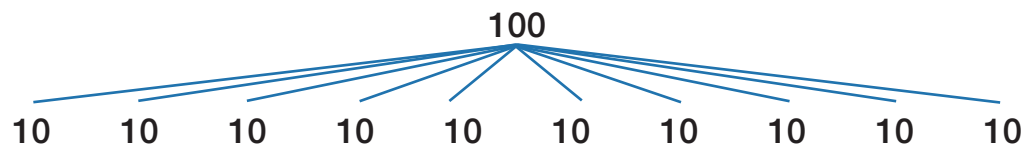
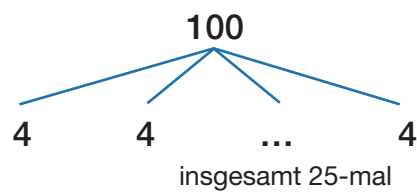
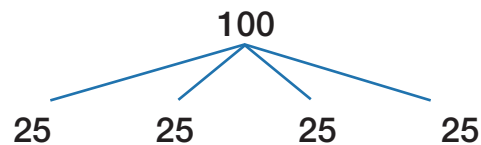
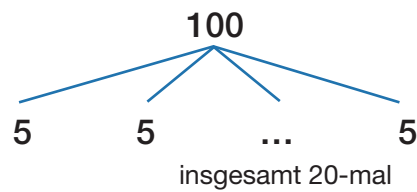
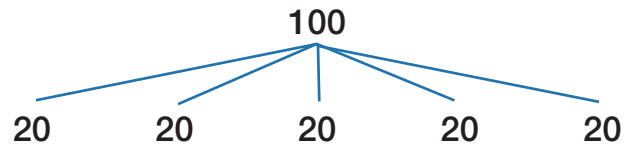
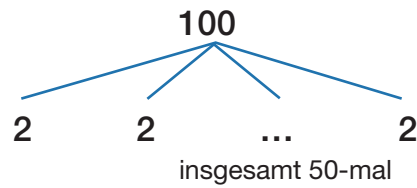
Wie viele Teile sind das? Wie lautet die entsprechende Multiplikations- bzw. Additionsaufgabe?

Sie haben also die 30 (oder 100) gezehntelt. Kann die 30 geviertelt werden? Kann die 100 gedrittelt werden?

Wie groß ist der zehnte Teil?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

AUFGABENBLÄTTER 17.1a und 17.1b



Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Zahlen können in Teile zerlegt werden.
- Werden sie in gleich große Teile zerlegt, entspricht das der Rechenoperation der Division.
- Wird zum Beispiel eine Zahl in fünf gleich große Teile zerlegt, entspricht das der Rechenoperation, diese Zahl durch fünf zu dividieren oder sie zu fünfteln.
- Umgekehrt können die Teile durch Addition oder Multiplikation zu dieser Zahl zusammengefügt werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.1.3 Vortrag – Ausblick

Durchführung und didaktische Hinweise

Interessant ist jetzt die Frage, ob eigentlich alle natürlichen Zahlen in gleich große Teile geteilt werden können. Bisher war Ihnen bekannt, dass nicht alle Zahlen geteilt/dividiert werden können. Wie wir besprochen haben, heißt dividieren, die Zahlen in gleich große Teile zu teilen.

Kann die 30 in vier gleich große Teile geteilt werden? Im Bereich der natürlichen Zahlen ist die 30 nicht durch vier teilbar. Die 30 kann nicht in vier gleich große Teile zerlegt werden.

Die 28 ist in vier gleich große Teile zerlegbar. In der 28 sind vier Siebener enthalten.

Die 30 wird dementsprechend in vier Siebener zerlegt und zwei bleiben als Rest, die nicht geteilt werden.

Wir schreiben dafür $30 : 4 = 7 \text{ Rest } 2$.

Geben Sie in den Taschenrechner $30 : 4$ ein, dann zeigt der Taschenrechner das Ergebnis 7,5 an. 7,5 ist keine natürliche Zahl, sondern eine gebrochene Zahl.

Wir nähern uns dem **Zahlbereich der gebrochenen Zahlen**, die auch Bruchzahlen genannt werden.

Nehmen wir die Wortbedeutung von **gebrochenen Zahlen** auf, sind, allgemein formuliert, Zahlen teilbar/brechbar.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Schlagwörter: Brüche • Dezimalsystem • Grundwert • Prozentsatz • Prozentwert • Spiel • Vortrag • Zahlen bis 1000

17.4 Prozentsätze (Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

17.4.1 Vortrag und Aufgabenblatt – Vom Hundertstel zu Prozentsätzen

Exploration

Die Aufgaben und Erläuterungen aus den vorherigen Unterrichtssequenzen werden jetzt zusammengeführt und dem Prozentsatz zugeordnet. Die Teilnehmer/-innen erarbeiten sich den Zusammenhang zwischen Brüchen, Dezimalzahlen und Prozentsätzen.

Der Prozentbegriff wird eingeführt. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern wird die direkte Umwandlung von Brüchen oder Dezimalzahlen in Prozentsätze gezeigt.

Durchführung und didaktische Hinweise

KOPIERVORLAGE 1

Die  **Kopiervorlage 1** zeigt eine tabellarische Zusammenfassung der Abbildungen, die die Kursleitung im Vortrag verwendet. Diese Übersicht bietet die Möglichkeit, parallel zum Vortrag alle Beispiele zu betrachten und sich Notizen zu machen oder nach dem Vortrag mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern als zusammenfassenden Überblick zu besprechen.

Das Ziel dieses Unterrichtskapitels ist es, erste Betrachtungen zu Prozentsätzen anzustellen. Dafür sind Hundertstel wichtige und hilfreiche Einteilungen. In der Prozentrechnung wird alles auf Hundertstel bezogen. Die Idee dabei ist:

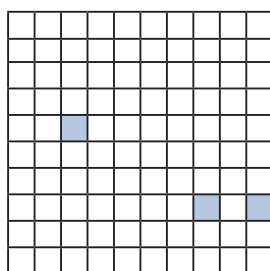
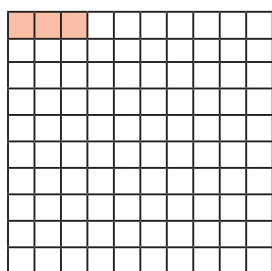
Das Ganze wird in 100 Teile zerlegt und es wird ermittelt, um wie viele Hundertstel es sich bei dem zu bestimmenden Teil handelt.

Das entspricht dem sogenannten Prozentsatz. Er benennt, um wie viele Hundertstel es sich bei dem zu bestimmenden Teil handelt. Das Zeichen, das dafür geschrieben wird, ist %. Der Prozentsatz wird in Prozent angegeben. Eigentlich ist es eine verkürzte Form der Hundertstelschreibweise.

$$\frac{1}{100} \triangleq 1\%$$

Ein Hundertstel des Ganzen entspricht einem Prozent des Ganzen.

Demzufolge entsprechen zum Beispiel drei Hundertstel des Ganzen drei Prozent des Ganzen. Im Bild sehen Sie eine Visualisierung von drei Prozent oder entsprechend drei Hundertsteln.



$$\frac{3}{100}$$

$$0,03$$

$$3\%$$

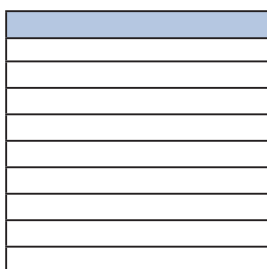
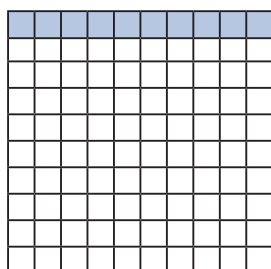
Abbildung 17.4-1: Darstellung von drei Hundertsteln oder drei Prozent: Bruch, Dezimalzahl, Prozentsatz

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Es ist nicht wichtig, wie diese Hundertstel angeordnet sind. Wichtig ist, dass das Ganze in 100 gleich große Teile geteilt wurde und dass wir nun drei dieser Teile, also drei Hundertstel oder drei Prozent vom Ganzen, betrachten. Beide Abbildungen sind mögliche Darstellungen von drei Hundertsteln oder drei Prozent. Die entsprechende Dezimalzahl ist 0,03. Denn die zweite Stelle nach dem Komma entspricht den Hundertsteln. Für die Anzahl der Hundertstel wird einfach ein anderer Begriff benutzt, nämlich der **Prozentsatz**. Es handelt sich also um drei Prozent des Ganzen.

Drei Prozent des Ganzen sind **farbig** markiert. Die Markierung der drei Hundertstel stellt also auch drei Prozent des Ganzen dar. Aus dem Hundertstelbruch oder der Dezimalzahl kann direkt der Prozentsatz bestimmt werden: Drei Hundertstel oder 0,03 entsprechen drei Prozent. Drei Hundertstel von „Etwas“ oder 0,03 von „Etwas“ entsprechen drei Prozent von „Etwas“.

Wie können wir uns jetzt zehn Prozent vom Ganzen vorstellen?



$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$0,10$$

$$10\%$$

Abbildung 17.4-2: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{10}{100}$

Dafür sind zehn Hundertstel zu markieren, denn der Prozentsatz entspricht der Anzahl der Hundertstel. Das Ganze wird in 100 gleich große Teile zerlegt und zehn davon sind 10 Prozent.

Aus der Stellenwerttabelle wissen wir, dass zehn Hundertstel in ein Zehntel umgewandelt werden können. Dass ein Zehntel und zehn Hundertstel gleich groß sind, können wir auch in den beiden Darstellungen sehen. Links wurde das Ganze in hundert Teile geteilt und rechts das gleiche Ganze in zehn Teile. Zehn Hundertstel können zu einem Zehntel zusammengefasst werden bzw. ein Zehntel kann wiederum in zehn gleich große Teile zerlegt werden. Beide Bruchstücke: $\frac{1}{10}$ und $\frac{10}{100}$ sind gleich groß.

Die zugehörige Dezimalzahl ist 0,1. Es kann dafür auch 0,10 oder 0,100 oder 0,1000 usw. geschrieben werden. Es ist im Zusammenhang mit Prozentsätzen günstig, die Dezimalzahl mit zwei Stellen nach dem Komma aufzuschreiben, weil daraus direkt der Prozentsatz abgelesen werden kann.

Der Zusammenhang für $\frac{20}{100}$ stellt sich folgendermaßen dar.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

KOPIERVORLAGE 1

Hier wird zur vertikalen Darstellung gewechselt, um die Fähigkeit der Teilnehmer/-innen zur Deutung von graphischen Darstellungen zu flexibilisieren.

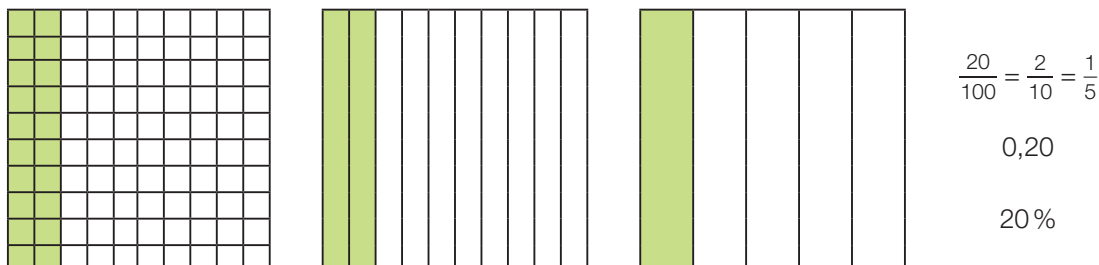


Abbildung 17.4-3: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{20}{100}$

$\frac{20}{100}$ entsprechen 20 Prozent. Schauen wir uns zunächst die Darstellungen an. Das Ganze wurde jeweils in gleich große Bruchstücke geteilt. In 100, in zehn bzw. in fünf, also erhalten wir entsprechend Hundertstel, Zehntel und Fünftel. Umgekehrt können Sie sich vorstellen, dass jedes Fünftel in zwei gleich große Stücke geteilt wird – so erhalten wir zehn Zehntel. Und wenn wir diesen Faden weiterspinnen, teilen wir jetzt jedes Zehntel erneut in zehn gleich große Stücke – so erhalten wir 100 Hundertstel. Aus diesem graphischen Exkurs kann abgeleitet werden, dass $\frac{20}{100}$, $\frac{2}{10}$ und $\frac{1}{5}$ einander gleich sind. Alle drei Brüche entsprechen 20 Prozent.

Schauen wir uns jetzt $\frac{35}{100}$ oder 0,35 an. Es ergibt sich folgendes Bild.

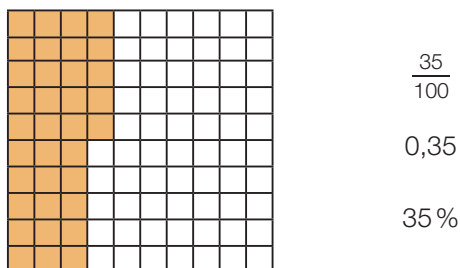


Abbildung 17.4-4: Darstellung, Bruch, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{35}{100}$

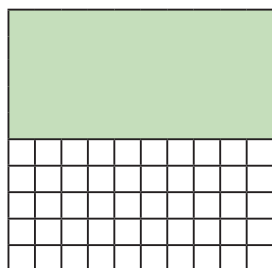
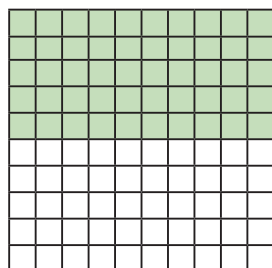
35 Hundertstel oder 0,35 entsprechen dem Prozentsatz von 35 Prozent. Der Stellenwert von 35 Hundertsteln wird in drei Zehntel und fünf Hundertstel umgewandelt.

Wichtige Brüche sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$.

Ich möchte Ihnen zeigen, welche Prozentsätze diesen Brüchen entsprechen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

KOPIERVORLAGE 1



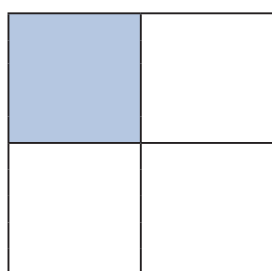
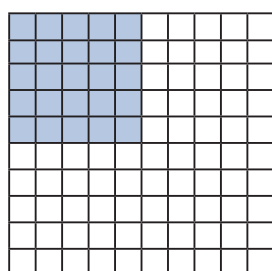
$$\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

0,50

50 %

Abbildung 17.4-5: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{1}{2}$

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die Hälfte des Ganzen 50 Prozent entspricht, nämlich $\frac{50}{100}$ oder $\frac{5}{10}$ oder $\frac{1}{2}$ oder 0,50.



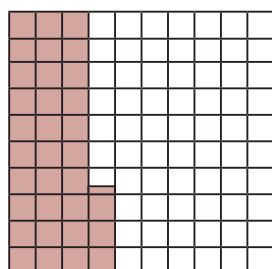
$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

0,25

25 %

Abbildung 17.4-6: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{1}{4}$

Ein Viertel der hundert Hundertstel sind 25 Hundertstel und somit beträgt der Prozentsatz für ein Viertel 25 Prozent. Erinnern Sie sich an die Teilung der Einhundert in vier gleich große Teile? Es sind 25.



$$\frac{1}{3}$$

 $\approx 0,333$ $\approx 33,3\%$ Abbildung 17.4-7: Darstellung, Bruch, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{1}{3}$

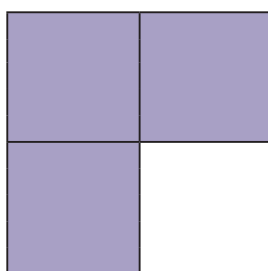
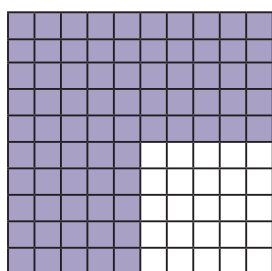
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Exkurs:

Periodische Dezimalzahlen sind unendlich. Nur wenigen Teilnehmerinnen und Teilnehmern wird es gelingen, einem Exkurs zu diesem Thema zu folgen. Die Kursleitung entscheidet, ob sich der Kurs über ein Drittel von 100 austauscht. Möglicherweise verzichtet sie auf die **Abbildung 17.4-7** und entsprechende Erläuterungen. $\frac{1}{3}$ ist jedoch eine wichtige Bruchzahl, die in Alltagssituationen oft benutzt wird.

Schwierig gestaltet sich die Visualisierung von einem Drittel der Hundertstel. Hier müssen wir mit der Näherung von 33,3 Prozent arbeiten. Die Ursache liegt in der Teilbarkeit der 100. Hundert Hundertstel können nicht exakt gedrittelt werden, so dass zwar die Bruchzahl $\frac{1}{3}$ exakt den Wert wiedergibt, diese jedoch nur ungefähr als Prozentsatz von 33,3 Prozent angegeben werden kann.

Weitere wichtige Prozentsätze sind zum Beispiel 75 und 90 Prozent.

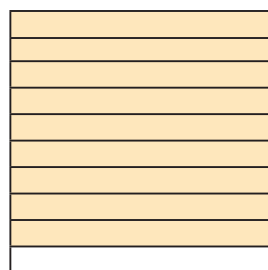
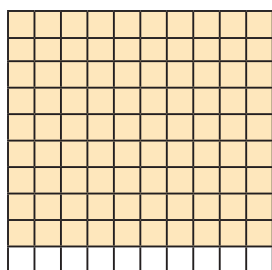


$$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

0,75

75 %

Abbildung 17.4-8: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl von 75 Prozent



$$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

0,90

90 %

Abbildung 17.4-9: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl von 90 Prozent

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.4.2 Spiel – Prozentsätze-Mau-Mau

Auf der  **Kopiervorlage 2** ist ein Spiel abgebildet. Vorab werden die auf festem Papier ausgedruckten oder laminierten Karten ausgeschnitten.

Um den im Vortrag besprochenen Zusammenhang zwischen Darstellung, Bruch, Dezimalzahl und Prozentsatz zu festigen, ordnen die Teilnehmer/-innen Karten mit entsprechenden Abbildungen in einem Mau-Mau-Spiel zu. Das Mau-Mau-Spiel kann mit drei bis fünf Personen gespielt werden. Es werden entsprechende Teams eingeteilt.

Jede mitspielende Person erhält zu Beginn vier Karten. Die übrigen Karten werden als Stapel verdeckt in die Mitte gelegt. Die erste Karte wird aufgedeckt neben den Stapel gelegt. Der/Die Jüngste beginnt. Es gibt drei Möglichkeiten:

- *Es wird eine Karte derselben Kategorie auf die aufgedeckte Karte gelegt.
Beispiel: Darstellung auf Darstellung, Brüche auf Brüche usw.*
- *Es wird eine Karte mit dem gleichen Wert auf die aufgedeckte Karte gelegt.
Beispiel: Auf $\frac{50}{100}$ darf die entsprechende Darstellung, 0,50 oder 50 % abgelegt werden.*
- *Es wird ein Joker abgelegt. Ein Joker kann auf jede Karte abgelegt werden und auf einen Joker kann eine beliebige Karte abgelegt werden.*

Kann keine passende Karte gespielt werden, so wird eine Karte vom Stapel genommen. Wenn die Karte passt, kann diese abgelegt werden, ansonsten ist die nächste Person dran.

Die Sonderkarten dürfen nur auf die passenden Kategorien abgelegt werden. Prozentsatz nur auf eine beliebige Prozentsatzkarte, Darstellung nur auf eine beliebige Darstellungskarte usw. Dann muss die nächste Person entweder eine Karte ziehen oder aussetzen.

Gewonnen hat die Person, die als Erste ihre letzte Karte abgelegt hat.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.4.3 Vortrag und Aufgabenblatt – Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz

Exploration

Die Teilnehmer/-innen machen sich mit den grundlegenden Begriffen der Prozentrechnung vertraut: Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz. Zwischen diesen drei Größen besteht ein rechnerischer Zusammenhang:

$$\text{Grundwert} \cdot \text{Prozentsatz} = \text{Prozentwert}$$

Diesen drei Größen werden Symbole zugeordnet: Grundwert GW; Prozentsatz p; Prozentwert PW. Es gilt, diese drei Größen in Sachsituationen zuzuordnen.

Durchführung und didaktische Hinweise

Ich möchte mit Ihnen über drei Begriffe der Prozentrechnung sprechen, die eng miteinander verbunden sind und die Basis des Rechnens mit Prozenten bilden. Es geht um die Begriffe: Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz. Dabei möchte ich ein erstes Beispiel nutzen, um daran die Begriffe und die rechnerischen Zusammenhänge zu erläutern.

Beispiel Prozentrechnung:

25 %
Prozentsatz **p**

von 200,00 €
Grundwert **GW**

sind 50,00 €
Prozentwert **PW**

Das Beispiel lautet: 25 Prozent von 200,00 Euro sind 50,00 Euro.

Die Begriffe Grundwert (dafür wird das Symbol GW verwendet), Prozentwert (Symbol PW) und Prozentsatz (Symbol p) sind den entsprechenden Werten zugeordnet.

Schauen wir uns zuerst den Grundwert GW – hier 200,00 Euro – an. Der Grundwert steht für das Gesamte/das Ganze. In diesem Beispiel sind die 200,00 Euro das Ganze. Der Grundwert GW ist die Bezugsgröße der Prozentrechnung – der zugrunde liegende Wert oder auch die Basis. Der Grundwert entspricht 100 Prozent. Bezogen auf den Grundwert werden die anderen Größen bestimmt.

*In unserem Beispiel wird der Grundwert durch das Wort **von** näher beschrieben. Wir könnten fragen, **wovon** sind 50,00 Euro 25 Prozent? Oder 50,00 Euro sind 25 Prozent **von** welchem Wert/Grundwert oder **von** welchem Wert, der 100 Prozent entspricht?*

*Die Antworten lauten: **Von** 200,00 Euro sind 50,00 Euro 25 Prozent. Das Gesamte oder Ganze oder der Wert, der 100 Prozent entspricht, ist hier 200,00 Euro. Der **Grundwert** in diesem Beispiel ist 200,00 Euro.*

Eine mögliche Betrachtung ohne formalen Rechenweg: 25 Prozent entspricht einem Viertel. Wenn ein Viertel 50,00 Euro sind, dann ist das Ganze 200,00 Euro.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

Betrachten wir den **Prozentwert PW**, stellen wir fest, dass dieser Wert in der gleichen Maßeinheit wie der Grundwert angegeben wird. Der Prozentwert ist ein Teil des Grundwertes. Dieser Prozentwert gehört zu dem Prozentsatz. Ändert sich der Prozentwert, ändert sich auch der Prozentsatz. Es wird die Bezeichnung **Prozentwert** verwendet, weil beide Größen (**Prozentsatz** und **Prozentwert**) eng zusammenhängen. Wir könnten fragen: Wie viel Euro sind 25 Prozent von 200,00 Euro?

Zusammengefasst: Grundwert und Prozentwert besitzen die gleiche Maßeinheit und tragen beide das Wort **Wert** in der Bezeichnung. Der Prozentwert ist ein Teil vom Grundwert. Der Grundwert bezieht sich immer auf 100 Prozent und der Prozentwert auf den entsprechenden Prozentsatz.

Über den **Prozentsatz p** haben wir bereits gesprochen. Wir wissen inzwischen, dass der Prozentsatz einen Teil vom Ganzen ausdrückt, genauer: wie vielen Hundertsteln vom Ganzen dieser Teil entspricht.

Wenn der Prozentsatz ein Prozent beträgt, ist der Teil $\frac{1}{100}$ vom Ganzen.

Beträgt der Prozentsatz zehn Prozent, sind es $\frac{10}{100}$ Teile vom Ganzen.

Welchem Prozentsatz oder Teil entsprechen 50,00 Euro bezogen auf 200,00 Euro?

In unserem Beispiel beträgt der Prozentsatz 25 Prozent. Das heißt, $\frac{25}{100}$ oder 25 Prozent von 200,00 Euro sind 50,00 Euro.

Auf dem **Aufgabenblatt 17.4a** sind weitere Beispiele angegeben, um gemeinsam mit den Teilnehmern und Teilnehmerinnen den Begriffen entsprechende Werte zuzuordnen. Darüber hinaus kann der Prozentwert für ein Prozent ermittelt werden.

Rückschau

Die Teilnehmer/-innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Zahlen können in Teile zerlegt werden.
- Werden Zahlen in gleich große Teile zerlegt, entspricht das der Rechenoperation der Division.
Wird zum Beispiel eine Zahl in fünf gleich große Teile zerlegt, heißt das, diese Zahl durch fünf zu dividieren oder sie zu fünfteln.
- Umgekehrt können die Teile durch Addition oder Multiplikation zu dieser Zahl zusammengefügt werden.
- Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Brüche zu veranschaulichen. Wichtig ist, dass das Ganze in gleich große Teile geteilt wird. Aus Bruchzahlen kann abgeleitet werden, in wie viele Teile das Ganze geteilt wurde (Nenner) und wie viele dieser Teile betrachtet werden (Zähler).
- Eine Dezimalzahl enthält ein Komma. Rechts des Kommas werden zunächst Zehntel, dann Hundertstel und Tausendstel usw. notiert. Um die Werte der einzelnen Stellen zu ermitteln, ist eine Stellenwerttabelle hilfreich. Wenn es auf einer Stelle zehn sind, wird auch bei Zehnteln, Hundertsteln, Tausendsteln usw. die Stelle links davor mit einer Eins besetzt.
- Sind es zum Beispiel 12 Hundertstel, wird die Zehntelstelle (links davor) mit eins besetzt und die Hundertstelstelle mit zwei.
- Dementsprechend gilt zum Beispiel: $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 0,30$ oder $\frac{5}{100} = 0,05$.
- Die Idee der Prozentsätze ist, dass das Ganze in hundert gleich große Teile zerlegt wird. Ein Prozent entspricht einem Hundertstel vom Ganzen. Zehn Prozent entsprechen zehn Hundertsteln des Ganzen. Prozentsätze werden in Prozent mit dem Zeichen % angegeben.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

- Zehntel, Hundertstel, Dezimalzahlen und Prozentsätze können direkt ineinander umgewandelt werden:
 $\frac{9}{10} = \frac{90}{100} = 0,90 = 90\%$.
- Neben dem Prozentsatz sind zwei weitere Größen maßgeblich: Der Grundwert GW und der Prozentwert PW. Der Grundwert steht für die Größe, die 100 Prozent – also dem Ganzen oder auch der Gesamtheit – entspricht. Der Prozentwert steht für die Größe, die dem Prozentsatz p entspricht.
- Der rechnerische Zusammenhang lässt sich mit der Formel:

$$GW \cdot p = PW$$

beschreiben. Dabei muss der Prozentsatz p in Hundertsteln angegeben werden.

Ausblick

In den vorangegangenen Betrachtungen wurde der Zahlbereich der gebrochenen Zahlen nur einführend dargestellt. Zunächst wurden nur Themen betrachtet, die für Prozentrechnungen relevant sind. Die Betrachtungen beschränkten sich auf sogenannte einfache echte Brüche, wie Halbe, Viertel, Drittel, Fünftel, Zehntel und Hundertstel.

Die Umwandlung von Brüchen (hier Zehntel, Hundertstel, Tausendstel) wurde anhand von Darstellungen bzw. anhand der Stellenwerttabelle erklärt.

Die rechnerischen Zusammenhänge – Erweitern und Kürzen – wurden bisher nicht erläutert.

Ebenso wurden keine Rechenoperationen und Vergleiche der gebrochenen Zahlen betrachtet.

Diese Inhalte können Gegenstand einer eigenen Unterrichtseinheit sein. Sie könnten aber auch an dieser Stelle oder am Ende des Abschnittes 17.5 ausgeführt werden. Gleiches gilt für weiterführende Betrachtungen zu den Zahlbereichen der natürlichen und gebrochenen Zahlen; zum Beispiel, dass natürliche Zahlen auch gebrochene Zahlen sind, dass aus jedem Bruch durch Division eine Dezimalzahl erzeugt werden kann (Anwenden der schriftlichen Division oder Nutzen des Taschenrechners), dass es unendliche Dezimalzahlen gibt oder wie gebrochene Zahlen/Dezimalzahlen am Zahlenstrahl dargestellt werden können.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 1 – Vom Hundertstel zum Prozentsatz

Darstellungen		Brüche	Dezimalzahl	Prozentsatz
		$\frac{3}{100}$	0,03	3 %
		$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	0,10	10 %
		$\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	0,20	20 %
		$\frac{35}{100}$	0,35	35 %
		$\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	0,50	50 %
		$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	0,25	25 %
		$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$	0,75	75 %
		$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$	0,90	90 %
		$\frac{1}{3}$	$\approx 0,333$	$\approx 33,3 \%$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



KOPIERVORLAGE 2 – Prozentsätze-Mau-Mau

Spiel für drei bis fünf Personen:

Schneiden Sie die Karten an den Linien aus.

Jede mitspielende Person erhält zu Beginn vier Karten. Die übrigen Karten werden als Stapel verdeckt in die Mitte gelegt. Die erste Karte wird aufgedeckt neben den Stapel gelegt. Der/Die Jüngste beginnt. Es gibt drei Möglichkeiten:

- Es wird eine Karte derselben Kategorie auf die aufgedeckte Karte gelegt.
Beispiel: Darstellung auf Darstellung, Brüche auf Brüche usw.
- Es wird eine Karte mit dem gleichen Wert auf die aufgedeckte Karte gelegt.
Beispiel: Auf $\frac{50}{100}$ darf die entsprechende Darstellung 0,50 oder 50% abgelegt werden.
- Es wird ein Joker abgelegt. Ein Joker kann auf jede Karte abgelegt werden und auf einen Joker kann eine beliebige Karte abgelegt werden.



Kann keine passende Karte gespielt werden, so wird eine Karte vom Stapel genommen. Wenn die Karte passt, kann diese abgelegt werden, ansonsten ist die nächste Person dran.

Die Sonderkarten dürfen nur auf die passenden Kategorien abgelegt werden. Prozentsatz nur auf eine beliebige Prozentsatzkarte, Darstellung nur auf eine beliebige Darstellungskarte usw. Dann muss die nächste Person entweder eine Karte ziehen oder aussetzen.

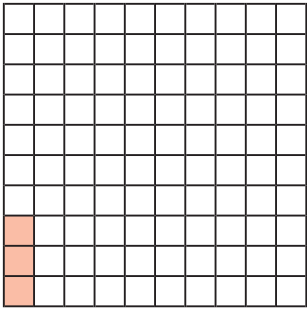
Gewonnen hat die Person, die als Erste ihre letzte Karte abgelegt hat.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



Brüche	Darstellungen	Darstellungen	Darstellungen	Brüche	Dezimalzahl	Brüche	Dezimalzahl	Prozentsatz	Dezimalzahl	Prozentsatz	Dezimalzahl	Prozentsatz	Dezimalzahl	Prozentsatz
Aussetzen	Aussetzen	Aussetzen	Aussetzen	Eine Karte ziehen	Eine Karte ziehen	Eine Karte ziehen	Eine Karte ziehen	Eine Karte ziehen	Eine Karte ziehen	Eine Karte ziehen	Eine Karte ziehen	Eine Karte ziehen	Eine Karte ziehen	Eine Karte ziehen

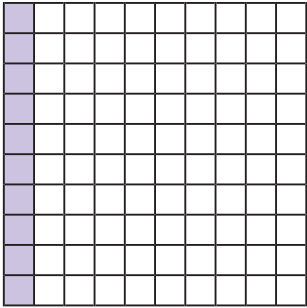
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



$$\frac{3}{100}$$

0,03

3%



$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

0,10

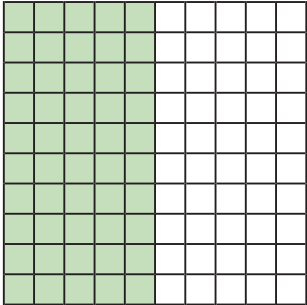
10%

Zahlbereich				Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system



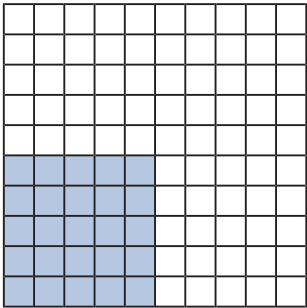
$\frac{35}{100}$	$\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$0,20$ 20%	$0,35$ 35%
--	---	---	---

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



$$\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

0,50



$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

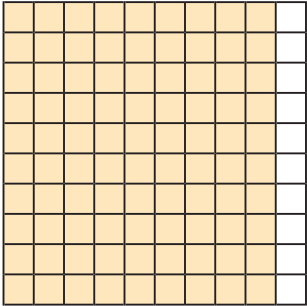
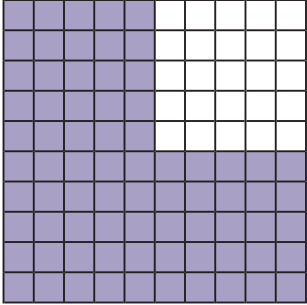
0,25

50%

25%

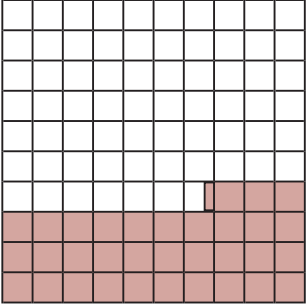
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$		$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$		90%	$0,90$	75%	$0,75$
---	--	--	--	--	--	--	--

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	



Joker	Joker	$1 \frac{1}{3}$		$\approx 33,3\%$	$\approx 0,333$
Joker	Joker				

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Schlagwörter: Brüche • Das Ganze • Dezimalsystem • Die Teile • Dreisatz • Graphische Darstellung von Mengenhaltungen und Sachsituationen • Grundwert • Kursgespräch • Mathekonferenz • Mengen • Prozentrechnung • Prozentsatz • Prozentwert • Vortrag • Zahlen bis 1000 • Zahlzerlegung • Zweisatz

17.5 Prozente im Alltag

(Cornelia Weilke unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

Exploration

In diesem Abschnitt werden die Teilnehmer/-innen an praktischen Beispielen aus dem Alltag jeweils den Prozentwert, den Prozentsatz und den Grundwert zuzuordnen und ermitteln. Dabei wird auch auf die Bruchrechnung und die Dezimalschreibweise einer Zahl Bezug genommen, denn diese können bei sogenannten bequemen Prozentsätzen, wie z. B. $50\% = \frac{1}{2} = 0,5$ oder $20\% = \frac{1}{5} = 0,2$, sehr hilfreich und eine deutliche Erleichterung sein.

Mit „bequem“ ist hier ein Synonym für „leicht“ gemeint. Die sogenannten bequemen Prozentsätze oder Brüche sind den meisten Teilnehmern und Teilnehmerinnen bekannt. So wissen die meisten Menschen, dass 50% dasselbe ist wie $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ kennen auch viele. Vielleicht ist einigen auch bekannt, dass 10% der zehnte Teil vom Ganzen und damit $0,1$ sind. Ein bequemer Prozentsatz erleichtert häufig das Rechnen.

Beispiele aus dem Alltag sind:

- Rabatte beim Einkaufen, Kundenkartensysteme
- Nahrungsmittelangaben
- Skonto von (Handwerker-)Rechnungen
- Zinsen für Kredite oder Ratenkäufe
- Lohn-/Gehaltsabrechnungen, Brutto- und Nettobeträge, Krankenkassenbeiträge
- Mieterhöhungen/-minderungen
- Ratenkäufe und entstehende Kreditkosten
- Statistiken lesen und verstehen (Grundwerte ermitteln zu angegebenen Prozentwerten/-sätzen)
- Steigung einer Straße

Allgemein sollte die Vorgehensweise in diesem Abschnitt so sein, dass die Teilnehmer/-innen Situationen aus dem Alltag nennen, in denen eine der oben genannten Größen zu bestimmen ist. Dabei sollen die Teilnehmer/-innen – wenn möglich – eigene Fragen formulieren. Anderenfalls stellt die Kursleitung Fragen vor und lässt die Teilnehmer/-innen Lösungswege im Rahmen einer Mathekonferenz oder eines Kursgespräches finden und diskutieren. Wenn die Teilnehmer/-innen zu den von ihnen genannten Beispielen nicht angeben können, welche Größe (Prozentwert, Grundwert oder Prozentsatz) jeweils gesucht wird, ordnet die Kursleitung die Größe zu und begründet dies.

Die Kursleitung befragt die Teilnehmer/-innen, anhand welchen Beispiels die jeweils gesuchte Größe bestimmt werden soll, oder wählt ein Beispiel aus. Die nachfolgenden Beschreibungen stellen mögliche Wege zur Bestimmung eines gesuchten Wertes dar, mittels derer die Ausgangsfrage beantwortet werden kann. Die Erläuterungen dazu sind so ausgearbeitet, dass die Kursleitung diese auf ein Beispiel der Teilnehmer/-innen übertragen kann.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.5.1 Kursgespräch – Von der Theorie zur Praxis

Durchführung und didaktische Hinweise

Am Anfang der Stunde fragt die Kursleitung die Teilnehmer/-innen nach Beispielen zu Prozenten aus dem Alltag und lässt zu den Beispielen Fragen formulieren oder formuliert die Fragen für die Teilnehmer/-innen. Diese Fragen werden schriftlich fixiert, damit sie im weiteren Verlauf als Aufgabenbeispiele verwendet werden können.

AUFGABENBLATT 17.5a

Alternativ steht das **Aufgabenblatt 17.5a**¹ (Bearbeitungsdauer ca. ein bis zwei Stunden, je nach Kenntnisstand) zur Verfügung. Es enthält eine Mischung verschiedener Alltagssituationen mit Prozenten. Auch hierzu sind von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern Fragen zu formulieren und die jeweils gesuchte Größe Prozentwert, Prozentsatz oder Grundwert zuzuordnen. Dabei können Diskussionen entstehen, die ausdrücklich erwünscht sind.

Schließlich werden die Fragen und Beispiele nach den gesuchten Werten sortiert. Das Ordnen kann erfolgen, indem die Kursleitung die Teilnehmer/-innen fragt, welche Beispiele Gemeinsamkeiten haben und ob sie sortierbar sind. Alternativ ordnet die Kursleitung die Fragen und bespricht die Sortierung sofort oder in der nächsten Stunde mit der Gruppe.

Falls die Teilnehmer/-innen dazu in der Lage sind, lässt die Kursleitung sie ca. 15 Minuten lang einige von den oben genannten Aufgaben rechnen und notiert die auftretenden Rechenwege. Die Ergebnisse geben einen Überblick über den Wissensstand der Teilnehmer/-innen und dienen als Grundlage für die Vorbereitung der nächsten Stunden.

¹ Allgemeine Anmerkungen zu den Aufgabenblättern: Für viele Teilnehmer/-innen kann die Prozentrechnung besondere Herausforderungen mit sich bringen, daher empfiehlt es sich, die Aufgaben möglichst in der Kursgruppe oder in Kleingruppen lösen zu lassen. Der größte Lerneffekt dürfte in der Lösung im Rahmen einer Mathekonferenz sein. Die Aufgaben können auch einzeln präsentiert werden – nach Schwierigkeitsstufen sortiert – und in sogenannten Lernstationen von den Teilnehmern und Teilnehmerinnen ausgewählt werden, falls sie ihre Kompetenzen selbst gut einschätzen können.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.5.2 Mathekonferenz und Kursgespräch – Prozentwert bestimmen

Hier ist als Unterrichtsform „Mathekonferenz und Kursgespräch“ angegeben. Grundsätzlich geht es darum, dass die Problemstellungen und die Lösungswege der Teilnehmer/-innen den Unterrichtsverlauf leiten. Die verschiedenen Lösungswege werden verglichen. Dabei sollen die Teilnehmer/-innen verstehen, welche möglicherweise verschiedenen Rechenwege zu Lösungen des jeweiligen Problems führen – und sie sollen sich möglichst auf effektive bzw. einfache Rechenwege einlassen. Ein Problem dieses Ansatzes – eines Voneinander- und Miteinanderlernens – ist, dass in manchen Kursen ineffektive oder rudimentäre Lösungswege vorgeschlagen werden. Es ist die Aufgabe der Kursleitung, andere Rechenwege vorzuschlagen. Im nachfolgend entwickelten Unterrichtsszenario werden verschiedene Rechenwege vorgestellt, damit die Kursleitung (zumindest in Grundzügen) voraussehen kann, welche Rechenwege auftreten könnten – und ein Repertoire an möglichen Rechenwegen hat.

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 17.5a

Die Kursleitung händigt den Teilnehmerinnen und Teilnehmern **Aufgabenblatt 17.5a Alltagssituationen** mit einer Vielfalt von Alltagssituationen aus. Auf einem weiteren Blatt, oder im Raum für alle sichtbar, sollten die zum Ende der vergangenen Stunde von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern genannten Beispiele zu sehen sein. Die Teilnehmer/-innen sollen nun aus den einzelnen Situationen den jeweils gesuchten Wert (Prozentwert PW , Prozentsatz p oder Grundwert GW) ermitteln. Dann bittet die Kursleitung die Teilnehmer/-innen, aus allen Beispielen zum Prozentwert eines auszuwählen, ggf. wählt die Kursleitung ein geeignetes Beispiel der Teilnehmer/-innen.

Beispiel:

Der Fahrradladen nebenan hat Fahrräder reduziert. Ein Mountainbike mit 27 Gängen ist um 20 % reduziert. Es hat vorher 598,00 € gekostet.

*Welche Fragen lassen sich hierzu formulieren?
Kennen Sie einen oder mehrere Rechenwege zur Beantwortung?*

Die Kursleitung notiert die Fragen und Rechenwege an der Tafel und fragt weiter:

Hat jemand eine Idee, wie sich dieser Sachverhalt veranschaulichen lässt?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Falls nicht, zeigt die Kursleitung am Zahlenstrahl folgende Darstellung eines Rabattes von 20 % bis 100 % = 598,00 €:

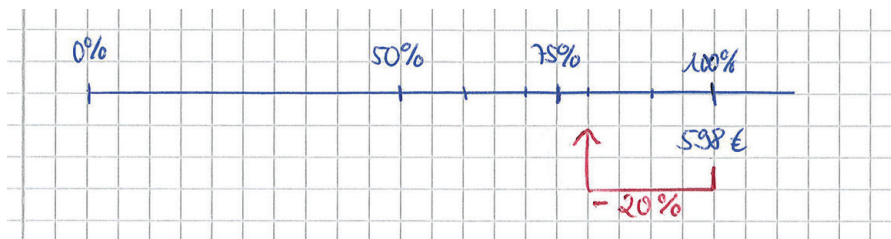


Abbildung 17.5-1: Darstellung Rabatt von 20 % am Zahlenstrahl bis 100 % = 598,00 €

Am Zahlenstrahl² von 0 bis 100 für Prozentsätze wurden die vorhandenen Angaben Grundwert 100 % = 598,00 € sowie die Verminderung um 20 % eingetragen. Die Angaben 50 % und 75 % dienen der groben Orientierung.

Haben Sie mit Blick auf die Skizze eine Idee, wie sich der gesuchte Prozentwert ermitteln lässt?

Die Antworten werden an der Tafel notiert.

Hat jemand eine andere Idee zur Darstellung des Sachverhalts?

Falls die folgenden Darstellungen nicht genannt werden, skizziert die Kursleitung die Zerlegung von 100 in gleich große Teile à 20 als Zahlzerlegung und am Zahlenstrahl:

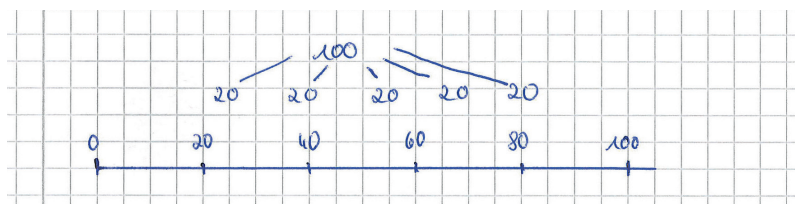


Abbildung 17.5-2: Zerlegung von 100 in gleich große Teile à 20 als Zahlzerlegung und am Zahlenstrahl

Mit Bezug zu **Abschnitt 17.1 Teile** ist festzustellen, dass 100 in fünf gleich große Teile à 20 zerlegt werden kann. Das lässt sich als Zahlzerlegung in fünf Teile (auch Teilmengen) darstellen oder am Zahlenstrahl, der in fünf gleich große Abschnitte unterteilt ist.

Können Sie mit diesen beiden Abbildungen einen Lösungsweg finden?

Die Antworten werden diskutiert und an der Tafel notiert. Es sollte deutlich werden, dass die 20 genau fünfmal in der 100 enthalten ist oder die 100 in fünf gleich große Teile zu je 20 zerlegt werden kann.

² Hier wird der „äquidistante“ Zahlenstrahl mit immer gleich großen Abständen an der Linie analog zu immer gleich großen Unterschieden in den notierten Zahlen empfohlen (von 0 % bis 50 % → 5 cm, von 50 % bis 100 % → 5 cm), damit der Aspekt des Teilens in gleich große Teile besser erkennbar wird (1 Kästchen $\hat{=}$ 5 %).

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Welche Schlussfolgerung lässt sich daraus für die Ausgangsfrage nach dem reduzierten Betrag für das Fahrrad ziehen?

Finden die Teilnehmer/-innen nicht die richtige Antwort, nennt die Kursleitung sie:

Es wird ersichtlich, dass der Preis um ein Fünftel reduziert wird, denn 20 ist ein Fünftel von 100. Wird also ein Prozentwert für 20 % gesucht, entspricht dies dem Fünftel vom Grundwert.

Mit diesem Wissen lässt sich nun der Anfangswert des Fahrrades durch fünf teilen, um den Prozentwert für den Rabatt von 20 % zu bestimmen:

$$598,00 \text{ €} : 5 = 119,60 \text{ €}.$$

Gibt es andere Möglichkeiten, den Prozentwert zu ermitteln?

Die Kursleitung sammelt und diskutiert mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern die Antworten. Dann stellt sie folgende Fragen:

Wie ist es, wenn der Rabatt nicht 20 %, sondern z. B. 19 % beträgt?
Lässt sich der oben beschriebene Weg auch dann anwenden?
Wie würde eine Skizze zur Darstellung des Sachverhaltes aussehen?

Die Kursleitung sammelt wieder Vorschläge der Teilnehmer/-innen oder diese zeichnen ihre Ideen an die Tafel. Die Vorschläge werden dann bzgl. ihrer Vorgehensweise und Anwendbarkeit diskutiert. Eine Skizze könnte die Darstellung am Zahlenstrahl sein:

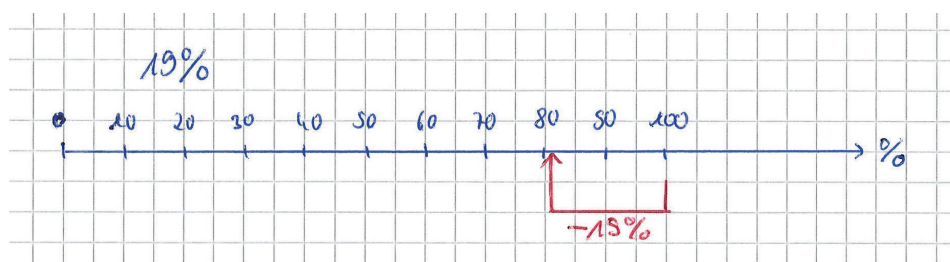


Abbildung 17.5-3: Darstellung Rabatt von 19 % am Zahlenstrahl bis 100

Hat jemand eine Idee, wie anhand dieser Darstellung der Prozentwert ermittelt werden kann?

Tatsächlich ist das nicht so einfach, wenn man den Dreisatz oder die Formel für die Ermittlung des Prozentwertes nicht kennt. Mittels der Darstellung kann der Prozentwert nicht ohne Weiteres ermittelt werden.

Hat jemand eine andere Idee?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Wenn der Gedanke, dass der Sachverhalt sich im Hunderterfeld darstellen lässt, nicht genannt wird, verweist die Kursleitung auf das Hunderterfeld. Darin entspricht ein Feld einem Hundertstel, also einem Prozent. Eine andere Darstellung ist die Zerlegung von 100 in hundert Teile. Ein Einer ist der hundertste Teil eines Hunderters.

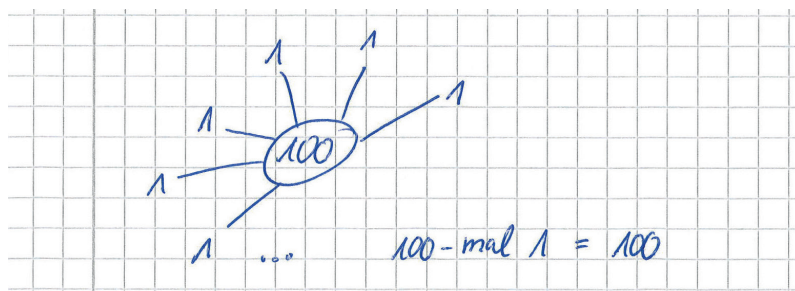


Abbildung 17.5-4: Darstellung 100 zerlegt in 100 Teile

Die Gesamtmenge ist das Ganze, hier auch 100 % genannt. Dann ist der hundertste Teil ein Prozent und umgekehrt $100 \cdot 1\% = 100\%$:

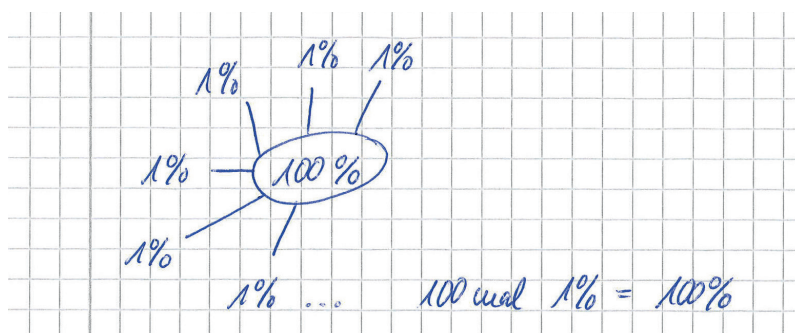


Abbildung 17.5-5: Darstellung 100 % zerlegt in 100 Teile à 1 %

Wird diese Darstellung der 100 nun auf ein Hunderterfeld übertragen, ergibt sich folgendes Bild:

1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	} Das Ganze 100 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	

Abbildung 17.5-6: Zerlegung von 100 % in 100 Teile im Hunderterfeld

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Wenn wie im Beispiel 598,00€ der Grundwert ist, entspricht dieser Betrag der Gesamtmenge oder dem Ganzen, hier auch 100% genannt.

Wie lässt sich der entsprechende Geldwert für 1% bestimmen?

Finden die Teilnehmer/-innen keine Antwort, zeigt die Kursleitung folgende Abbildung:

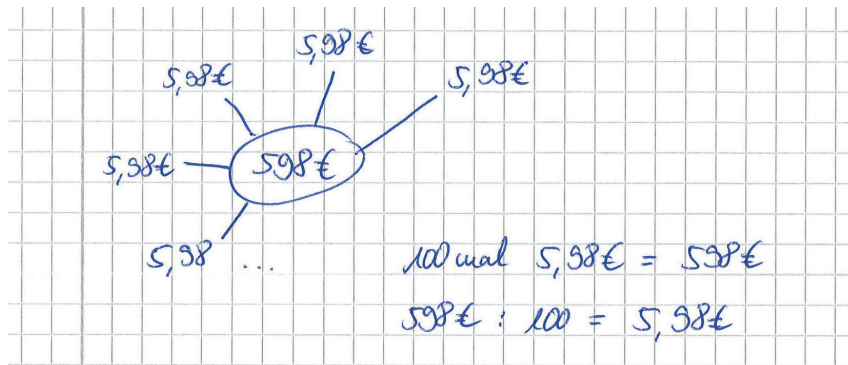


Abbildung 17.5-7: Grundwert 598,00€ in 100 Teile zerlegt

Der Grundwert wird durch 100 geteilt: $598,00€ : 100 = 5,98€$.

Das heißt, der Grundwert wird zerlegt in 100 gleich große Teile, die alle denselben Wert haben, nämlich 5,98€. Da jedes Kästchen in der Graphik für 1% steht, entspricht 1% einem Prozentwert von 5,98€. Dieser Sachverhalt kann am Beispiel eines Hunderterfeldes wie folgt dargestellt werden:

5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€

Das Ganze
598,00€

Abbildung 17.5-8: Grundwert 598,00€ in 100 Teile zerlegt (Hunderterfeld)

Wie lässt sich der entsprechende Prozentwert für 2% ermitteln?

- Oder für 5%?
- Für 10%?
- Für 20%?
- Und für 19%?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Die Kursleitung zeigt dazu folgende Tafelbilder:

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	Das Ganze 598,00 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	

Abbildung 17.5-9: 2 % vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

An dieser Stelle kann die Kursleitung auch die Teilnehmer/-innen nach der Darstellung für 5 % etc. fragen oder aber gleich alle Tafelbilder präsentieren.

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	Das Ganze 598,00 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	

Abbildung 17.5-10: 5 % vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	Das Ganze 598,00 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	

Abbildung 17.5-11: 10 % vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	Das Ganze 598,00 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	

Abbildung 17.5-12: 20 % vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	Das Ganze 598,00€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	

Abbildung 17.5-13: 19% vom Grundwert 598,00€ (blau markiert)

Für die Suche nach dem Prozentwert für einen Rabatt von 19% gibt es verschiedene Lösungswege. Zunächst sammelt die Kursleitung Lösungsvorschläge an der Tafel und diskutiert diese vergleichend miteinander. Dabei werden die Rechenwege auch bzgl. der Klarheit und Effektivität verglichen. Folgende Lösungswege sollten genannt bzw. ggf. von der Kursleitung vorgestellt werden:

Prozentwert für 2%:

Hier bietet es sich an, den Prozentwert für 1% zu verdoppeln: $2 \cdot 5,98€ = 11,96€$.
2% als Anteil vom Ganzen graphisch dargestellt:

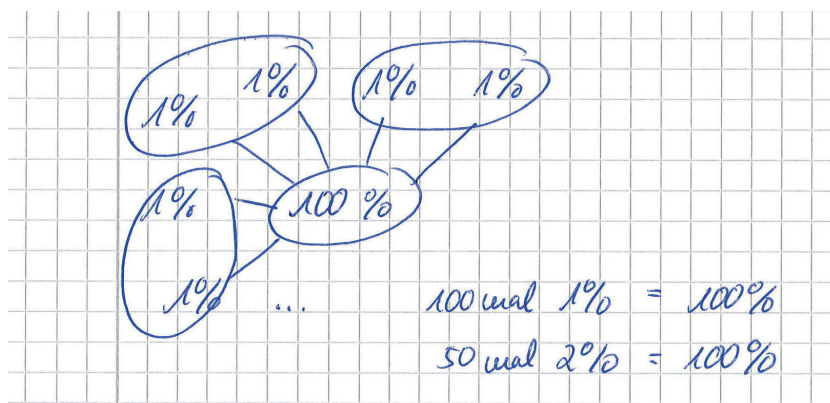


Abbildung 17.5-14: Immer 2% von 100 ist 50-mal möglich

$50 \cdot 2\% = 100\%$, dann ist 100% in 50 gleich große Teile à 2% zerlegbar, d. h.
 $100\% : 50 = 2\%$. Da also 2% der fünfzigste Teil von 100% ist, lässt sich im Beispiel der Grundwert 598,00€ durch 50 dividieren: $598,00€ : 50 = 11,96€^3$.

³ Diese Möglichkeit erfordert in der Regel einen Taschenrechner, wohingegen sich $2 \cdot 5,98€$ noch im Kopf oder schriftlich/halbschriftlich berechnen lässt.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Prozentwert für 5 %:

Analog zu oben ist eine Lösung $5 \cdot 5,98 \text{ €} = 29,90 \text{ €}$. 5 % ist die Hälfte von 10 %.

Die Multiplikation einer Zahl mit 10 ist leicht zu ermitteln: $10 \cdot 5,98 \text{ €} = 59,80 \text{ €}$.

Wird dieser Betrag halbiert, ergibt sich der gesuchte Wert für 5 %: $59,80 \text{ €} : 2 = 29,90 \text{ €}$.

Der Prozentwert für 5 % lässt sich auch ermitteln durch die Kenntnis, dass 5 % zerlegbar ist in $2 \% + 2 \% + 1 \%$.

Dann ist ein weiterer Lösungsweg die Verdoppelung des Prozentwertes für 2 % und Addition des Prozentwertes für 1 %:

$$2 \cdot 11,96 \text{ €} + 5,98 \text{ €} = 23,92 \text{ €} + 5,98 \text{ €} = 29,90 \text{ €}.$$

Prozentwert für 10 %:

Wurde oben ermittelt via $10 \cdot 5,98 \text{ €} = 59,80 \text{ €}$.

Ein anderer Weg ist die Division des Grundwertes durch 10, da 10 % der zehnte Teil von 100 % ist: $598,00 \text{ €} : 10 = 59,80 \text{ €}$.

Der Prozentwert für 10 % lässt sich auch ermitteln durch die Kenntnis, dass 10 % zerlegbar ist in $5 \% + 5 \%$ oder $2 \cdot 5 \%$.

Dann ist ein weiterer Lösungsweg die Verdoppelung des Prozentwertes für 5 %:

$$2 \cdot 29,90 \text{ €} = 59,80 \text{ €}.$$

Prozentwert für 20 %:

20 % ist das Zehnfache von 2 %, daher lässt sich dieser Wert ermitteln durch Multiplikation des Prozentwertes für 2 % mit dem Faktor 10:

$$11,96 \text{ €} \cdot 10 = 119,60 \text{ €}.$$

20 % ist der fünfte Teil von 100 %, d. h., wird der Grundwert durch 5 geteilt, ergibt sich ebenfalls der gesuchte Prozentwert:

$$598,00 \text{ €} : 5 = 119,60 \text{ €}.$$

20 % ist das Doppelte von 10 %, also lässt sich der Prozentwert für 10 % verdoppeln:

$$59,80 \text{ €} + 59,80 \text{ €} = 2 \cdot 59,80 \text{ €} = 119,60 \text{ €}.$$

Schließlich führt der Weg $20 \cdot 5,98 \text{ €} = 119,60 \text{ €}$ zum Ziel.

Wie würden Sie nun den Prozentwert für 19 % Rabatt ermitteln?

Die Kursleitung notiert die Lösungswege an der Tafel. In der Gruppe werden die Wege miteinander verglichen und diskutiert.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Folgende Lösungswege sollten genannt bzw. ggf. von der Kursleitung vorgestellt werden:

Prozentwert für 19%:

Es gilt: 19 ist eins weniger als 20, d.h., sind die Prozentwerte für 20% und 1% bekannt, lässt sich der Prozentwert für 19% Rabatt aus der Differenz der Prozentwerte für 20% und 1% ermitteln:

$$119,60\text{€} - 5,98\text{€} = 113,62\text{€}.$$

Multiplikation des Prozentwertes für 1% mit dem Faktor 19:

$$19 \cdot 5,98\text{€} = 113,62\text{€}.$$

Die verschiedenen Lösungswege werden von der Kursleitung an der Tafel übersichtlich notiert, z. B. in folgender Darstellungsweise, die auch Zuordnung genannt wird, da jedem Prozentsatz ein Prozentwert zugeordnet werden kann:

a)

Prozentsatz	100%	1%	2%
Prozentwert	598,00€	5,98€	11,96€

Abbildung 17.5-15: Lösungswege für 2% von 598,00€

b)

Prozentsatz	100%	1%	2%	5%	10%
Prozentwert	598,00€	5,98€	11,96€	29,90€	59,80€

Abbildung 17.5-16: Lösungswege für 5% von 598,00€

c)

Prozentsatz	100%	1%	2%	5%	10%
Prozentwert	598,00€	5,98€	11,96€	29,90€	59,80€

Abbildung 17.5-17: Lösungswege für 10% von 598,00€

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

d)

Prozentsatz	100 %	1 %	2 %	5 %	10 %	→ ·2 →	20 %
Prozentwert	598,00 €	5,98 €	11,96 €	29,90 €	59,80 €	→ ·2 →	119,60 €

Abbildung 17.5-18: Lösungswege für 20 % von 598,00 €

Dann werden die Teilnehmer/-innen befragt:

Erkennt jemand von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein Muster, anhand dessen sich für alle Prozentsätze gleichermaßen der Prozentwert ermitteln lässt?

Die Teilnehmer/-innen sollen andere beliebige Prozentsätze nennen, für die sie in der Gruppe Lösungswege finden und miteinander vergleichen sollen.

Beispielsweise wird 15 % genannt, dann wären mögliche Lösungen über Verdreifachung des Prozentwertes für 5 % oder Addition der Prozentwerte für 5 % und 10 % oder $15 \cdot 1\%$ etc. Ein anderer Prozentsatz kann 17 % sein.

Lösen die Teilnehmer/-innen via $17 \cdot 1\%$ oder $20\% - 3\%$ oder $15\% + 2\%$ usw.?

Hier sollen die Teilnehmer/-innen ihr vorhandenes Wissen über die Zahlbeziehungen nutzen, um für sich einfache Wege zu ermitteln.

*Welcher Weg ist jeweils leichter?
Können Sie auch für diese Beispiele allgemeingültige Aussagen⁴ treffen?*

Die Kursleitung sammelt die Aussagen der Teilnehmer/-innen an der Tafel (z. B. für Prozentsätze, die aus der 5er-Reihe stammen – 5 %, 10 %, 15 % etc.).

⁴ Mögliche Lösungswege werden im nächsten Abschnitt zusammengefasst, um daraus eine Formel für die Ermittlung des Prozentwertes abzuleiten.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5.3 Vortrag – Verallgemeinerung und Transfer

Durchführung und didaktische Hinweise

Zusammenfassend lässt sich für die Bestimmung von Prozentwerten festhalten:

Der *Grundwert*, also das Ganze, entspricht 100 % – hier also 598,00 €. Für jeden *Prozentsatz* $p > 1\%$ lässt sich der *Prozentwert* mittels Division durch 100 und anschließender Multiplikation mit dem Prozentsatz ermitteln.

Beispiel: $p = 2\%$

$1\% = \frac{1}{100}$, also ermittelt man zunächst den *Prozentwert* für 1 %:

$$598,00\text{ €} : 100 = 5,98\text{ €}.$$

Dann ergibt sich der *Prozentwert* für 2 % durch Multiplikation dieses Ergebnisses mit zwei:

$$2 \cdot 5,98\text{ €} = 11,96\text{ €}.$$

Beispiel: $p = 5\%$

$1\% = \frac{1}{100}$, also ermittelt man zunächst den *Prozentwert* für 1 %:

$$598,00\text{ €} : 100 = 5,98\text{ €}.$$

Dann ergibt sich der *Prozentwert* für 5 % durch Multiplikation dieses Ergebnisses mit zwei:

$$5 \cdot 5,98\text{ €} = 29,90\text{ €}.$$

So führt bei jedem beliebigen Prozentsatz der gleiche Rechenweg zum Ergebnis:

Der Grundwert wird zunächst durch 100 dividiert: $\frac{GW}{100} = \frac{598,00\text{ €}}{100} = 5,98\text{ €}.$

Das ist der Prozentwert für einen Prozentsatz von $p = 1\%$.

Im nächsten Schritt wird dieser Wert mit dem jeweiligen Prozentsatz multipliziert: $p \cdot 5,98\text{ €}$, wobei p den Prozentsätzen 2 %, 5 %, 10 %, 19 % und 20 % in den Beispielen a) bis e) entspricht.

Fasst man diese beiden Rechenschritte zusammen, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{598,00\text{ €}}{100} \cdot p = PW.$$

Wird der Grundwert 598,00 € durch die Variable GW ersetzt, dann wird die allgemeine Gleichung für die Ermittlung des Prozentwertes PW deutlich⁵:

$$PW = \frac{GW}{100} \cdot p \quad \text{oder} \quad PW = GW \cdot \frac{p}{100} \quad \text{oder} \quad PW = \frac{GW \cdot p}{100}.^6$$

⁵ In vielen Kursen wurde die Bruchmultiplikation an dieser Stelle (noch) nicht erarbeitet. Hier kann wahrscheinlich nur auf rudimentäre Kenntnisse aus der Schulzeit verwiesen werden. Allerdings benötigt man diese Umformungen auch nicht unbedingt, sie sind eher als Ergänzung für einige Teilnehmer/-innen gedacht.

⁶ In manchen Formeln wird das Prozentzeichen % in der Formel verwendet: $PW = \frac{GW}{100\%} \cdot p\%$. Durch die Division von $p\%$ durch 100 % hebt sich das Zeichen auf. Hier wird im weiteren Verlauf auf das Zeichen verzichtet.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Mit Blick auf die Ausgangsfrage, wie sich der Prozentwert von 20 % für den Grundwert 598,00 € ermitteln lässt, kann nun auch die Formel direkt verwendet werden:

$$PW = \frac{598,00\text{€}}{100\%} \cdot 20\% = 598,00\text{€} \cdot \frac{20\%}{100\%} = 598,00\text{€} \cdot 20\% = 119,60\text{€}.$$

Bequeme Prozentsätze:

Für bequeme Prozentsätze, wie z. B. 10 %, 20 %, 30 % etc., kann der Bruch $\frac{p}{100}$ in eine Dezimalzahl umgerechnet werden, wenn die Dezimalschreibweise dieses Bruches bekannt ist.

Demnach ist $\frac{10}{100} = 0,1$; $\frac{20}{100} = 0,2$ etc. Mit diesem Wissen lässt sich der Prozentwert auch durch Multiplikation mit der Dezimalzahl des Prozentsatzes bestimmen:

$$PW = GW \cdot 0,2.$$

Für das Beispiel gilt dann: $PW = 598,00\text{€} \cdot 0,2 = 119,60\text{€}$.

Der gesuchte Prozentwert ist ein Preisnachlass, daher ist dieser Wert vom Grundwert 598,00 € abzuziehen, um schließlich den zu bezahlenden Preis zu bestimmen:

Der Endpreis beträgt also $598,00\text{€} - 119,60\text{€} = 478,40\text{€}$.

Ein Blick auf andere Rechenwege lässt weitere Verallgemeinerungen zu:

Im ersten Schritt wurde der Grundwert durch 100 geteilt, um den Prozentwert für $p = 1\%$ zu ermitteln. Dann wurde das Ergebnis mit dem jeweils Vielfachen des Prozentsatzes multipliziert, z. B. mit 5 für $p = 5\%$ oder mit 10 für $p = 10\%$ oder mit 20 für $p = 20\%$.

Beispiel: Prozentwert 5 %

$$\begin{array}{rclcl}
 : 100 & \curvearrowright & 100\% & = & 598,00\text{€} & \curvearrowright & : 100 \\
 & & 1\% & = & 5,98\text{€} & & \\
 \cdot 5 & \curvearrowright & 5\% & = & 29,90\text{€} & \curvearrowright & \cdot 5
 \end{array}$$

In dieser Darstellung wird dem jeweiligen Prozentsatz der entsprechende Prozentwert zugeordnet, weshalb diese Vorgehensweise auch „Zuordnung“ genannt wird. Hier wurden drei Zeilen („Sätze“) verwendet, daher auch der Name „Dreisatz“.

In manchen Situationen ist die Beziehung (Relation) zwischen dem Prozentsatz des Grundwertes GW und dem Prozentsatz des Prozentwertes PW, zum Beispiel zwischen $p = 100\%$ und $p = 5\%$, schnell erkennbar oder leicht ermittelbar. Dies gilt besonders für die sogenannten bequemen Prozentsätze, wie z. B. 5 %, 10 %, 20 %, 25 % oder 50 %.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Ein Prozentsatz von 5 % entspricht $\frac{5}{100}$. 5 ist ein Zwanzigstel von 100, da $100 : 5 = 20$. Daher kann man 100 % und damit auch den Grundwert hier direkt durch 20 teilen, um den gesuchten Prozentwert für $p = 5\%$ zu bestimmen:

$$\begin{array}{rclcl}
 : 20 & \curvearrowright & 100\% & = & 598,00\text{€} & \curvearrowleft & : 20 \\
 & & 5\% & = & 29,90\text{€} & &
 \end{array}$$

Weitere leichte Prozentsätze sind z. B. 10 % als $\frac{1}{10}$ oder 20 % als $\frac{1}{5}$ oder 50 % als $\frac{1}{2}$.

AUFGABENBLATT 17.5a

Die Kursleitung händigt den Teilnehmerinnen und Teilnehmern **Aufgabenblatt 17.5a** *Alltagssituationen* aus. Wenn noch Zeit verbleibt, sollte eine der Aufgaben von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ausgewählt und in der Gruppe besprochen werden, nicht gelöste Aufgaben können die Teilnehmer/-innen als Übungsaufgaben für zuhause mitnehmen.

Weitere Übungsaufgaben zur Ermittlung des Prozentwertes können der Sammlung der von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern zusammengetragenen Aufgaben zu Beginn des **Abschnittes 17.5** oder **Aufgabenblatt 17.5b** *Prozentwerte berechnen* (Bearbeitungsdauer je nach Vorkenntnissen 1 bis 3 Stunden) entnommen werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.5.4 Mathekonferenz und Kursgespräch – Prozentsatz bestimmen

Durchführung und didaktische Hinweise

Wird der Prozentsatz p gesucht, sind der Prozentwert PW und der Grundwert GW bekannt.

Die Kursleitung bezieht sich auf die Beispiele der Teilnehmer/-innen vom Beginn des **Abschnittes 17.5** und fragt die Teilnehmer/-innen, welches Beispiel sie für die Berechnung des Prozentsatzes favorisieren. Falls keine Einigung erzielt wird, wählt die Kursleitung ein Beispiel aus oder nennt die folgenden Beispiele und lässt die Gruppe eines davon auswählen.

Beispiele:

Bei einer **Verkehrskontrolle** wurden 250 LKW überprüft, dabei wurden an 140 LKW erhebliche Mängel festgestellt.

Rabatt beim Einkauf: Sie möchten wissen, wie viel Prozent Preisnachlass Ihr Schnäppchen ausmacht, das vorher 119,00€ kostete und nach der Reduktion nur noch 89,25€.

Mieterhöhung: Ihr Vermieter erhöht nach zwei Jahren schon wieder Ihre Miete, und zwar von 538,50 € um einen festen Betrag von 118,47 €, ohne den Prozentsatz anzugeben. Sie möchten prüfen, ob die prozentuale Erhöhung im gesetzlichen Rahmen ist.

Anteil verkaufter Zeitungen: Von einer Auflage von 15.000 Zeitungen wurden 12.300 verkauft.

Erfolgsquote: Hannes Müller, Torwart vom FC Backenhausen, musste in seiner Karriere bislang 60-mal zum Elfmeterschießen antreten. Hierbei gelang es ihm, 18 Elfmeter zu halten. Sein Vorgänger Peter Meier hatte in seiner langen Karriere insgesamt 140 Elfmeter gegen sich. Ihm gelang es, hiervon 35 Elfmeter zu halten.

Ratenkauf: Für den Kauf des neuen Tablets finden Sie zwei Angebote für Ratenkauf. Das eine Angebot beläuft sich auf einen Verkaufspreis von 480,00€ bei Sofortkauf und eine Laufzeit von 22 Monaten mit einer Ratenhöhe von 25,00€. Das andere Angebot lautet: Verkaufspreis 499,00€ bei Sofortkauf, Laufzeit 18 Monate, monatliche Rate von 29,44€.

Die Teilnehmer/-innen einigen sich auf ein Beispiel, anhand dessen der Prozentsatz p bestimmt werden soll. Am Beispiel der Verkehrskontrolle wird nachfolgend eine Vorgehensweise beschrieben, die von der Kursleitung auf das von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern gewählte Beispiel übertragen werden kann. Die Aufgabe wurde **Aufgabenblatt 17.5a** entnommen und findet sich mit Lösung auch in **Aufgabenblatt 17.5c** wieder.

Zunächst werden die Teilnehmer/-innen nach einer graphischen Darstellung des Sachverhaltes für die Verkehrskontrolle befragt. Die Ideen werden jeweils an der Tafel notiert und dahingehend diskutiert, ob und inwieweit sie bei der Beantwortung der Frage nach dem Prozentsatz hilfreich sind.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Die Darstellung der Situation kann wie folgt aussehen:

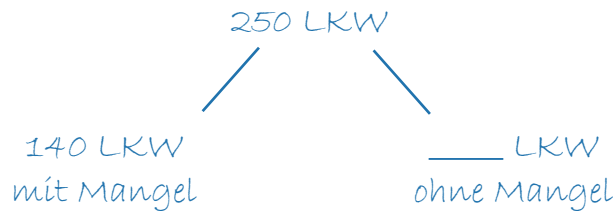


Abbildung 17.5-19: Graphische Darstellung des Beispiels Verkehrskontrolle mittels Zahlzerlegung

Eine andere Möglichkeit der Darstellung ist ein Balken oder Zahlenstrahl:

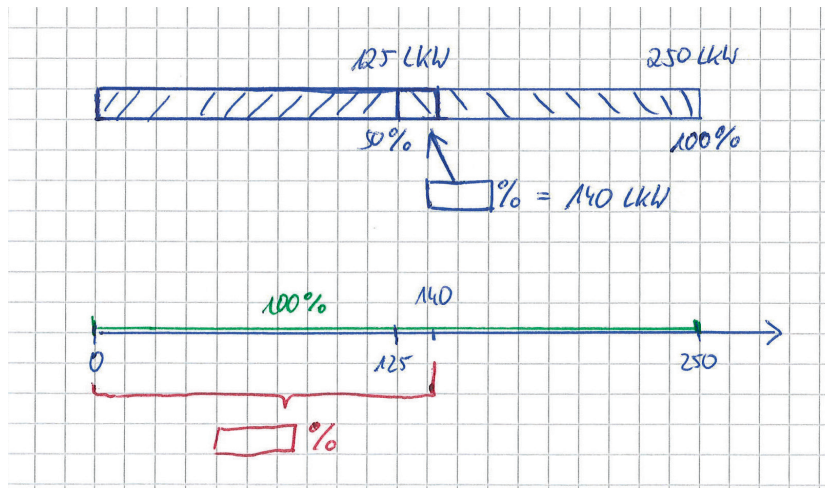


Abbildung 17.5-20: Graphische Darstellungen des Beispiels Verkehrskontrolle mittels Balken und Zahlenstrahl

Welche Fragen lassen sich zu dieser Situation formulieren?
 Was wird hier gesucht? Es geht hier um den Prozentsatz wofür?
 Hat jemand eine Idee, welcher Schritt nun folgt oder wie sich der Prozentsatz ausrechnen lässt?

Falls die richtige Antwort nicht genannt wird, erläutert die Kursleitung mögliche Fragen zum Prozentsatz:

- Wie hoch ist der prozentuale Anteil der defekten LKW an allen untersuchten Fahrzeugen (Gesucht: Prozentsatz = Anteil der defekten LKW vom Ganzen)?
- Wie viele Fahrzeuge waren ohne Mängel und wie viel Prozent sind das im Vergleich zur Gesamtmenge?

Wird der fehlende Wert für die Anzahl der LKW ohne Defekt für die Beantwortung der ersten Frage benötigt?

Lösung: Nein, denn mit dem Wissen um den Grundwert und den Wert für die Anzahl defekter LKW lässt sich der gesuchte Anteil defekter LKW ermitteln.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Wie lässt sich der gesuchte Wert ermitteln?

Die Kursleitung sammelt die Vorschläge der Teilnehmer/-innen an der Tafel. Sie werden bzgl. ihrer Anwendbarkeit und Einfachheit diskutiert.

Die Kursleitung zeigt – falls es nicht genannt wird – folgendes Tafelbild zur Veranschaulichung des Sachverhaltes im Hunderterfeld:

1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %

Das Ganze
(250 LKW = 100 %)

Abbildung 17.5-21: Grundwert 100 % (250 LKW) in 100 Teile zerlegt

Das heißt, dass ein Kästchen für 1 % steht und damit für 2,5 LKW, da $\frac{250}{100} = 2,5$:

2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5

Das Ganze
(250 LKW = 100 %)

Abbildung 17.5-22: Grundwert 250 LKW in 100 Teile à 2,5 LKW zerlegt

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Wie lässt sich der gesuchte Wert ermitteln?

Ein Kästchen entspricht dem Wert für 1 % aller LKW. Da $100\% = 250$ LKW, ist $1\% = 2,5$ LKW. Nun stellt sich die Frage, mit welcher Zahl 2,5 multipliziert werden muss, sodass sich die Anzahl der 140 defekten LKW ergibt, anders formuliert:

$$\underline{\hspace{2cm}} \cdot 2,5 = 140.$$

Die gesuchte Anzahl ergibt sich mittels Division: $140 : 2,5 = 56$.

Da der Prozentwert 2,5 einem Prozentsatz von 1 % entspricht, entsprechen 140 LKW einem Prozentsatz von 56 %.

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer/-innen:

Wie würden Sie den Prozentsatz ermitteln?

Vorschläge der Teilnehmer/-innen werden an der Tafel notiert und diskutiert. Die Kursleitung erläutert in folgendem Vortrag eine Variante mittels Zuordnung in tabellarischer Darstellung und darauf basierend die Formel für die Bestimmung des Prozentsatzes p. Sie fragt die Teilnehmer/-innen, wer die Angaben der Aufgabenstellung übersichtlich an der Tafel darstellen kann. Möglich ist eine Darstellung wie

$$250 \text{ LKW} = 100\%$$

$$1 \text{ LKW} = \underline{\hspace{2cm}}\%$$

$$140 \text{ LKW} = \underline{\hspace{2cm}}\%.$$

Diese Vorgehensweise wird wiederum Dreisatz genannt, da in drei Schritten (Sätzen) das Ergebnis berechnet wird. Die Kursleitung verwendet im Weiteren diese Darstellung oder zeigt in Anlehnung an die Ermittlung der Prozentwerte im Beispiel mit dem Fahrrad für 598,00 € (s. Abschnitt 17.5.3) folgendes Tafelbild:

Prozentwert	250	1	140
Prozentsatz	100 %		

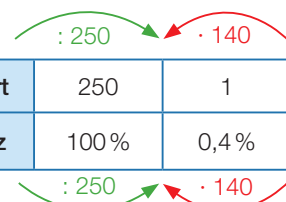
Abbildung 17.5-23: Prozentsätze mittels Zuordnung für einen LKW und 140 LKW ermitteln

Die Teilnehmer/-innen werden gefragt, ob jemand einen Lösungsweg kennt. Dieser sollte an der Tafel notiert werden, möglichst mit Bezug zu der Darstellung der Teilnehmer/-innen oder zur obigen Abbildung. Wenn die Teilnehmer/-innen den Weg nicht kennen, erläutert die Kursleitung folgende Vorgehensweise:

Um den Prozentsatz für 140 LKW ermitteln zu können, gilt es zunächst, den Prozentsatz für einen LKW zu bestimmen. Ein LKW ist der 250ste Teil von 250, der entsprechende Prozentsatz wird nun ebenfalls mittels Division von 100 % durch 250 ermittelt: $100\% : 250 = 0,4\%$.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Im zweiten Schritt ist mit 140 zu multiplizieren, um schließlich den gesuchten Prozentsatz für 140 LKW zu erhalten: $0,4\% \cdot 140 = 56\%$:



Prozentwert	250	1	140
Procentsatz	100%	0,4%	56%

Abbildung 17.5-24: Lösung Prozentsätze mittels Zuordnung für einen LKW und 140 LKW

Obige Zuordnungsschritte sind in der Formel zur Bestimmung des Prozentsatzes p zusammengefasst:

$$p = \frac{100\%}{GW} \cdot PW.$$

Die Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$p = \frac{100\% \cdot PW}{GW} \text{ oder als } p = \frac{PW}{GW} \cdot 100\%.$$

Diese Formel enthält die Schritte des Dreisatzes. Während im Dreisatz die Berechnung in drei Schritten erfolgt, werden in der Formel zeitgleich die bekannten Größen eingesetzt, um die gesuchte Größe zu ermitteln.

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer/-innen, ob sie diese Formel kennen oder bisher den Prozentsatz mit einer anderen Formel berechnet haben. Sie notiert diese nebeneinander an der Tafel. Gegebenenfalls können die Varianten verglichen und diskutiert werden. Sinnvoll kann es auch sein, mithilfe der unterschiedlichen Formeln die Lösung für die Aufgabe mit den LKW zu berechnen. Falls die folgende Variante nicht von den Teilnehmern und Teilnehmerinnen genannt wird, erläutert die Kursleitung:

Beispiel: LKW

$GW = 250$, $PW = 140$.

Wenn der Prozentsatz für den Grundwert $250 = 100\%$ ist, dann lässt sich der Prozentsatz für einen LKW mittels Division durch 250 bestimmen:

$$p = \frac{100\%}{250} = 0,4\%.$$

Wenn für 140 LKW der Prozentsatz gesucht wird, ist der Prozentsatz für einen LKW mit 140 zu multiplizieren:

$$0,4\% \cdot 140 = 56\%.$$

Nun konnte der Prozentsatz für die defekten LKW im Verhältnis zu allen geprüften Fahrzeugen ermittelt werden. Dabei war die Anzahl der fahrtüchtigen LKW nicht relevant.

Bleibt noch die zweite Frage zu beantworten:

Wie hoch ist der Prozentanteil der fahrtüchtigen LKW in der Verkehrskontrolle?

Wie würden Sie diese Frage beantworten und rechnerisch lösen?

Die Kursleitung sammelt die Ideen an der Tafel und diskutiert diese in der Gruppe bzgl. der Unterschiede und Vorteilhaftigkeit. In der folgenden Unterrichtssequenz wird diese Frage beantwortet.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5.5 Vortrag – Die Summe aller Teile ist das Ganze

Durchführung und didaktische Hinweise

Wie in **Abschnitt 5.1** *Gesamtes und Teile* erläutert, lassen sich Zahlen in Teile zerlegen. Werden alle Teile wieder zusammengefügt, müssen sie wieder das Ganze ergeben. Das gilt gleichermaßen für die Prozentrechnung.

Im Beispiel mit den LKW wird der Grundwert von 250 LKW in zwei Teile à 140 LKW und 110 LKW zerlegt. Diese Teile ergeben zusammengefügt wieder 250 LKW: $140 + 110 = 250$. Zerlegt man gleichermaßen die Prozentsätze in Teile, so müssen auch diese zusammen wieder den Prozentsatz für das Ganze, also 100 %, ergeben. Das wurde bereits deutlich in den **Abbildungen 21** und **22**. Dort wurde die Beispielaufgabe mit den LKW im Hunderterfeld dargestellt: hundert Teilmengen zu je 1 % und 100 Teilmengen zu je 2,5 LKW.

Die analoge Darstellung mithilfe der Zahlzerlegung mit zwei Teilmengen sieht wie folgt aus:



Abbildung 17.5-25: Lösung Prozentsätze mittels Zahlzerlegung für einen LKW und 140 LKW

Da die Summe aller Prozentsätze stets 100 % ergeben muss, muss für dieses Beispiel also gelten:
 $56\% + \underline{\hspace{1cm}}\% = 100\%$.

Die Lösung ergibt sich aus der Differenz der beiden Prozentsätze:
 $100\% - 56\% = 44\%$.

Der komplexere Lösungsweg wäre der über die Ermittlung des Prozentsatzes mithilfe der Gleichung

$$p = \frac{PW}{GW} \cdot 100\%.$$

Werden die Werte 110 für den Anteil der LKW ohne Mängel ($250 - 140 = 110$) und 250 für die Gesamtmenge der LKW eingesetzt, ergibt sich:

$$p = \frac{110}{250} \cdot 100\% \quad p = 0,44 \cdot 100\% = 44\%.$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Rückschau

Zusammenfassend können folgende verallgemeinerte Rechenwege für die Ermittlung von Prozentsätzen festgehalten werden:

Dreisatz:

$$\begin{array}{rcl}
 & 250 \text{ LKW} = 100 \% & \\
 : 250 & \curvearrowright & : 250 \\
 & 1 \text{ LKW} = 0,4 \% & \\
 \cdot 110 & \curvearrowright & \cdot 110 \\
 & 110 \text{ LKW} = 44 \% &
 \end{array}$$

Formel:

$$p = \frac{PW}{GW} \cdot 100 \%$$

$$p = \frac{110}{250} \cdot 100 \% = 44 \%$$

Die Kursleitung lässt die Teilnehmer/-innen zur Übung nun andere Zahlen für die Gesamtmenge und die Menge der defekten LKW nennen. Alternativ können die Teilnehmer/-innen auch die Aufgabe mit der Zeitung⁷ rechnen. Hier wären zunächst wieder Fragen zu formulieren, Skizzen zur Veranschaulichung der Situation anzufertigen, um schließlich geeignete Rechenwege zu finden.

Die Lösungen und die verwendeten Wege werden nach ca. 15 bis 20 Minuten miteinander verglichen und diskutiert.

Weitere Übungsaufgaben zur Ermittlung des Prozentsatzes können der Sammlung der von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern zusammengetragenen Aufgaben zu Beginn des **Abschnittes 17.5** oder **Aufgabenblatt 17.5 c** entnommen werden.

⁷ Siehe Aufgabenbeispiele zu Beginn der Mathekonzferenz (Abschnitt 17.5.4).

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5.6 Mathekonferenz und Kursgespräch – Grundwert für bequeme Prozentsätze

Durchführung und didaktische Hinweise

Immer wieder tauchen im Alltag Situationen auf, in denen der Grundwert GW, also das Ganze oder die Gesamtmenge, nicht angegeben ist.

Kennen Sie Situationen, in denen der Grundwert gesucht wird?

Die Kursleitung sammelt die Beispiele an der Tafel oder lässt die Teilnehmer/-innen die Beispiele anschreiben und/oder nennt die folgenden (ggf. ergänzend):

Beispiele:

Rabatt: Es wird angegeben, wie groß der Rabatt in Prozent und der neue Preis ist, z. B. 20 % Rabatt, jetzt nur noch 68,00 €/25,00 €.

Gewinn: Bei einer Tombola sollen 70 % aller Lose Gewinne sein, es gibt 364 Gewinne.

Statistiken:

- Es sind zurzeit 39 Mitarbeiter krank, das sind 26 %.
- Im Kino waren in Saal 1 bei der Abendvorstellung 64 Plätze belegt, das sind 40 %.
- Bei der Wahl für die Stadtverordnetenversammlung betrug die Beteiligung 52 %. Es haben 79.560 Wähler/-innen eine gültige Stimme abgegeben.

Lebensmittelkennzeichnungen: Die Deklaration der Zusammensetzung enthält oft Angaben des Tagesbedarfs eines „durchschnittlichen“ Erwachsenen in Prozent, z. B. für ein Glas koffeinhaltiger Limonade oder für Schokolade:

Nährwertangaben je:			
	100 ml	200 ml	(%*)
Brennwert:	180 kJ	450 kJ	
	42 kcal	105 kcal	(5 %)
Fett	0 g	0 g	(0 %)
davon gesättigte Fettsäuren	0 g	0 g	(0 %)
Kohlenhydrate:	10,6 g	27 g	(10 %)
davon Zucker	10,6 g	27 g	(29 %)
Eiweiß	0 g	0 g	(0 %)
Salz:	0 g	0 g	(0 %)

* Referenzmenge für einen durchschnittlichen Erwachsenen (8400 kJ/2000kcal).

	100 g	16,7 g	%*/16,7 g
davon Zucker	47 g	7,9 g	9 %
Ballaststoffe	3,3 g	0,6 g	–
Eiweiß	8,1 g	1,3 g	3 %
Salz	0,30 g	0,05 g	1 %

Abbildung 17.5-26: Prozentangaben in Nahrungsmitteln zum Tagesbedarf eines „durchschnittlichen“ Erwachsenen

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Dabei stellt sich z. B. die Frage: Wie viel Schokolade und/oder Limonade darf ein durchschnittlicher Erwachsener zu sich nehmen, wenn die Menge des empfohlenen Tagesbedarfes an Zucker für einen durchschnittlichen Erwachsenen nicht überschritten werden soll.

Die Frage nach dem Grundwert ist die Frage, wie groß die Gesamtmenge ist, z. B. von Losen oder Mitarbeitern oder des empfohlenen Tagesbedarfes an Zucker oder wie hoch der Preis vorher war (bei Rabatten). Die Kursleitung bittet die Teilnehmer/-innen, ein Beispiel aus der Aufgabenauswahl zu wählen oder gibt selbst das folgende Beispiel vor. Die Vorgehensweise kann entsprechend auf andere Beispiele übertragen werden.

Beispiel:

Eine Jacke wird im Schlussverkauf angepriesen mit einer Preissenkung von 10 % und einer Ersparnis von 30,00 €. Um zu ermitteln, wie viel die Jacke ursprünglich gekostet hat, um also den Grundwert zu finden, ist es hilfreich, sich die gegebenen Informationen zunächst zu veranschaulichen.

Wie würden Sie diese Veranschaulichung vornehmen?

Die Teilnehmer/-innen werden eingeladen, ihre Ideen an der Tafel zu notieren. Die Kursleitung unterstützt ggf. anhand der verbalen Beschreibungen. Mögliche Darstellungen können folgende sein:

Da Prozent übersetzt auch „je Hundert“ bedeutet, bietet sich auch hier die grafische Darstellung in einem Hunderterfeld an.

1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	} 10 % Das Ganze 100 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	

Abbildung 17.5-27: Darstellung eines Rabattes von 10 % im Hunderterfeld

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Mit den entsprechenden Prozentwerten je 1 %:

3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	10 % = 30,00 € Das Ganze (100 %)			
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €				
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €				
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €				
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €				
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €				
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €				
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €				
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €				
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €				
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €				

Abbildung 17.5-28: Darstellung eines Rabattes von 10 % mit einem Prozentwert von 30,00 € im Hunderterfeld

In der folgenden Darstellung wurden 10 Zehner markiert, da 10 % der zehnte Teil des Ganzen sind:

10 % = 30,00 €	100 % = €	
10 %		
10 %		
10 %		
10 %		
10 %		
10 %		
10 %		
10 %		
10 %		

Abbildung 17.5-29: Darstellung eines Rabattes von 10 % im Wert von 30,00 € im Hunderterfeld

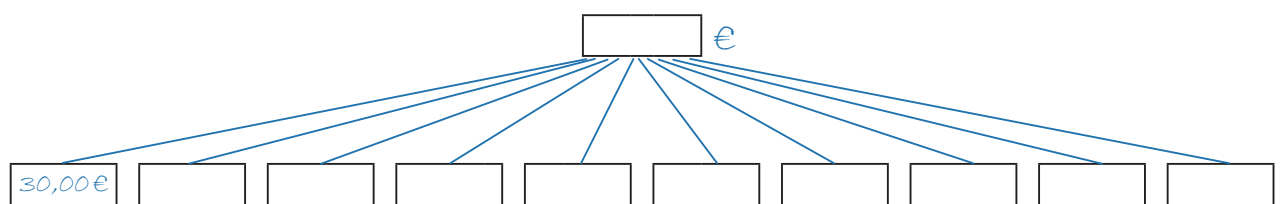


Abbildung 17.5-30: Darstellung eines Rabattes von 10 % im Wert von 30,00 € als Zahlzerlegung

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

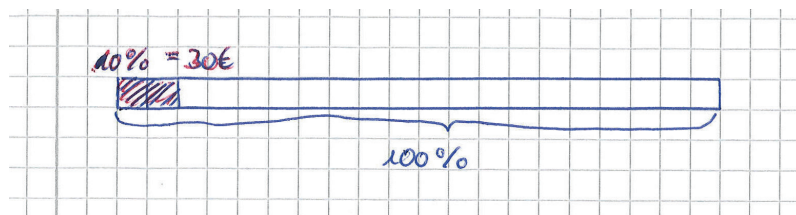


Abbildung 17.5-31: Darstellung eines Rabattes von 10 % als Balken

$$10\% = 30,00\text{€}$$

$$100\% = \boxed{}\text{€}$$

Abbildung 17.5-32: Darstellung eines Rabattes von 10 % im Wert von 30,00€ als Zuordnung

In den Abbildungen 27 bis 30 wird ersichtlich, aus wie vielen Anteilen von jeweils 10 % das Ganze besteht: Es sind zehn gleich große Teile. Damit wird deutlich, dass eine Verzehnfachung des Prozentwertes von 30,00€ zum Preis vor der Preissenkung (Grundwert) führt:

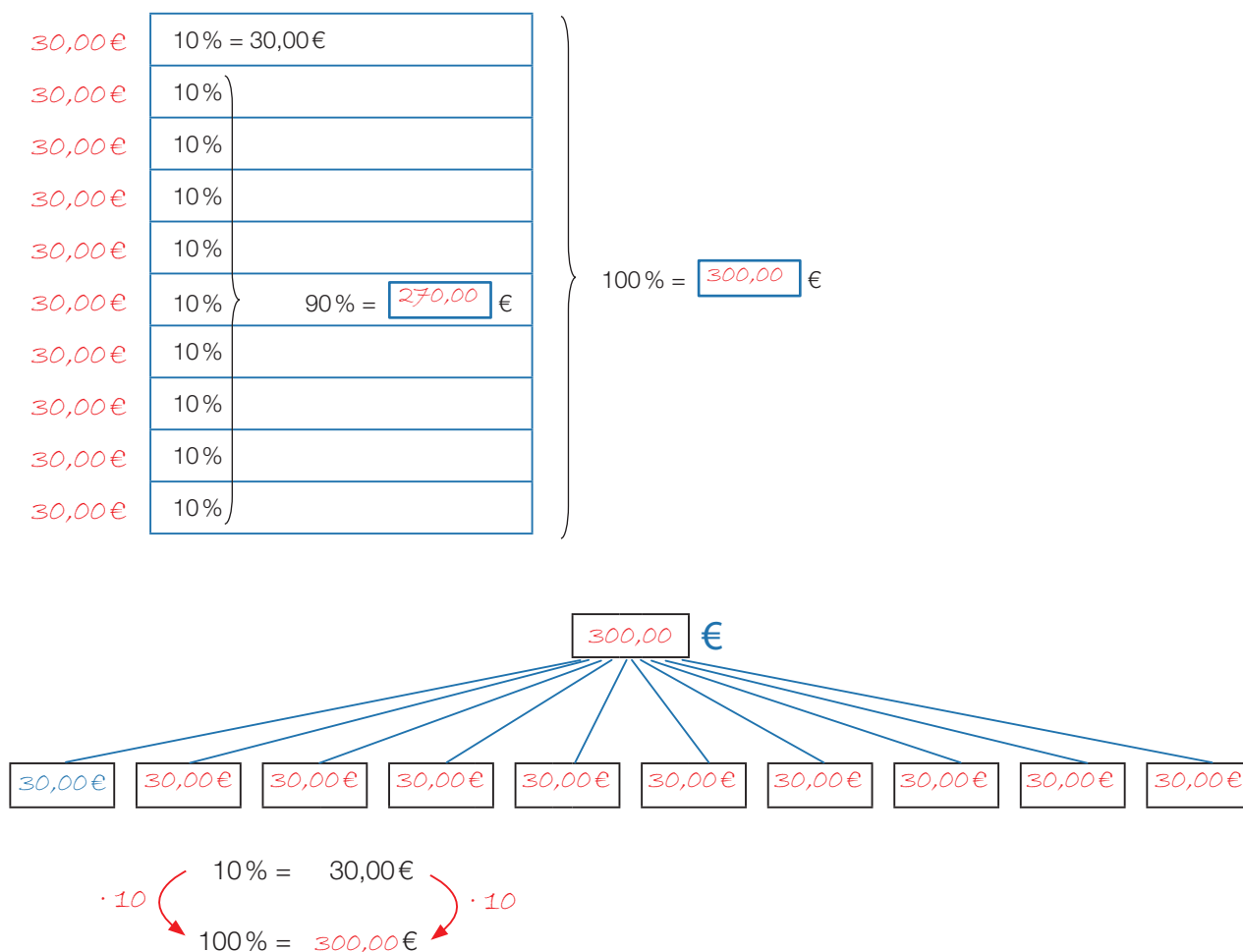


Abbildung 17.5-33: Ermittlung des Grundwertes von 10 % Rabatt im Wert von 30,00€ mit Lösungen

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Da 10 % der zehnte Teil vom Ganzen ist, muss auch der Geldbetrag des Rabattes dem zehnten Teil vom Ganzen entsprechen. Und wenn 30,00 € der zehnte Teil ist, dann sind die anderen neun Teile auch jeweils 30,00 € wert, da beim Dividieren die Teilmengen immer gleich groß sind. Damit lässt sich der Grundwert durch Multiplikation von $30,00\text{ €} \cdot 10 = 300,00\text{ €}$ bestimmen. Das lässt sich auch im Hunderterfeld veranschaulichen. Wird **Abbildung 17.5-30** in zehn Zehnern zusammengefasst, wird deutlich:

										10 % = 30,00 €
										10 % = 30,00 €
										10 % = 30,00 €
										10 % = 30,00 €
										10 % = 30,00 €
										10 % = 30,00 €
										10 % = 30,00 €
										10 % = 30,00 €
										10 % = 30,00 €
										10 % = 30,00 €

Abbildung 17.5-34: Darstellung von $100\% = 10 \cdot 30,00\text{ €}$

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer/-innen nach anderen Beispielen für bequeme Prozentsätze oder notiert die Prozentsätze 2 %, 20 %, 25 % und 50 %, evtl. 75 %, an der Tafel, falls diese nicht genannt werden.

Dann werden Situationen aus dem Alltag der Teilnehmer/-innen gesucht, um daraus mit den bequemen Prozentsätzen Aufgaben zu formulieren, die nun als Übungsaufgaben gelöst werden. Wahlweise wird das gleiche Beispiel mit anderen Prozentsätzen verwendet. Je nach Kenntnissen der Teilnehmer/-innen kann die Bearbeitung in der Gruppe oder als Einzelarbeit erfolgen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.5.7 Vortrag und Kursgespräch – Formel zur Bestimmung des Grundwertes

Durchführung und didaktische Hinweise

Bei dem Beispiel mit 10 % Rabatt und einem Prozentwert von 30,00 € handelt es sich um einen bequemen Prozentsatz. Da 10 % der zehnte Teil vom Gesamten 100 % ist, lässt sich der Prozentwert von 30,00 € verzehnfachen, um den Grundwert zu bestimmen. Doch wie berechnet sich der Wert mittels Formel und bei unbequemen Prozentwerten?

Zur übersichtlichen Darstellung der angegebenen Werte empfiehlt sich wieder die Darstellung mithilfe der Zuordnung:

Prozentsatz	10 %	1 %	100 %
Prozentwert	30,00 €		

Abbildung 17.5-35: Zuordnung Prozentwert von 30,00 € zum Prozentsatz 10 %

Der Prozentwert zu einem Prozentsatz von 100 % entspricht dem Grundwert. Die Kursleitung fragt die Teilnehmer/-innen nach einem Lösungsweg. Falls niemand die Antwort weiß, zeigt sie nachfolgendes Tafelbild sofort, sonst im Zuge der Lösung durch die Teilnehmer/-innen:

	$\div 10$	$\cdot 100$	
Prozentsatz	10 %	1 %	100 %
Prozentwert	30,00 €	3,00 €	300,00 €
	$\div 10$	$\cdot 100$	

Abbildung 17.5-36: Zuordnung Prozentwert von 30,00 € zum Prozentsatz von 10 % – Lösung

Im ersten Schritt wurde der Prozentwert für den Prozentsatz $p = 1\%$ ermittelt, indem 10 % durch zehn geteilt wurde. Der alte Prozentwert PW beträgt 30,00 €. Wird dieser Betrag durch zehn geteilt, ergibt sich ein neuer Prozentwert von 3,00 € zu einem Prozentsatz von 1 %, formell ausgedrückt:

Im zweiten Schritt wird der Prozentsatz $p = 1\%$ mit 100 multipliziert, um den Grundwert, also den Preis vor der Preissenkung, zu bestimmen. Der neue Prozentwert muss ebenfalls mit 100 multipliziert werden. So erhält man:

$$GW = \frac{PW}{p} \cdot 100 = \frac{30,00 \text{ €}}{10} \cdot 100 = 300,00 \text{ €}.$$

Hier ist PW der in der Aufgabenstellung genannte Prozentwert 30,00 €.

Der Prozentsatz p wird stets in % angegeben und ist gleichbedeutend mit $\frac{p}{100}$. Zum Beispiel sei $p = 2\%$. Dann ist 2 % gleich $\frac{2}{100}$ oder auch 0,02. Da dieser Wert in der Formel wieder mit 100 multipliziert wird, lässt sich die Formel vereinfacht schreiben als:

$$GW = \frac{PW}{p}.$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Dabei ist für p der Wert als Dezimalzahl zu verwenden. Im Beispiel:

$$GW = \frac{PW}{p} = \frac{30,00\text{€}}{0,1} = 300,00\text{€}.$$

Die Kursleitung fragt weiter:

Wie ist es mit einem Prozentsatz von $p = 15\%$?

Kann jemand den Grundwert hierfür ausrechnen, wenn der Rabatt jetzt 15% beträgt und die Jacke 30,00€ günstiger ist als vorher?

Falls es die Teilnehmer/-innen nicht lösen (können), präsentiert die Kursleitung folgende Lösungswege:

Lösungen

$$\begin{array}{lcl}
 : 15 & \curvearrowright & 15\% = 30,00\text{€} \\
 & & \downarrow \\
 & & 1\% = 2,00\text{€} \\
 \cdot 100 & \curvearrowright & 100\% = 200,00\text{€}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lcl}
 & & : 15 \\
 & & \downarrow \\
 & & \cdot 100
 \end{array}$$

Der Grundwert für einen Prozentwert von 30,00€ und einem Prozentsatz von 15 % beträgt 200,00€. Die Jacke hat demnach vorher 200,00€ gekostet.

Formel: $GW = \frac{PW}{p} \cdot 100$ $GW = \frac{30,00\text{€}}{15} \cdot 100 = 2,00\text{€} \cdot 100 = 200,00\text{€}.$

Weitere Übungsaufgaben können der Sammlung der von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern zusammengetragenen Aufgaben zu Beginn dieses Unterkapitels (**Abschnitt 17.5**) oder **Aufgabenblatt 17.5b** entnommen werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.5.8 Mathekonferenz – Grundwert für nicht bequeme Prozentsätze bestimmen

Durchführung und didaktische Hinweise

Wie ist die Vorgehensweise mit weniger leichten Prozentsätzen, zum Beispiel bei einem Rabatt von 8 % mit einem Prozentwert von 15,00 €, für den der Grundwert zu ermitteln ist?

Hat jemand von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern eine Idee, diesen Sachverhalt darzustellen?

Welche Darstellungsform bietet sich hier an?

Die Kursleitung notiert die Vorschläge der Teilnehmer/-innen an der Tafel oder lässt die Teilnehmer/-innen die Vorschläge anzeichnen und diskutiert diese bzgl. ihrer Vorteilhaftigkeit. Werden keine Darstellungen/ Lösungswege gefunden, zeigt die Kursleitung nachfolgende Darstellungen:

Darstellung als Zuordnung/Dreisatz in einer Tabelle:

		$\xrightarrow{:8}$	$\xrightarrow{\cdot 100}$
Prozentsatz	8 %	1 %	100 %
Prozentwert	15,00 €		
		$\xrightarrow{:8}$	$\xrightarrow{\cdot 100}$

Abbildung 17.5-37: Zuordnung Prozentwert von 15,00 € zum Prozentsatz von 8 %

$$\begin{array}{lcl}
 8 \% = 15,00 \text{ €} & & \\
 : 8 & \curvearrowright & : 8 \\
 1 \% = \underline{\hspace{1cm}} \text{ €} & & \\
 \cdot 100 & \curvearrowright & \cdot 100 \\
 100 \% = \underline{\hspace{1cm}} \text{ €} & &
 \end{array}$$

In beiden Fällen ergibt sich als Lösung ein Prozentwert für 1 % in Höhe von 1,875 €⁸.

Wer kann nun den Grundwert ermitteln? Was ist zu rechnen?

Wird die Lösung nicht genannt, löst die Kursleitung: Für die Bestimmung des Grundwertes muss der Prozentwert für 1 % mit 100 multipliziert werden:

$$1,875 \text{ €} \cdot 100 = 187,50 \text{ €}.$$

⁸ Hier wird bewusst die 3. Stelle nach dem Komma mit notiert, obwohl es keine kleinere Währungseinheit als 1 ct gibt. Der Wert wird im nächsten Schritt mit 100 multipliziert und ergibt dann einen realen Prozentwert. Dadurch entsteht kein Rundungsfehler. Würde man hier runden, ergäben sich 1,88 €, mit 100 multipliziert ergäbe das wiederum einen Prozentwert von 188,00 €, also eine Rundungsdifferenz von immerhin 50 ct.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Wer kann den gesuchten Grundwert mithilfe der Formel ermitteln?
Wer erinnert sich an die Formel?

Die Kursleitung notiert die Formel $GW = \frac{PW}{p} \cdot 100$ und fragt nach den Werten für PW und p.

Lösungen

PW = 15,00€ und p = 8% oder $\frac{8}{100}$. Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$GW = \frac{15,00\text{€}}{8} \cdot 100 = 1,875\text{€} \cdot 100 = 187,50\text{€}$$

Ein weiteres Beispiel: Ein Preisnachlass von 16% entspricht 42,00€. Hat jemand eine Idee, wie hierfür der Grundwert auf ähnliche Weise gefunden werden kann?

Eine Form der Darstellung ist die Zuordnung:

$$16\% = 42,00\text{€}.$$

Beide Werte durch 16 dividiert, ergibt:

$$1\% = \frac{42,00\text{€}}{16} = 2,625\text{€}.$$

Da der Grundwert oder das Ganze, also 100%, gesucht ist, sind nun beide Werte mit 100 zu multiplizieren:

$$100\% = 2,625\text{€} \cdot 100 = 262,50\text{€}.$$

Auch hier ist die direkte Anwendung der Formel für den Grundwert möglich:

Die Verwendung der Formel $GW = \frac{PW}{p} \cdot 100$ ergibt:

$$GW = \frac{42,00\text{€}}{16} \cdot 100 = 2,625\text{€} \cdot 100 = 262,50\text{€}.$$

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer/-innen nach weiteren unbequemen Prozentsätzen oder nennt selbst welche (z. B. 31 %, 47 % oder 95 %) und lässt die Gruppe gemeinsam Darstellungsformen und Lösungswege finden.

Weitere Übungsaufgaben zur Ermittlung des Grundwertes können der Sammlung der von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern zusammengetragenen Aufgaben zu Beginn dieses Unterkapitels (Abschnitt 17.5) oder **Aufgabenblatt 17.5 d** (Bearbeitungsdauer je nach Vorkenntnissen 30 bis 90 Minuten) entnommen werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.5.9 Vortrag – Vermehrte und verminderte Grundwerte

Durchführung und didaktische Hinweise

In vielen Situationen steigen oder sinken Preise oder Anteile. Wird nach vermehrten oder verminderten Grundwerten⁹ gefragt, dann werden die Werte nach der Erhöhung oder Verringerung gesucht; oder die Werte nach/ vor der Preisveränderung sind bekannt und es wird nach dem Prozentsatz für die Veränderung gesucht. Zu den von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern oder der Kursleitung nachfolgend zu nennenden Beispielen bietet es sich an, die Teilnehmer/-innen zu befragen, ob sie jeweils den gesuchten Wert benennen und ihre Entscheidung begründen können. Für die Kursleitung sind die Begriffe in Klammern hinter den Beispielen genannt:

Beispiele:

- Der **Energiepreis steigt** um einen Prozentsatz und es wird der neue Preis gesucht (GW_{vermehrt}).
- Das **Porto steigt** um einen bestimmten Cent-Betrag, der vermehrte Grundwert ist bekannt, gesucht wird der Prozentsatz der Preissteigerung.
- Eine **Handwerker-Rechnung** enthält die Option, den Rechnungsbetrag mit 3 % Skonto binnen 7 Tagen oder 2 % **Skonto** zwischen 7 und 14 Tagen zu begleichen, gesucht wird der um das Skonto verminderte Grundwert ($GW_{\text{vermindert}}$).
- Nach einer **Preissenkung** von 10 % kostet ein Laptop noch 380,00 €, es wird der Preis vorher gesucht, also der Grundwert, wohingegen der verminderte Grundwert bekannt ist.
- **Rabattaktion:** „Wir schenken Ihnen die MwSt.“

AB 17.5e

Einige Beispiele wurden in der Gruppe eingangs gesammelt, weitere Beispiele enthält das **Aufgabenblatt 17.5e** (Bearbeitungsdauer je nach Vorkenntnissen ca. 1 bis 2 Stunden).

Die Teilnehmer/-innen oder die Kursleitung wählen ein Beispiel aus. Nachfolgend werden anhand von ausgesuchten Beispielen

- Grundwerte nach der Veränderung ($GW_{\text{vermindert}}$ und GW_{vermehrt}),
- Prozentsätze einer Veränderung,
- Grundwerte vor der Veränderung

bestimmt. Die Vorgehensweisen lassen sich auf andere Beispiele übertragen.

⁹ Die Begriffe sind für manche Teilnehmer/-innen nicht unmittelbar verständlich. Man kann sich Beispiele anschauen, und dann sollen die Teilnehmer/-innen Begriffsvorschläge machen. Die Kursleitung stellt zu den Beispielen die üblichen Begriffe vor. Die Begriffe der Teilnehmer/-innen können dann im Kurs eine Weile parallel zu den üblichen Begriffen genutzt werden.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5.10 Mathekonferenz – Den vermehrten Grundwert bestimmen

Durchführung und didaktische Hinweise

Beispiel:

Ihr Stromanbieter hat Ihnen eine Preiserhöhung angekündigt. Der Preis soll sich von 26 Cent je Kilowattstunde (abgekürzt: ct/kWh) um 10 % erhöhen. Wie hoch ist der Preis nach der Erhöhung?

Wie würden Sie diesen Sachverhalt skizzieren bzw. graphisch veranschaulichen?

Die Kursleitung sammelt die Vorschläge an der Tafel bzw. die Teilnehmer/-innen zeichnen sie direkt an und diskutieren diese bzgl. ihrer Eignung, daraus einen Lösungsweg abzuleiten.

Wenn die folgenden Darstellungsmöglichkeiten nicht genannt werden, präsentiert die Kursleitung die Tafelbilder:

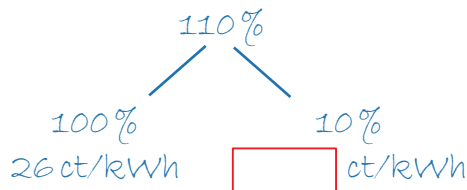


Abbildung 17.5-38: Darstellung Preiserhöhung für Strom mit Zahlzerlegung

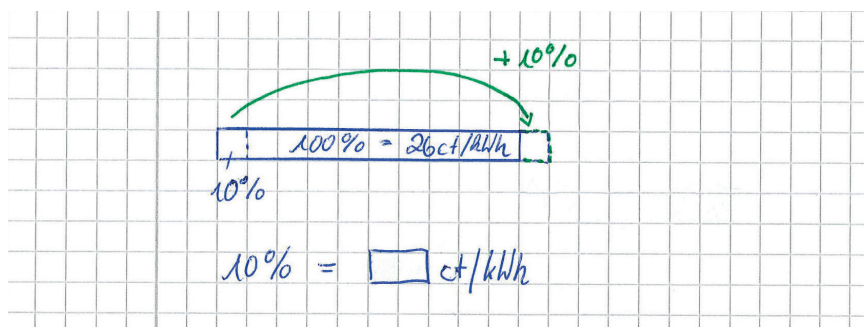


Abbildung 17.5-39: Darstellung Preiserhöhung für Strom im Balkendiagramm

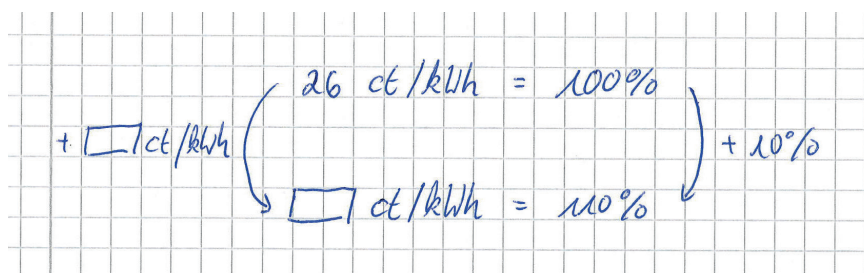


Abbildung 17.5-40: Darstellung Preiserhöhung für Strom als Zuordnung

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Welche der Darstellungen bevorzugen Sie für die Ermittlung des vermehrten Grundwertes und warum?

Wie würden Sie nun vorgehen zur Beantwortung der Frage, wie hoch der neue Strompreis sein wird?

Die Kursleitung demonstriert folgende Lösungswege, wenn diese nicht von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern genannt werden (können):

Lösungen

Mithilfe der Zahlzerlegung:

Hier wird deutlich, dass zunächst der Prozentwert für die prozentuale Erhöhung ermittelt werden muss.

Da

26 ct/kWh = 100 %, ergibt sich der zehnte Teil davon mittels Division des Grundwertes durch zehn:

26 ct/kWh : 10 = 2,6 ct/kWh.

Die Kosten steigen um 2,6 ct/kWh und werden zum Grundwert addiert:

26 ct/kWh + 2,6 ct/kWh = 28,6 ct/kWh.

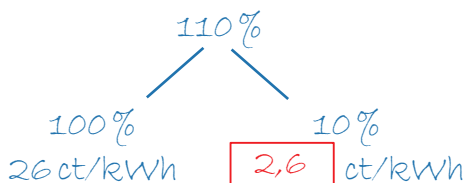


Abbildung 17.5-41: Darstellung Preiserhöhung für Strom mit Zahlzerlegung – Lösung

Mithilfe des Balkendiagramms:

Der Rechenweg ist derselbe: zunächst den Wert für den Anteil von 10 % ermitteln und dann beide Werte addieren.

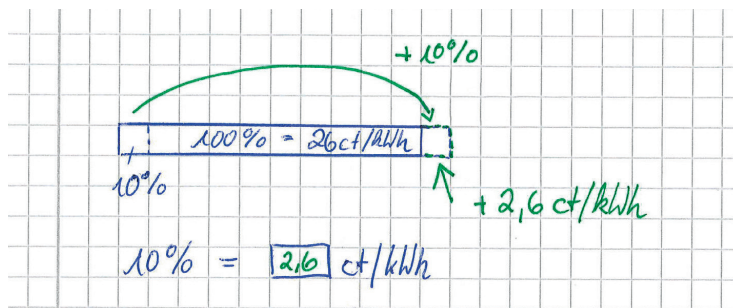


Abbildung 17.5-42: Darstellung Preiserhöhung für Strom im Balkendiagramm – Lösung

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Mittels Zuordnung/Dreisatz:

Bei 10 % handelt es sich um einen bequemen Prozentsatz. Daher kann – wer dies erkennt – 100 % durch 10 dividieren und im nächsten Schritt das Ergebnis mit 11 multiplizieren, da 110 das 11-Fache von 10 ist:

28,6	{	: 10	26 ct/kWh = 100 %	}	Summe = 110 %
ct/kWh			2,6 ct/kWh = 10 %		
			28,6 ct/kWh = 110 %		

Abbildung 17.5-43: Preiserhöhung für Strom als Zuordnung – Lösung

Hier kann wegen der einfachen Zahlen (bequemer Prozentsatz) die Lösung auch mittels Zweisatz erfolgen, indem direkt der Wert für 100 % mit 1,1 multipliziert wird, denn $\frac{110}{100} = 1,1$.

Eine andere mögliche Lösungsvariante:

Die Werte oberhalb der gestrichelten Linie sind die beiden Prozentwerte für jeweils 100 % und 10 %. Wer erkennt, dass dies eine Zerlegung des vermehrten Grundwertes GW_{vermehrt} ist, kann die entsprechenden Ergebnisse für die Stromkosten addieren und erhält ebenfalls die gesuchte Lösung.

Ein weiterer Weg führt über die Formel $GW = \frac{PW}{p} \cdot 100$ zum Ziel. Hierbei ist Folgendes zu beachten:

- Der Prozentwert PW entspricht dem anfänglichen Preis von $26 \frac{\text{ct}}{\text{kWh}}$.
- Für p ist der Prozentsatz für den anfänglichen Grundwert einzusetzen, also 100 %.
- Bisher wurde mit 100 % multipliziert, weil das der Prozentsatz für den Grundwert war. Nun ist der Grundwert um 10 % gestiegen, daher ist auch der entsprechende Prozentsatz um 10 % zu erhöhen, also wird mit

$$100\% + 10\% = 110\% \text{ multipliziert: } GW_{\text{vermehrt}} = \frac{26 \frac{\text{ct}}{\text{kWh}}}{100} \cdot 110.$$

Wer über die Kenntnisse zur Umrechnung von Brüchen in Dezimalzahlen verfügt, weiß, dass $110 : 100 = 1,1$ gilt, und kann schließlich leichter rechnen: $26 \frac{\text{ct}}{\text{kWh}} \cdot 1,1 = 28,6 \frac{\text{ct}}{\text{kWh}}$.

Auf diese Art und Weise lässt sich beispielsweise auch ein um die MwSt. erhöhter Nettobetrag, also der Bruttobetrag, leicht ermitteln. Sei z. B. der Preis eines Produktes 80,00 € netto, dann lässt sich der Bruttopreis wie folgt ermitteln:

bei einer MwSt. von 19 %: $80,00 € \cdot 1,19 = 95,20 €$,

bei einer MwSt. von 7 %: $80,00 € \cdot 1,07 = 85,60 €$.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.5.11 Mathekonferenz – Den verminderten Grundwert bestimmen

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung verteilt **Aufgabenblatt 17.5e** oder wählt aus diesem Aufgabenblatt Aufgabe 4 aus.

Beispiel:

Sie mussten Ihren Wasserhahn in der Küche vom Fachmann reparieren lassen und erhalten die Rechnung des Handwerkers mit einem Rechnungsbetrag von 126,80 € inkl. Mehrwertsteuer (nachfolgend: MwSt.). Wenn Sie den Rechnungsbetrag innerhalb von 7 Tagen überweisen, erhalten Sie Skonto (Preisnachlass) von 3 %, bei Zahlung innerhalb von 8 bis 14 Tagen immerhin noch 2 % Skonto. Wie viel müssen Sie in beiden Fällen bezahlen?

Wie würden Sie diesen Sachverhalt skizzieren bzw. graphisch veranschaulichen?

Die Kursleitung sammelt die Vorschläge an der Tafel bzw. die Teilnehmer/-innen zeichnen sie direkt an und diskutieren diese bzgl. ihrer Eignung, daraus einen Lösungsweg abzuleiten. Wenn die folgenden Darstellungsmöglichkeiten nicht genannt werden, präsentiert die Kursleitung die Tafelbilder:

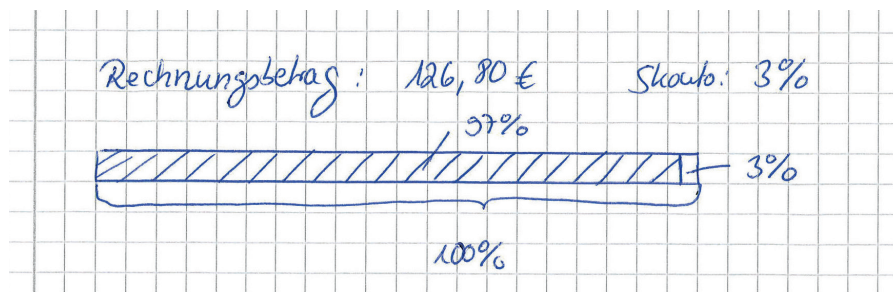


Abbildung 17.5-44: Darstellung Skonto von 3 % im Balkendiagramm

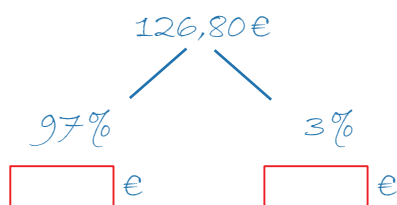


Abbildung 17.5-45: Darstellung Skonto von 3 % als Zahlzerlegung

3% = _____ €

97% = _____ €

100% = 126,80€

$100\% = 126,80\text{€}$
 $1\% = \underline{\hspace{2cm}}\text{€}$
 $97\% = \underline{\hspace{2cm}}\text{€}$

Welche der Darstellungen bevorzugen Sie für die Ermittlung des verminderten Grundwertes?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Wie gehen Sie nun vor zur Beantwortung der Frage, wie viel Sie dem Handwerker überweisen müssen?

Hat jemand eine andere Idee zur Ermittlung des gesuchten Grundwertes?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Wenn niemand den Zusammenhang erkennt, dass eine Verringerung vom Ganzen um 0,03 gleichbedeutend ist mit 0,97, nennt die Kursleitung folgenden Weg:

Da der Prozentsatz nach der Minderung noch 0,97 ($100\% - 3\% = 1,0 - 0,03 = 0,97$ oder Umrechnung des Bruches $\frac{97}{100}$ in eine Dezimalzahl: 0,97) ist, ergibt die Multiplikation des Grundwertes mit dem verminderten Prozentsatz ebenfalls das gesuchte Ergebnis:

$$126,80\text{ €} \cdot 0,97 = 123,00\text{ €}.$$

Zuordnung (Dreisatz):

Dieser Rechenweg wird auch bei Betrachtung der Darstellungen mit Zahlzerlegung und Hunderterfeld offensichtlich, da immer erst der Wert für 1 % zu ermitteln ist, um für den nicht bequemen Prozentsatz von 97 % den Prozentwert zu bestimmen:

$$\begin{array}{rcl}
 100\% & = & 126,80\text{ €} \\
 : 100 & \swarrow & \searrow : 100 \\
 1\% & = & \underline{1,268\text{ €}} \\
 \cdot 97 & \swarrow & \searrow \cdot 97 \\
 97\% & = & \underline{123,00\text{ €}}
 \end{array}$$

Abbildung 17.5-48: Ermittlung des verminderten Grundwertes mittels Dreisatz

Bei einem Skonto von 3 % beträgt der Rechnungsbetrag 123,00 €, die Ersparnis beläuft sich auf $126,80\text{ €} \cdot 0,03 = 3,80\text{ €}$.

Wer möchte und kann den Prozentwert für 2 % Skonto bestimmen?
Wie groß ist der Unterschied zwischen 2 % und 3 %?

Falls von den Teilnehmern und Teilnehmerinnen gewünscht, können sie auch versuchen, die letzte Frage in Einzelarbeit zu beantworten. Weitere Übungsaufgaben zum verminderten Grundwert finden sich in **Aufgabenblatt 17.5e**.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5.12 Mathekonferenz – Prozentsatz bei vermehrtem Grundwert bestimmen

Durchführung und didaktische Hinweise

Von den oben genannten Alltagssituationen wird nachfolgend beispielhaft der Ratenkauf näher betrachtet. Die Kursleitung liest das Beispiel vor und notiert die wesentlichen Informationen übersichtlich an der Tafel oder präsentiert folgendes Tafelbild:

Vergleich Tablet-Angebote:

	①	②
Preis Sofortkauf	499,00 €	480,00 €
Ratenanzahl	18	22
Ratenhöhe	29,44 €	25,00 €

Abbildung 17.5-49: Vergleich von zwei Tablet-Angeboten

Mit Absicht ist hier nicht vermerkt, ob es sich um exakt das gleiche Gerät handelt. Im Alltag sind auch verschiedene Geräte im Angebot zu vergleichen – und der Preis bildet nur eine Komponente der Entscheidung.

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer/-innen nach möglichen Fragestellungen zu diesem Sachverhalt und nach Ideen für die Lösung der Fragen. Beides notiert die Kursleitung an der Tafel. Die Fragen und Vorschläge werden diskutiert und verglichen bzgl. ihrer Vorteilhaftigkeit und Nachvollziehbarkeit.

Falls die folgenden Fragen nicht genannt werden, stellt die Kursleitung sie den Teilnehmerinnen und Teilnehmern:

Welches Angebot ist günstiger, wenn man den Geldbetrag für den Sofortkauf nicht zur Verfügung hat? Lässt sich diese Frage ohne Weiteres beantworten? Falls nein: Unter welchen Umständen lässt sich diese Frage beantworten?

Die Kursleitung führt die Teilnehmer/-innen durch die Beantwortung der einzelnen Fragen gemäß nachfolgender Erläuterungen. Dabei empfiehlt es sich, immer wieder die Teilnehmer/-innen in den Lösungsprozess mit Zwischenfragen nach den einzelnen Schritten bzgl. der weiteren Vorgehensweise einzubinden.

Um die erste Frage beantworten zu können, ist zunächst auszurechnen, wie hoch der Grundwert in beiden Angeboten beim Ratenkauf sein wird.

Wer weiß, wie die Gesamtkosten im Fall einer Ratenzahlung bestimmt werden, oder hat jemand eine Idee dazu?

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Lösungen

Dafür ist jeweils die Anzahl der Raten mit den Ratenbeträgen zu multiplizieren:

Angebot 1:

$$18 \cdot 29,44 \text{ €} = 529,92 \text{ €}$$

Angebot 2:

$$22 \cdot 25,00 \text{ €} = 550,00 \text{ €}$$

Nun lässt sich für beide Angebote der Preisunterschied feststellen, der zwischen dem Sofort- und dem Ratenkauf besteht:

Angebot 1:

$$529,92 \text{ €} - 499,00 \text{ €} = 30,92 \text{ €}$$

Angebot 2:

$$550,00 \text{ €} - 480,00 \text{ €} = 70,00 \text{ €}$$

Der Ratenkauf beim zweiten Angebot ist demzufolge teurer (obwohl der Sofortkauf dort billiger ist). Um die Angebote vergleichbar machen zu können, werden zur Beantwortung der zweiten Frage die Prozentsätze der beiden Preissteigerungen benötigt.

Hat jemand eine Idee, wie sich hier die Prozentsätze ermitteln lassen?

Die Zuordnung der Werte für das erste Tablet ergibt:



Prozentwert	499,00 €	1,00 €	529,92 €
Prozentsatz	100 %		



Abbildung 17.5-50: Zuordnung für das erste Tablet

$$100 \% : 499,00 \approx 0,2004 \%^{10}$$

$$0,2004 \% \cdot 529,92 \approx 106,20 \%$$

Der Preis für das erste Tablet wäre also im Fall des Ratenkaufes um 6 % höher als bei Sofortkauf.

Für das zweite Angebot ergibt sich analog folgende Zuordnung:



Prozentwert	480,00 €	1,00 €	550,00 €
Prozentsatz	100 %		



Abbildung 17.5-51: Zuordnung für das zweite Tablet

¹⁰ Hier und im weiteren Verlauf der Bestimmung der gesuchten Werte ergeben sich oft Zahlen mit mehr als zwei Nachkommastellen. Damit stellt sich die Frage, wann auf welche Stelle nach dem Komma gerundet werden soll. Hier wird zunächst mit vier Stellen nach dem Komma weitergerechnet und erst im Ergebnis auf die zweite Stelle nach dem Komma gerundet. Eine Rundung bereits zu Beginn der Berechnung kann teilweise deutliche Unterschiede in den Ergebnissen mit sich bringen. Zur Kennzeichnung von gerundeten Ergebnissen, wird das Zeichen „≈“ verwendet.

Empfehlung an die Kursleitung: Anhand des ersten Beispiels verschiedene Rundungsvarianten mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern berechnen, z. B. schon im ersten Schritt wird auf die zweite Stelle gerundet und mit diesem Zwischenergebnis wird weitergerechnet. Im Vergleich dazu wird dann auf die dritte Stelle gerundet usw. Ein Vergleich aller Ergebnisse zeigt den Teilnehmern und Teilnehmerinnen die Auswirkungen der unterschiedlichen Vorgehensweisen beim Runden. Ziel sollte beim Berechnen stets sein, so nah wie möglich an den exakten Wert ohne Rundung zu gelangen (auch diese Variante sollte mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern gerechnet werden: Die Ergebnisse im Taschenrechner werden zur Berechnung der weiteren Schritte verwendet).

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Die Berechnung ergibt: $100\% : 480 \approx 0,2083\%$ $0,2083\% \cdot 550 \approx 114,57\%$.

Der Preis für das zweite Tablet wäre also im Fall des Ratenkaufes um 14,57 % höher als bei Sofortkauf (gerundet auf zwei Nachkommastellen).

Aus den Berechnungsschritten nach der Zuordnung lässt sich die Formel herleiten.

Die allgemeine Formel für die Bestimmung des Prozentsatzes lautet: $p = \frac{PW}{GW} \cdot 100\%$.

Es wurde im ersten Schritt der volle Prozentsatz 100 % durch den ursprünglichen Grundwert geteilt und im zweiten Schritt dieses Zwischenergebnis mit dem vermehrten Grundwert multipliziert (Zwischenergebnis gerundet auf vier Nachkommastellen):

$$p = \frac{100\%}{480} \cdot 550 \approx 0,2083\% \cdot 550 \approx 114,57\%.$$

Für den Prozentsatz wurde bisher p verwendet.

$$p = \frac{100\%}{GW} \cdot GW_{\text{vermehrt}} \quad \text{oder anders geschrieben} \quad p = \frac{GW_{\text{vermehrt}}}{GW} \cdot 100\% \quad (\text{diese Variante wird nachfolgend verwendet}).$$

Angebot 1:

$$p_1\% = \frac{529,92\text{€}}{499,00\text{€}} \cdot 100\% \approx 106,196\% \cdot 100\% \approx 106,196\% \approx 106,20\%$$

Angebot 2:

$$p_2\% = \frac{550,00\text{€}}{480,00\text{€}} \cdot 100\% \approx 1,1457\% \cdot 100\% \approx 114,57\%$$

Was sagen uns diese Zahlen? Lässt sich die zweite Frage beantworten?
Wie lautet die Antwort?

Lösungen

Die Werte p_1 und p_2 geben die vermehrten Prozentsätze beim Ratenkauf an. Zieht man von diesen Prozentsätzen den Prozentsatz für den Grundwert bei Sofortkauf ab, also 100 %, erhält man die prozentualen Steigerungen:

Das heißt, das erste Tablet wird um 6,20 % teurer, das zweite sogar um 14,57 %.

Die Kursleitung diskutiert mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern, was das konkret bedeutet.

Wie würden Sie entscheiden?

Bei der Kaufentscheidung spielen neben den persönlichen Präferenzen und der technischen Ausstattung auch die Kosten eine Rolle. Entscheiden sich die Teilnehmer/-innen für die geringere Steigerungsrate des Preises bei Ratenkauf?

Weitere Übungsaufgaben zur Ermittlung von Prozentsätzen bei vermindertem oder vermehrtem Grundwert können der Sammlung der von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern zusammengetragenen Aufgaben zu Beginn dieses Unterkapitels (**Abschnitt 17.5**) oder **Aufgabenblatt 17.5e** entnommen werden.

Im Anschluss bietet sich an, einen Vergleich zwischen Ratenkauf und Aufnahme eines Kleinkredits mit z. B. 6 % Zinsen vs. Überziehung mittels Dispositionskredit (Dispo-Kredit) mit Zinsen von z. B. 10,5 % vorzunehmen.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Rückschau

In diesem Unterkapitel haben die Teilnehmer/-innen anhand von zahlreichen praktischen Alltagssituationen zu unterscheiden gelernt, welcher Wert jeweils gesucht wird:

- Prozentwert,
- Prozentsatz oder
- Grundwert.

Für die Lösung der Aufgabenstellungen wurden zunächst anhand verschiedener Möglichkeiten Darstellungsweisen betrachtet, die mögliche Lösungswege aufzeigen können, wenn die betreffenden, allgemein gültigen Formeln nicht zur Hand sind.

Im Wesentlichen waren die Darstellungsmöglichkeiten

- Zahlzerlegung,
- Balken oder Zahlenstrahl,
- Hunderterfeld und
- die Notation mittels Zuordnung der bekannten und gesuchten Werte.

Für die Berechnung wurden die Formeln

- für den Prozentwert $PW = \frac{GW}{100} \cdot p$ oder $PW = GW \cdot \frac{p}{100}$ oder $PW = \frac{GW \cdot p}{100}$,
- für den Prozentsatz $p = \frac{PW}{GW} \cdot 100\%$ und
- für den Grundwert $GW = \frac{PW}{p}$

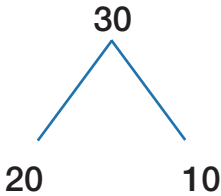
verwendet.

Auch der Dreisatz bzw. Zweisatz hat sich bei zahlreichen Fragestellungen bewährt. Schließlich wurden noch anhand von Beispielaufgaben Fragen nach verminderten und vermehrten Grundwerten beantwortet.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

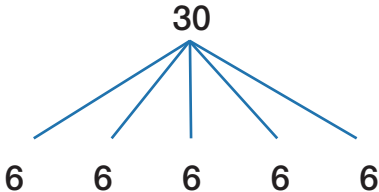
17.1a Teile von 30

Zerlegen Sie die Zahl 30 in Teile, die **unterschiedlich** groß sind.

Darstellung	Rechenoperationen
 <pre> 30 / \ 20 10 </pre>	$20 + 10 = 30$ oder $10 + 20 = 30$ $30 - 10 = 20$ oder $30 - 20 = 10$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

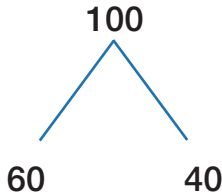
Zerlegen Sie die Zahl 30 in Teile, die **gleich** groß sind.

Darstellung	Rechenoperationen und Formulierungen
	$30 : 5 = 6$ oder $5 \cdot 6 = 30$ $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$ • fünf Teile, jedes Teil ist sechs • gefünfftelt • der fünfte Teil ist sechs

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

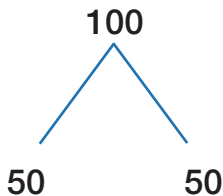
17.1b Teile von 100

Zerlegen Sie die Zahl 100 in Teile, die **unterschiedlich** groß sind.

Darstellung	Rechenoperationen
	$60 + 40 = 100$ oder $40 + 60 = 100$ $100 - 40 = 60$ oder $100 - 60 = 40$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Zerlegen Sie die Zahl 100 in Teile, die **gleich** groß sind.

Darstellung	Rechenoperationen und Formulierungen
	$100 : 2 = 50$ oder $2 \cdot 50 = 100$ $50 + 50 = 100$ • zwei Teile, jedes Teil ist 50 • halbiert, gezweiteilt • der halbe Teil/die Hälfte ist 50 • der zweite Teil ist 50

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.4a Grundwerte, Prozentwerte, Prozentsätze

Lesen Sie sich die Beispiele durch und füllen Sie die Tabelle aus.

Nr.	Beispiel	Grundwert GW mit Einheit	Prozent- wert PW mit Einheit	Prozentsatz p			Prozent- wert für ein Prozent
				Prozent	Hundertstel	Dezimalzahl	
1	25% von 200,00€ sind 50,00€.	200,00€	50,00 €	25%	$\frac{25}{100}$	0,25	2,00 €
2	50% von 32 kg sind 16 kg						
3	50 km sind 10 % von 500 km						
4	Von 70 Litern werden 35 Liter, das sind 50 %, abgefüllt.						
5	An der Klassen- fahrt nehmen von 28 Kindern 75 Prozent teil. Das sind 21 Kinder.						

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

Nr.	Beispiel	Grundwert GW mit Einheit	Prozent- wert PW mit Einheit	Prozentsatz p			Prozent- wert für ein Prozent
				Prozent	Hundertstel	Dezimalzahl	
6	25 Prozent der 240 überprüften Fahrzeuge fuhren zu schnell. Das waren 60 Fahrzeuge.						
7	Das T-Shirt kostet nur noch 60 % von 20,00 €, nämlich 12,00 €.						
8	Ich habe 1.200 Euro gespart und bekomme 5 Prozent Zinsen. Das sind 60 Euro.						

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.5a Alltagssituationen

Grundwert (GW), Prozentwert (PW) oder Prozentsatz (p) –
Welcher Wert wird jeweils gesucht?

Formulieren Sie mögliche Fragestellungen zu den Aufgaben, die noch keine Frage enthalten.

1. Wie viel sind

- a) 30 % von 1 m in cm?
- b) 25 % von 1 kg Obst in g?
- c) 48 % von 1200 m?
- d) 15 % von 800 g?



© Dionisvera / Fotolia

PW

2. Bei einer Verkehrskontrolle wurden 250 LKW überprüft, dabei wurden an 140 LKW erhebliche Mängel festgestellt.

3. Der Mietanteil vom Haushaltsnettoeinkommen sollte möglichst nicht mehr als 30 % im Monat betragen. Ihr Nettoeinkommen beträgt monatlich 922,40 €. Sie möchten umziehen und interessieren sich für eine Wohnung mit einer Gesamtmiete von 396,63 €.

4. Die Wohnung liegt näher an Ihrem Arbeitsplatz als Ihre jetzige Wohnung mit einer Gesamtmiete von 265,90 €, dadurch sparen Sie 258,27 € Benzinkosten im Monat.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

5. In einem Betrieb sind zurzeit 39 Mitarbeiter krank, das sind 26 %.

6. In einer Befragung zum Alkoholkonsum Erwachsener haben von 2.650 Befragten 1.802 Befragte angegeben, dass sie täglich Alkohol konsumieren.



© janvier/Fotolia

7. Die Wahlbeteiligung zur Wahl eines Stadtparlaments betrug 55 %. Es haben alle 152.273 Wähler/-innen eine gültige Stimme abgegeben.
- a) Ermitteln Sie die Gesamtzahl aller Bürger der Stadt.
- b) Von den gültigen Stimmen waren 52,29 % für die Partei XYZ, 31,95 % für die Partei ABC, 12,03 % für die Partei DEF und 3,73 % für sonstige Parteien. Wie viele Wähler/-innen (mit gültiger Stimme) haben jeweils für die drei großen Parteien gestimmt?
- c) Wie viele Wähler/-innen mit gültiger Stimme haben für die sonstigen Parteien gestimmt?

8. Eine Wandfläche von insgesamt 110 m² wird neu angestrichen, 80 m² sind bereits gestrichen.

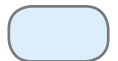
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

9. Im Schlussverkauf Ihres Lieblingsbekleidungs-geschäftes ist alles um 70 % reduziert. Sie finden:
- eine Bluse für 20,70€,
 - eine Hose für 29,70€ und
 - ein Paar Schuhe für 23,70€.





10. Ein Mensch mit 75 kg Körpergewicht besteht durchschnittlich aus folgenden Substanzen:
- Wasser: 60 %,
 - Protein: 17 %,
 - Fett: 17 %,
 - andere: 6 %.



11. Im Kino waren in Saal 1 bei der Abendvorstellung 64 Plätze belegt, das sind 40 %. In den Sälen 2 bis 6 waren insgesamt 237 Plätze belegt, das sind 83,45 %. Wie viele Sitzplätze hat das ganze Kino?



© AlenKadr / Fotolia

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

12. Der Fahrradladen nebenan hat Fahrräder reduziert.

Ein Mountainbike mit 27 Gängen ist um 20 % reduziert.

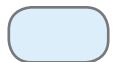
Es hat vorher 598,00 € gekostet.



13. Hannes Müller, Torwart vom FC Backenhausen, musste in seiner Karriere bislang 60-mal zum Elfmeterschießen antreten. Hierbei gelang es ihm, 18 Elfmeter zu halten. Sein Vorgänger Peter Meier hatte in seiner langen Karriere insgesamt 140 Elfmeter gegen sich. Ihm gelang es, hiervon 35 Elfmeter zu halten.



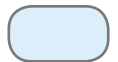
© Alekss / Fotolia



14. Für Ihren nächsten Urlaub möchten Sie jeden Monat 5 % von Ihrem Einkommen zurücklegen. Ihr Einkommen beträgt 1.100,80 €. Können Sie nach einem Jahr Ihre Traumreise mit dem Kreuzfahrtschiff für 720,99 € buchen?



© Thaut Images / Fotolia



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

15. Ihre Lieblingsschokolade enthält 47,3 % Zucker. Ein Riegel wiegt 16,7 g und deckt mit seinem Zuckeranteil 15,8 % vom gesamten Tagesbedarf an Zucker (50 g) eines durchschnittlichen Erwachsenen. Eine Tafel Schokolade hat sechs Riegel.

- Wie viel Gramm Zucker vom Tagesbedarf nehmen Sie zu sich, wenn Sie einen Riegel essen, und wie viel, wenn Sie Heißhunger auf Schokolade haben und eine ganze Tafel essen?
- Zu der Schokolade trinken Sie ein Glas (250 ml) von Ihrer Lieblingslimonade. Der Zuckeranteil in dieser Menge deckt 29 % vom gesamten Tagesbedarf an Zucker (50 g) eines durchschnittlichen Erwachsenen. Wie viel Gramm Zucker sind das?
- Wie viel Gramm Zucker dürfen Sie nach dem Verzehr eines Riegels Schokolade noch zu sich nehmen, wenn Sie dazu ein Glas Limonade trinken und den empfohlenen Grenzwert pro Tag nicht überschreiten möchten?
- Wie viel Schokolade dürfen Sie in diesem Fall noch essen, wenn Sie bereits am Tag 1 l Limonade getrunken haben?



16. Beim Einkauf finden Sie eine preisreduzierte Hose, die vorher 119,00 € kostete. Jetzt kostet sie nur noch 89,25 €.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.5b Prozentwerte berechnen

Fertigen Sie zunächst für jede Aufgabe eine Skizze an und stellen Sie die Situation graphisch dar.

Formulieren Sie dann eine Gleichung und lösen Sie diese.

1. Wie viel sind

- a) 30 % von 1 m in cm?
- b) 25 % von 1 kg Obst in g?
- c) 48 % von 1200 m?
- d) 15 % von 800 g?



2. Ein Mensch mit 70 kg Körpergewicht besteht durchschnittlich aus folgenden Substanzen:

Wasser	60 %
Protein	17 %
Fett	17 %
andere	6 %.

- a) Wie groß sind die jeweiligen Prozentwerte zu den angegebenen Prozentsätzen?
- b) Wie groß sind die Prozentwerte zu den angegebenen Substanzen bei Ihnen, wenn Sie z. B. 80 kg oder 60 kg wiegen?

3. Für Ihren nächsten Urlaub möchten Sie jeden Monat 5 % von Ihrem Einkommen zurücklegen. Ihr Einkommen beträgt 1.100,80 €. Können Sie nach einem Jahr Ihre Traumreise mit dem Kreuzfahrtschiff für 720,99 € buchen?

- a) Wie viele Monate müssen Sie sparen, bis Sie 720,99 € auf dem Sparsbuch haben?
- b) Wie viele Monate müssen Sie sparen, wenn Sie monatlich 6 % Ihres Einkommens beiseitelegen, bis Sie den Betrag für die Reise gespart haben?



Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

4. Ihre Lieblingsschokolade enthält 47,3% Zucker. Ein Riegel wiegt 16,7g und deckt mit seinem Zuckeranteil 15,8% vom gesamten Tagesbedarf an Zucker (50g) eines durchschnittlichen Erwachsenen.



Eine Tafel Schokolade hat sechs Riegel.

- Wie viel Gramm Zucker vom Tagesbedarf nehmen Sie zu sich, wenn Sie einen Riegel essen, und wie viel, wenn Sie Heißhunger auf Schokolade haben und eine ganze Tafel essen?
- Zu der Schokolade trinken Sie ein Glas (250 ml) von Ihrer Lieblingslimonade. Der Zuckeranteil in dieser Menge deckt 29% vom gesamten Tagesbedarf an Zucker (50g) eines durchschnittlichen Erwachsenen. Wie viel Gramm Zucker sind das?
- Wie viel Gramm Zucker dürfen Sie nach dem Verzehr eines Riegels Schokolade noch zu sich nehmen, wenn Sie dazu ein Glas Limonade trinken und den empfohlenen Grenzwert pro Tag nicht überschreiten möchten?
- Wie viel Schokolade dürfen Sie noch essen, wenn Sie bereits am Tag 1 l Limonade getrunken haben?

5. Der Fahrradladen nebenan hat Fahrräder reduziert. Ein Mountainbike mit 27 Gängen ist um 20% reduziert, es hat vorher 598,00€ gekostet. Wie hoch ist der Rabatt in Euro?

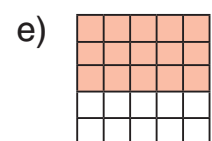
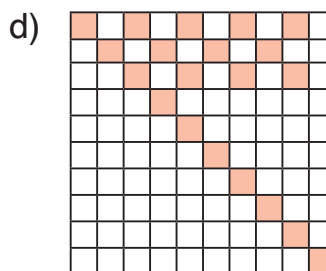
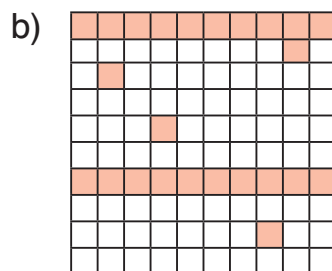
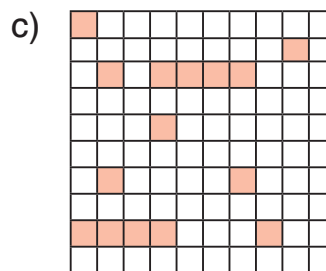
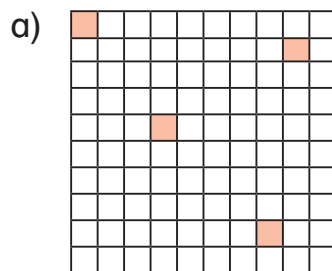


Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5c Prozentsatz berechnen

Formulieren Sie Fragen zu den Sachsituationen, wenn keine Fragen in der Aufgabe stehen. Lösen Sie die Aufgaben und notieren Sie jeweils einen Antwortsatz dazu.

1. Wie viel % der Fläche sind jeweils farbig markiert?



- Beim Einkauf finden Sie eine preisreduzierte Hose, die vorher 119,00€ kostete. Jetzt kostet sie nur noch 89,25€.
- Bei einer Verkehrskontrolle wurden 250 LKW überprüft, dabei wurden an 140 LKW erhebliche Mängel festgestellt.
- Von einer Auflage von 15.000 Zeitungen wurden 12.300 verkauft.
- Hannes Müller, Torwart vom FC Backenhausen, musste in seiner Karriere bislang 60-mal zum Elfmeterschießen antreten. Hierbei gelang es ihm, 18 Elfmeter zu halten. Sein Vorgänger Peter Meier hatte in seiner langen Karriere insgesamt 140 Elfmeter gegen sich. Ihm gelang es, hiervon 35 Elfmeter zu halten.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

6. In einer Befragung zum Alkoholkonsum Erwachsener haben von 2.650 Befragten 1.802 Befragte angegeben, dass sie täglich Alkohol konsumieren.
7. Der Mietanteil vom Haushaltsnettoeinkommen sollte möglichst nicht mehr als 30 % im Monat betragen. Ihr Nettoeinkommen beträgt monatlich 922,40 €. Sie möchten umziehen und interessieren sich für eine Wohnung mit einer Gesamtmiete von 396,63 €.
- a) Werden Sie die Wohnung mieten?
- b) Die Wohnung liegt näher an Ihrem Arbeitsplatz als Ihre jetzige Wohnung mit einer Gesamtmiete von 265,90 €, dadurch sparen Sie 258,27 € Benzinkosten im Monat. Berechnen Sie den prozentualen Anteil Ihrer Gesamtkosten für Miete und Benzingeld am Nettoeinkommen für Ihre alte Wohnung und für die neue Wohnung. Vergleichen Sie Ihre Ersparnis bzw. Ihre Mehrausgaben. Werden Sie Ihre Überlegung, die neue Wohnung zu mieten, ändern? Begründen Sie.



©contrastwerkstatt/Fotolia

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5d Grundwert berechnen

Fertigen Sie zunächst für jede Aufgabe eine Skizze an und stellen Sie die Situationen graphisch dar.

Lösen Sie die Aufgaben und beantworten Sie die Fragen.

- Es sind zurzeit 39 Mitarbeiter/-innen krank, das sind 26 %.
Wie groß ist die gesamte Belegschaft?
- Im Kino waren in Saal 1 bei der Abendvorstellung 64 Plätze belegt, das sind 40 %.
 - Bestimmen Sie die Gesamtmenge aller Sitzplätze in Saal 1.
 - In den Sälen 2 bis 6 waren insgesamt 237 Plätze belegt, das sind 83,45 %.
Wie viele Plätze gibt es in den Sälen 2 bis 6?
 - Wie viele Sitzplätze hat das ganze Kino?
 - Wie viel Prozent aller Sitzplätze waren besetzt und wie viel Prozent waren frei?
- Die Wahlbeteiligung zur Wahl eines Stadtparlaments betrug 55 %. Es haben alle 152.273 Wähler/-innen eine gültige Stimme abgegeben.
 - Ermitteln Sie die Gesamtzahl aller Bürger/-innen der Stadt.
 - Von den gültigen Stimmen waren 52,29 % für die Partei XYZ, 31,95 % für die Partei ABC, 12,03 % für die Partei DEF und 3,73 % für sonstige Parteien.
Wie viele Wähler/-innen (mit gültiger Stimme) haben jeweils für die drei großen Parteien gestimmt?
Wie viele Wähler/-innen mit gültiger Stimme haben für die sonstigen Parteien gestimmt?
- Im Schlussverkauf Ihres Lieblingsbekleidungsgeschäftes ist alles um 70 % reduziert. Sie finden:
 - eine Bluse/ein Hemd für 20,70 €,
 - eine Hose für 29,70 €,
 - ein Paar Schuhe für 23,70 €.
 - Wie viel haben diese Dinge vorher gekostet?
 - Wie groß ist Ihre gesamte Ersparnis?



© ztranger/Fotolia

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5e Grundwerte vermindert und vermehrt

Lösen Sie die Aufgaben und beantworten Sie die Fragen.

- Sie lesen morgens in der Zeitung, dass der Elektroladen in Ihrer Nähe einen Frühaufsteherrabatt von 20 % auf alles gewährt – wenn Sie zwischen 8:00 und 10:00 Uhr an der Kasse stehen. Sie beeilen sich, weil Sie ein neues Bügeleisen, einen Toaster und einen neuen Staubsauger brauchen.
 - Wie groß ist Ihre Ersparnis, wenn die Preise für Ihre Wunschprodukte ohne Rabatt wie folgt sind:

Bügeleisen	79,00 €
Toaster	49,00 €
Staubsauger	229,00 €?
 - Wie hoch ist der Rechnungsbetrag für alles zusammen?
- Sie lesen morgens in der Zeitung:

„Nur heute! Sparen Sie die MwSt. (19%) auf alle Haushaltsgeräte!“

Sie brauchen eine Bohrmaschine, die 139,00 € inkl. MwSt. kostet.

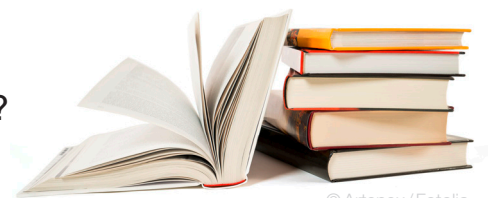
Wie viel Geld sparen Sie?
- Sie möchten Ihre Krankenkasse wechseln und die Beitragsunterschiede vergleichen. Bisher berechnet Ihre Kasse zum gesetzlichen Beitrag von 14,6% einen Zusatzbeitrag von 1,0%, also insgesamt 15,6% vom Bruttoeinkommen (1.200,00 € monatlich), Ihr Arbeitnehmeranteil beträgt 8,3%. Die Ihnen empfohlene Krankenkasse erhebt nur einen Zusatzbeitrag von 0,5%, d. h., Ihr Arbeitnehmeranteil beträgt nur 7,8%.
 - Berechnen Sie den Anteil Ihres monatlich verfügbaren Nettoeinkommens, den Sie mehr zur Verfügung haben, wenn Sie die Kasse wechseln.
 - Wie hoch ist Ihre Ersparnis im Jahr, wenn Ihr Monatslohn gleich bleibt?
 - Berechnen Sie Ihre monatliche und jährliche Ersparnis, wenn Ihr monatliches Nettoeinkommen 1.350,00 € beträgt.
 - Berechnen Sie a) bis c) für eine andere Krankenkasse, deren Zusatzbeitrag sich auf 0,8% beläuft.



© fotofabrika / Fotolia

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4. Sie mussten den Wasserhahn in der Küche von Fachleuten reparieren lassen und erhalten die Rechnung mit einem Rechnungsbetrag von 126,80 € inkl. Mehrwertsteuer (MwSt.). Wenn Sie den Rechnungsbetrag innerhalb von 7 Tagen überweisen, erhalten Sie Skonto (Preisnachlass) von 3 %, bei Zahlung innerhalb von 8 bis 10 Tagen immerhin noch 2 % Skonto. Wie viel sparen Sie in beiden Fällen?
5. Es ist der 7. Februar, Ihre Heizung ist defekt – ausgerechnet bei Außentemperaturen von -5°C ! Die Vermieterin weiß schon Bescheid, unternimmt aber nichts. Sie machen Gebrauch von der Möglichkeit, die Miete zu mindern. Für Heizungsausfall im Winter gibt es Gerichtsurteile, die eine Minderung von 50 % oder 75 % rechtfertigen. Sie entscheiden sich für eine Minderung von 60 % bei einer Gesamtmiete (inkl. aller Nebenkosten) von 678 €.
 - a) Berechnen Sie den monatlichen Minderungsbetrag in €.
 - b) Wie hoch ist die Miete, die Sie dann rückwirkend ab diesem Monat bezahlen?
 - c) Sie haben schon die Miete für den laufenden Monat überwiesen und müssen die Minderung für diesen und nächsten Monat mit der Miete des nächsten Monats verrechnen. Wie viel Miete müssen Sie dann im nächsten Monat überweisen?
 - d) Wie viel Miete müssen Sie überweisen, wenn Sie die Miete nur um 50 % mindern? Und wie viel Miete bleibt nach einer Minderung von 75 %?
6. Sie möchten ein Regal selbst bauen, der Baumarkt empfiehlt, beim Holzkauf 15–20 % Verschnitt einzukalkulieren. Der Preis je m^2 Holz beträgt 20,31 €. Sie benötigen für Ihr Regal 3 m^2 Holz. Wie viel kostet das Regal insgesamt?
7. Der Preis von Büchern enthält immer auch die Mehrwertsteuer von 7 %. Die Buchhandlung nebenan hat eine alte Kasse, die die MwSt. nicht automatisch ausweist, und muss eine Quittung ausstellen über ein verkauftes Buch von 9,99 €. Wie groß ist der darin enthaltene MwSt.-Betrag? Wie hoch ist der Nettopreis?

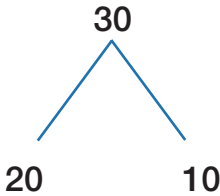
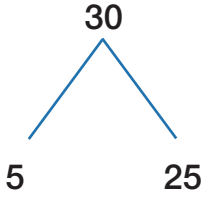
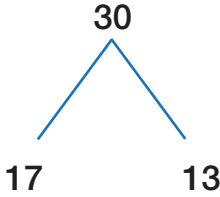
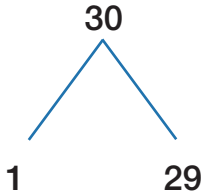


Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.1a LÖSUNGEN – Teile von 30

Zerlegen Sie die Zahl 30 in Teile, die **unterschiedlich** groß sind.

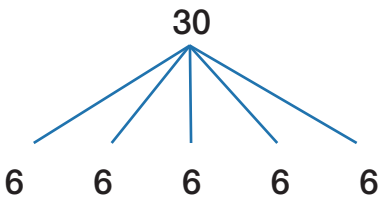
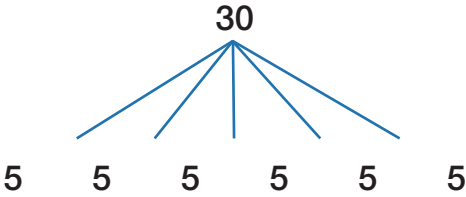
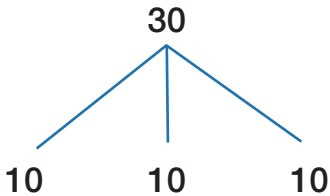
Beispiele:

Darstellung	Rechenoperationen
	$20 + 10 = 30$ oder $10 + 20 = 30$ $30 - 10 = 20$ oder $30 - 20 = 10$
	$5 + 25 = 30$ oder $25 + 5 = 30$ $30 - 5 = 25$ oder $30 - 25 = 5$
	$17 + 13 = 30$ oder $13 + 17 = 30$ $30 - 13 = 17$ oder $30 - 17 = 13$
	$1 + 29 = 30$ oder $29 + 1 = 30$ $30 - 1 = 29$ oder $30 - 29 = 1$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Zerlegen Sie die Zahl 30 in Teile, die **gleich** groß sind.

Beispiele:

Darstellung	Rechenoperationen und Formulierungen
	$30 : 5 = 6$ oder $5 \cdot 6 = 30$ $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$ • fünf Teile, jedes Teil ist sechs • gefünftelt • der fünfte Teil ist sechs
	$30 : 6 = 5$ oder $6 \cdot 5 = 30$ $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$ • sechs Teile, jedes Teil ist fünf • gesechstelt • der sechste Teil ist fünf
	$30 : 3 = 10$ oder $3 \cdot 10 = 30$ $10 + 10 + 10 = 30$ • drei Teile, jedes Teil ist zehn • gedrittelt • der dritte Teil ist zehn

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.1b LÖSUNGEN – Teile von 100

Zerlegen Sie die Zahl 100 in Teile, die **unterschiedlich** groß sind.

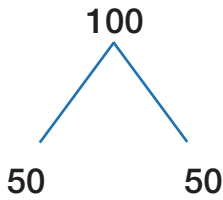
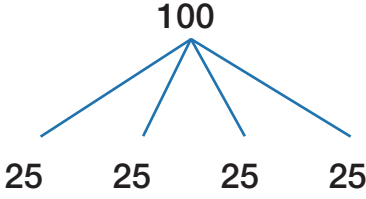
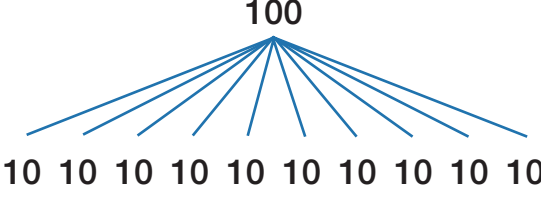
Beispiele:

Darstellung	Rechenoperationen
<pre> 100 / \ 60 40 </pre>	$60 + 40 = 100$ oder $40 + 60 = 100$ $100 - 40 = 60$ oder $100 - 60 = 40$
<pre> 100 / \ 99 1 </pre>	$99 + 1 = 100$ oder $1 + 99 = 100$ $100 - 1 = 99$ oder $100 - 99 = 1$
<pre> 100 / \ 23 77 </pre>	$23 + 77 = 100$ oder $77 + 23 = 100$ $100 - 23 = 77$ oder $100 - 77 = 23$
<pre> 100 / \ 49 51 </pre>	$49 + 51 = 100$ oder $51 + 49 = 100$ $100 - 51 = 49$ oder $100 - 49 = 51$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

Zerlegen Sie die Zahl 100 in Teile, die **gleich** groß sind.

Beispiele:

Darstellung	Rechenoperationen und Formulierungen
	$100 : 2 = 50$ oder $2 \cdot 50 = 100$ $50 + 50 = 100$ • zwei Teile, jedes Teil ist 50 • halbiert, gezweiteilt • der halbe Teil/die Hälfte ist 50 • der zweite Teil ist 50
	$100 : 4 = 25$ oder $4 \cdot 25 = 100$ $25 + 25 + 25 + 25 = 100$ • vier Teile, jedes Teil ist 25 • geviertelt • der vierte Teil/ein Viertel ist 25
	$100 : 10 = 10$ oder $10 \cdot 10 = 100$ $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 100$ • zehn Teile, jedes Teil ist 10 • gezehntelt • der zehnte Teil/ein Zehntel ist 10

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

17.4a LÖSUNGEN – Grundwerte, Prozentwerte, Prozentsätze

Lesen Sie sich die Beispiele durch und füllen Sie die Tabelle aus.

Nr.	Beispiel	Grundwert GW mit Einheit	Prozent- wert PW mit Einheit	Prozentsatz p			Prozent- wert für ein Prozent
				Prozent	Hundertstel	Dezimalzahl	
1	25% von 200,00€ sind 50,00€.	200,00€	50,00 €	25%	$\frac{25}{100}$	0,25	2,00€
2	50% von 32 kg sind 16 kg	32 kg	16 kg	50%	$\frac{50}{100}$	0,50	0,32 kg
3	50 km sind 10% von 500 km	500 km	50 km	10%	$\frac{10}{100}$	0,10	5 km
4	Von 70 Litern werden 35 Liter, das sind 50%, abgefüllt.	70 Liter	35 Liter	50%	$\frac{50}{100}$	0,50	0,70 Liter
5	An der Klassen- fahrt nehmen von 28 Kindern 75 Prozent teil. Das sind 21 Kinder.	28 Kinder	21 Kinder	75%	$\frac{75}{100}$	0,75	0,28 Kinder (Rechen- größe)

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

Nr.	Beispiel	Grundwert GW mit Einheit	Prozent- wert PW mit Einheit	Prozentsatz p			Prozent- wert für ein Prozent
				Prozent	Hundertstel	Dezimalzahl	
6	25 Prozent der 240 überprüften Fahrzeuge fahren zu schnell. Das waren 60 Fahrzeuge.	240 Fahr- zeuge	60 Fahr- zeuge	25%	$\frac{25}{100}$	0,25	2,4 Fahrzeuge
7	Das T-Shirt kostet nur noch 60 % von 20,00€, nämlich 12,00€.	20,00 €	12,00 €	60%	$\frac{60}{100}$	0,60	0,20 €
8	Ich habe 1.200 Euro gespart und bekomme 5 Prozent Zinsen. Das sind 60 Euro.	1.200 Euro	60 Euro	5%	$\frac{5}{100}$	0,05	12 Euro

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5a LÖSUNGEN – Alltagssituationen

Grundwert (GW), Prozentwert (PW) oder Prozentsatz (p) –
Welcher Wert wird jeweils gesucht?

Formulieren Sie mögliche Fragestellungen zu den Aufgaben, die noch keine Frage enthalten.

- Wie viel sind
 - 30 % von 1 m in cm?
 - 25 % von 1 kg Obst in g?
 - 48 % von 1200 m?
 - 15 % von 800 g?

PW

PW

PW

PW

- Bei einer Verkehrskontrolle wurden 250 LKW überprüft, dabei wurden an 140 LKW erhebliche Mängel festgestellt.

Fragen:

Wie viel Prozent der LKW sind mangelhaft?

p

Wie viel Prozent der LKW sind in Ordnung?

p

- Der Mietanteil vom Haushaltsnettoeinkommen sollte möglichst nicht mehr als 30 % im Monat betragen. Ihr Nettoeinkommen beträgt monatlich 922,40 €. Sie möchten umziehen und interessieren sich für eine Wohnung mit einer Gesamtmiete von 396,63 €.

Frage:

Wie viel Prozent vom Nettoeinkommen beträgt die neue Miete?

p

- Die Wohnung liegt näher an Ihrem Arbeitsplatz als Ihre jetzige Wohnung mit einer Gesamtmiete von 265,90 €, dadurch sparen Sie 258,27 € Benzinkosten im Monat.

Frage:

Wie viel Prozent vom Nettoeinkommen betragen die Miete und die Benzinkosten zusammen für die neue Wohnung im Vergleich zur alten Wohnung?

p

- In einem Betrieb sind zurzeit 39 Mitarbeiter krank, das sind 26 %.

Frage:

Wie viele Mitarbeiter hat das Unternehmen?

GW

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

6. In einer Befragung zum Alkoholkonsum Erwachsener haben von 2.650 Befragten 1.802 Befragte angegeben, dass sie täglich Alkohol konsumieren.

Fragen:

Wie viel Prozent der befragten Erwachsenen trinkt täglich Alkohol?

P

Wie viel Prozent der befragten Erwachsenen trinkt täglich keinen Alkohol?

P

7. Die Wahlbeteiligung zur Wahl eines Stadtparlaments betrug 55 %. Es haben alle 152.273 Wähler/-innen eine gültige Stimme abgegeben.

a) Ermitteln Sie die Gesamtzahl aller Bürger der Stadt.

GW

b) Von den gültigen Stimmen waren 52,29 % für die Partei XYZ, 31,95 % für die Partei ABC, 12,03 % für die Partei DEF und 3,73 % für sonstige Parteien. Wie viele Wähler/-innen (mit gültiger Stimme) haben jeweils für die drei großen Parteien gestimmt?

PW

c) Wie viele Wähler/-innen mit gültiger Stimme haben für die sonstigen Parteien gestimmt?

PW

8. Eine Wandfläche von insgesamt 110 m² wird neu angestrichen, 80 m² sind bereits gestrichen.

Fragen:

Wie viel Prozent der Fläche sind bereits gestrichen?

P

Wie viel Prozent der Fläche sind noch zu streichen?

P

9. Im Schlussverkauf Ihres Lieblingsbekleidungsgeschäftes ist alles um 70 % reduziert. Sie finden:

a) eine Bluse für 20,70 €,

b) eine Hose für 29,70 € und

c) ein Paar Schuhe für 23,70 €.

Frage:

Wie viel haben die Bluse/die Hose/die Schuhe vorher gekostet?

GW

10. Ein Mensch mit 75 kg Körpergewicht besteht durchschnittlich aus folgenden Substanzen:

– Wasser: 60 %,

– Protein: 17 %,

– Fett: 17 %,

– andere: 6 %.

Frage:

Wie groß sind die Gewichtsanteile in kg für die jeweiligen Substanzen, also zu wie viel Gewicht besteht der Mensch aus Wasser, Protein, Fett und anderen Substanzen?

PW

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzen/ Teile	Dezimal- system	

11. Im Kino waren in Saal 1 bei der Abendvorstellung 64 Plätze belegt, das sind 40 %. In den Sälen 2 bis 6 waren insgesamt 237 Plätze belegt, das sind 83,45 %. Wie viele Sitzplätze hat das ganze Kino?

GW

12. Der Fahrradladen nebenan hat Fahrräder reduziert. Ein Mountainbike mit 27 Gängen ist um 20 % reduziert. Es hat vorher 598,00 € gekostet.

Frage:

Wie viel Geld sparen Sie?

PW

13. Hannes Müller, Torwart vom FC Backenhausen, musste in seiner Karriere bislang 60-mal zum Elfmeterschießen antreten. Hierbei gelang es ihm, 18 Elfmeter zu halten. Sein Vorgänger Peter Meier hatte in seiner langen Karriere insgesamt 140 Elfmeter gegen sich. Ihm gelang es, hiervon 35 Elfmeter zu halten.

Fragen:

Wie groß ist der prozentuale Anteil der gehaltenen Bälle für beide Torwarte?

P

14. Für Ihren nächsten Urlaub möchten Sie jeden Monat 5 % von Ihrem Einkommen zurücklegen. Ihr Einkommen beträgt 1.100,80 €. Können Sie nach einem Jahr Ihre Traumreise mit dem Kreuzfahrtschiff für 720,99 € buchen?

PW

15. Ihre Lieblingsschokolade enthält 47,3 % Zucker. Ein Riegel wiegt 16,7 g und deckt mit seinem Zuckeranteil 15,8 % vom gesamten Tagesbedarf an Zucker (50 g) eines durchschnittlichen Erwachsenen. Eine Tafel Schokolade hat sechs Riegel.

- Wie viel Gramm Zucker vom Tagesbedarf nehmen Sie zu sich, wenn Sie einen Riegel essen, und wie viel, wenn Sie Heißhunger auf Schokolade haben und eine ganze Tafel essen?
- Zu der Schokolade trinken Sie ein Glas (250 ml) von Ihrer Lieblingslimonade. Der Zuckeranteil in dieser Menge deckt 29 % vom gesamten Tagesbedarf an Zucker (50 g) eines durchschnittlichen Erwachsenen. Wie viel Gramm Zucker sind das?
- Wie viel Gramm Zucker dürfen Sie nach dem Verzehr eines Riegels Schokolade noch zu sich nehmen, wenn Sie dazu ein Glas Limonade trinken und den empfohlenen Grenzwert pro Tag nicht überschreiten möchten?
- Wie viel Schokolade dürfen Sie in diesem Fall noch essen, wenn Sie bereits am Tag 1 Limonade getrunken haben?

PW

PW

PW

PW

16. Beim Einkauf finden Sie eine preisreduzierte Hose, die vorher 119,00 € kostete. Jetzt kostet sie nur noch 89,25 €.

Frage:

Wie viel Prozent sparen Sie?

P

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

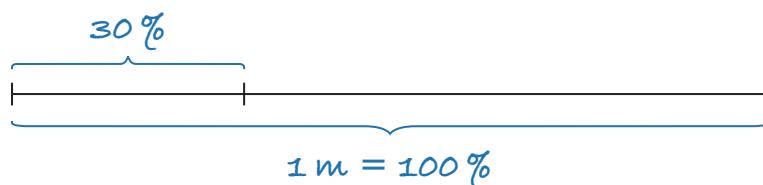
17.5b LÖSUNGEN – Prozentwerte berechnen

Fertigen Sie zunächst für jede Aufgabe eine Skizze an und stellen Sie die Situation graphisch dar.

Formulieren Sie dann eine Gleichung und lösen Sie diese.

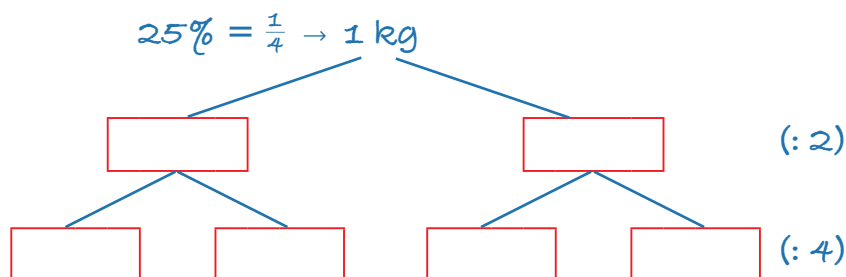
1. Wie viel sind

a) 30 % von 1 m in cm?

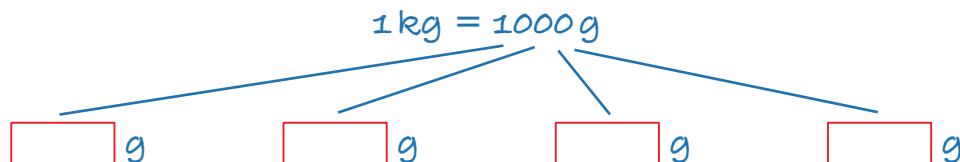


$$30\% = \frac{30}{100} = 0,3 \rightarrow 0,3 \cdot 100\text{ cm} = 30\text{ cm}$$

b) 25 % von 1 kg Obst in g?

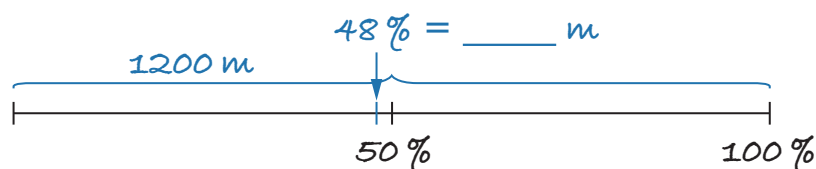


Alternativ:



$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25 \rightarrow 0,25 \cdot 1000\text{ g} = 250\text{ g}$$

c) 48 % von 1200 m?



$$48\% = \frac{48}{100} = 0,48 \rightarrow 0,48 \cdot 1200\text{ m} = 576\text{ m}$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

d) 15 % von 800 g?

$$800 \text{ g} = 100\%$$

$$\text{--- g} = 15\%$$

$$15\% = \frac{15}{100} = 0,15 \rightarrow 0,15 \cdot 800 \text{ g} = 120 \text{ g}$$

2. Ein Mensch mit 70 kg Körpergewicht besteht durchschnittlich aus folgenden Substanzen:

Wasser 60 %

Protein 17 %

Fett 17 %

andere 6 %.

a) Wie groß sind die jeweiligen Prozentwerte zu den angegebenen Prozentsätzen?

$$\text{Wasser: } 60\% \text{ von } 70 \text{ kg} \rightarrow 0,6 \cdot 70 \text{ kg} = 42 \text{ kg}$$

$$\text{Protein: } 17\% \text{ von } 70 \text{ kg} \rightarrow 0,17 \cdot 70 \text{ kg} = 11,9 \text{ kg}$$

$$\text{Fett: } 17\% \text{ von } 70 \text{ kg} \rightarrow 0,17 \cdot 70 \text{ kg} = 11,9 \text{ kg}$$

$$\text{andere: } 6\% \text{ von } 70 \text{ kg} \rightarrow 0,06 \cdot 70 \text{ kg} = 4,2 \text{ kg}$$

b) Wie groß sind die Prozentwerte zu den angegebenen Substanzen bei Ihnen, wenn Sie z. B. 80 kg oder 60 kg wiegen?

$$\text{Wasser: } 60\% \text{ von } 80 \text{ kg} \rightarrow 0,6 \cdot 80 \text{ kg} = 48 \text{ kg}$$

$$\text{Protein: } 17\% \text{ von } 80 \text{ kg} \rightarrow 0,17 \cdot 80 \text{ kg} = 13,6 \text{ kg}$$

$$\text{Fett: } 17\% \text{ von } 80 \text{ kg} \rightarrow 0,17 \cdot 80 \text{ kg} = 13,6 \text{ kg}$$

$$\text{andere: } 6\% \text{ von } 80 \text{ kg} \rightarrow 0,06 \cdot 80 \text{ kg} = 4,8 \text{ kg}$$

$$\text{Wasser: } 60\% \text{ von } 60 \text{ kg} \rightarrow 0,6 \cdot 60 \text{ kg} = 36 \text{ kg}$$

$$\text{Protein: } 17\% \text{ von } 60 \text{ kg} \rightarrow 0,17 \cdot 60 \text{ kg} = 10,2 \text{ kg}$$

$$\text{Fett: } 17\% \text{ von } 60 \text{ kg} \rightarrow 0,17 \cdot 60 \text{ kg} = 10,2 \text{ kg}$$

$$\text{andere: } 6\% \text{ von } 60 \text{ kg} \rightarrow 0,06 \cdot 60 \text{ kg} = 3,6 \text{ kg}$$

3. Für Ihren nächsten Urlaub möchten Sie jeden Monat 5 % von Ihrem Einkommen zurücklegen. Ihr Einkommen beträgt 1.100,80 €. Können Sie nach einem Jahr Ihre Traumreise mit dem Kreuzfahrtschiff für 720,99 € buchen?

a) Wie viele Monate müssen Sie sparen, bis Sie 720,99 € auf dem Sparbuch haben?

$$5\% \text{ von } 1.100,80 \text{ €} \rightarrow 0,05 \cdot 1.100,80 \text{ €} = 55,04 \text{ €}$$

$$\frac{720,99 \text{ €}}{55,04 \text{ €}} = 13,1 \rightarrow 13,1 \text{ Monate, also nach 14 Monaten}$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

- b) Wie viele Monate müssen Sie sparen, wenn Sie monatlich 6 % Ihres Einkommens beiseitelegen, bis Sie den Betrag für die Reise gespart haben?

$$6\% \text{ von } 1.100,80 \text{ €} \rightarrow 0,06 \cdot 1.100,80 \text{ €} = 66,05 \text{ €}$$

$$\frac{720,99 \text{ €}}{66,05 \text{ €}} = 10,9 \rightarrow 10,9 \text{ Monate, also nach 11 Monaten}$$

4. Ihre Lieblingsschokolade enthält 47,3 % Zucker. Ein Riegel wiegt 16,7g und deckt mit seinem Zuckeranteil 15,8 % vom gesamten Tagesbedarf an Zucker (50g) eines durchschnittlichen Erwachsenen. Eine Tafel Schokolade hat sechs Riegel.

- a) Wie viel Gramm Zucker vom Tagesbedarf nehmen Sie zu sich, wenn Sie einen Riegel essen, und wie viel, wenn Sie Heißhunger auf Schokolade haben und eine ganze Tafel essen?

$$15,8\% \text{ von } 50 \text{ g} \rightarrow 0,158 \cdot 50 \text{ g} = 7,9 \text{ g Zucker pro Riegel}$$

- b) Zu der Schokolade trinken Sie ein Glas (250ml) von Ihrer Lieblingslimonade. Der Zuckeranteil in dieser Menge deckt 29 % vom gesamten Tagesbedarf an Zucker (50g) eines durchschnittlichen Erwachsenen. Wie viel Gramm Zucker sind das?

$$250 \text{ ml entspricht } 29\% \text{ von } 50 \text{ g} \rightarrow 0,29 \cdot 50 \text{ g} = 14,5 \text{ g}$$

$$\rightarrow 14,5 \text{ g Zucker in } 250 \text{ ml enthalten}$$

- c) Wie viel Gramm Zucker dürfen Sie nach dem Verzehr eines Riegels Schokolade noch zu sich nehmen, wenn Sie dazu ein Glas Limonade trinken und den empfohlenen Grenzwert pro Tag nicht überschreiten möchten?

$$1 \text{ Riegel Schokolade: } 7,9 \text{ g Zucker}$$

$$1 \text{ Glas Limonade: } 14,5 \text{ g Zucker}$$

$$7,9 \text{ g} + 14,5 \text{ g} = 22,4 \text{ g Zucker}$$

$$50 \text{ g} - 22,4 \text{ g} = 27,6 \text{ g Zucker darf man noch zu sich nehmen}$$

- d) Wie viel Schokolade dürfen Sie noch essen, wenn Sie bereits am Tag 1 Limonade getrunken haben?

$$1 \text{ l Limonade} \rightarrow 4 \cdot 250 \text{ ml} \rightarrow 4 \cdot 14,5 \text{ g} = 58 \text{ g}$$

$$\rightarrow \text{In diesem Fall muss auf die Schokolade verzichtet werden, da schon } 8 \text{ g Zucker mehr als empfohlen verzehrt wurden.}$$

5. Der Fahrradladen nebenan hat Fahrräder reduziert. Ein Mountainbike mit 27 Gängen ist um 20 % reduziert, es hat vorher 598,00€ gekostet. Wie hoch ist der Rabatt in Euro?

$$20\% \text{ von } 598 \text{ €} \rightarrow 0,2 \cdot 598 \text{ €} = 119,60 \text{ €}$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5c LÖSUNGEN – Prozentsatz berechnen

Formulieren Sie Fragen zu den Sachsituationen, wenn keine Fragen in der Aufgabe stehen. Lösen Sie die Aufgaben und notieren Sie jeweils einen Antwortsatz dazu.

1. Wie viel % der Fläche sind jeweils farbig markiert?

a) 4 b) 24 c) 15 d) 20 e) 60

2. Beim Einkauf finden Sie eine preisreduzierte Hose, die vorher 119,00€ kostete. Jetzt kostet sie nur noch 89,25€.

Frage:

Auf wie viel Prozent wurde die Hose reduziert?

Antwort: Die Hose wurde auf 75% reduziert.

3. Bei einer Verkehrskontrolle wurden 250 LKW überprüft, dabei wurden an 140 LKW erhebliche Mängel festgestellt.

Frage:

Wie viel Prozent der kontrollierten LKW hatten Mängel?

Antwort: 56% der kontrollierten LKW hatten Mängel.

4. Von einer Auflage von 15.000 Zeitungen wurden 12.300 verkauft.

Frage:

Wie viel Prozent der Auflage wurden verkauft?

Antwort: 82% der Auflage wurden verkauft.

5. Hannes Müller, Torwart vom FC Backenhausen, musste in seiner Karriere bislang 60-mal zum Elfmeterschießen antreten. Hierbei gelang es ihm, 18 Elfmeter zu halten. Sein Vorgänger Peter Meier hatte in seiner langen Karriere insgesamt 140 Elfmeter gegen sich. Ihm gelang es, hiervon 35 Elfmeter zu halten.

Frage:

Wie viel Prozent der Elfmeterschüsse hielten die beiden Torwarte jeweils?

Antworten:

Hannes Müller hielt 18 von 60 Elfmeter, also 30%.

Peter Meier hielt 35 von 140 Elfmeter, also 25%.

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

6. In einer Befragung zum Alkoholkonsum Erwachsener haben von 2.650 Befragten 1.802 Befragte angegeben, dass sie täglich Alkohol konsumieren.

Frage:

Wie viel Prozent der Befragten trinken täglich Alkohol?

Antwort: 68% der Befragten trinken täglich Alkohol.

7. Der Mietanteil vom Haushaltsnettoeinkommen sollte möglichst nicht mehr als 30 % im Monat betragen. Ihr Nettoeinkommen beträgt monatlich 922,40 €. Sie möchten umziehen und interessieren sich für eine Wohnung mit einer Gesamtmiete von 396,63 €.

a) Werden Sie die Wohnung mieten?

Antwort: 396,63 € von 922,40 € entspricht 43 %.

In diesem Fall werde ich die Wohnung nicht mieten.

- b) Die Wohnung liegt näher an Ihrem Arbeitsplatz als Ihre jetzige Wohnung mit einer Gesamtmiete von 265,90 €, dadurch sparen Sie 258,27 € Benzinkosten im Monat. Berechnen Sie den prozentualen Anteil Ihrer Gesamtkosten für Miete und Benzingeld am Nettoeinkommen für Ihre alte Wohnung und für die neue Wohnung. Vergleichen Sie Ihre Ersparnis bzw. Ihre Mehrausgaben. Werden Sie Ihre Überlegung, die neue Wohnung zu mieten, ändern? Begründen Sie.

Wohnung alt:

$265,90 \text{ €} + 258,27 \text{ € Benzingeld} = 524,17 \text{ €}$

$524,17 \text{ € von } 922,40 \text{ € entspricht einem Anteil von } 56,83 \text{ %}.$

Wohnung neu:

$396,63 \text{ € von } 922,40 \text{ € entspricht einem Anteil von } 43 \text{ %}.$

Unterschied Wohnung neu und alt:

$56,83 \text{ %} - 43 \text{ %} = 13,83 \text{ % Ersparnis vom Nettoeinkommen}$

In Euro: $0,1383 \cdot 922,40 \text{ €} = 127,57 \text{ € monatliche Ersparnis}$

Die neue Wohnung ist insgesamt kostengünstiger!

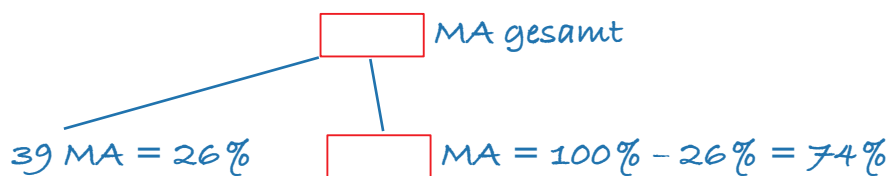
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

17.5d LÖSUNGEN – Grundwert berechnen

Fertigen Sie zunächst für jede Aufgabe eine Skizze an und stellen Sie die Situationen graphisch dar.

Lösen Sie die Aufgaben und beantworten Sie die Fragen.

1. Es sind zurzeit 39 Mitarbeiter/-innen krank, das sind 26 %. Wie groß ist die gesamte Belegschaft?



Lösung mittels Dreisatz:

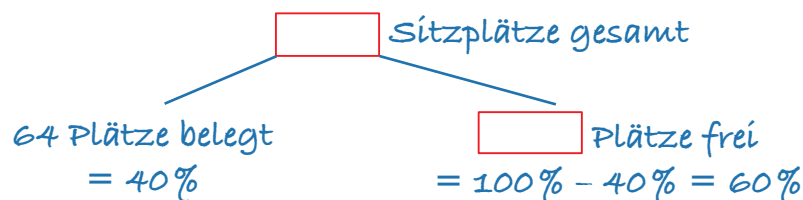
$$26\% = 39 \text{ Mitarbeiter}$$

$$1\% = 1,5 \text{ Mitarbeiter}$$

$$100\% = 150 \text{ Mitarbeiter}$$

2. Im Kino waren in Saal 1 bei der Abendvorstellung 64 Plätze belegt, das sind 40 %.

a) Bestimmen Sie die Gesamtmenge aller Sitzplätze in Saal 1.



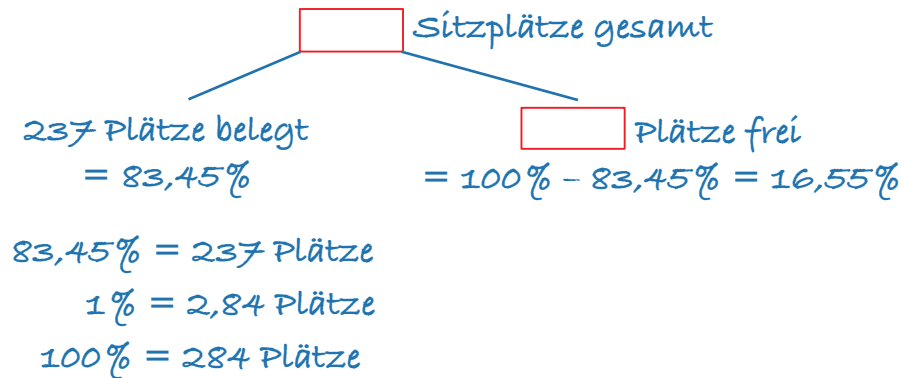
$$40\% = 64 \text{ Plätze}$$

$$10\% = 16 \text{ Plätze}$$

$$100\% = 160 \text{ Plätze}$$

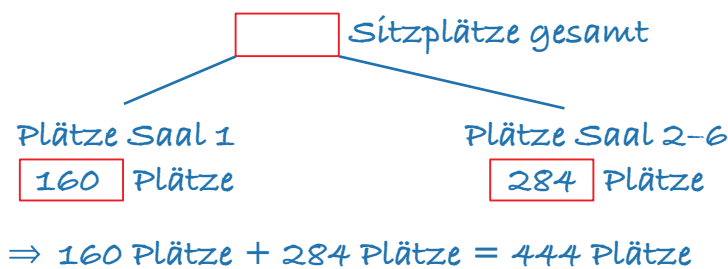
Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

- b) In den Sälen 2 bis 6 waren insgesamt 237 Plätze belegt, das sind 83,45 %.
Wie viele Plätze gibt es in den Sälen 2 bis 6?

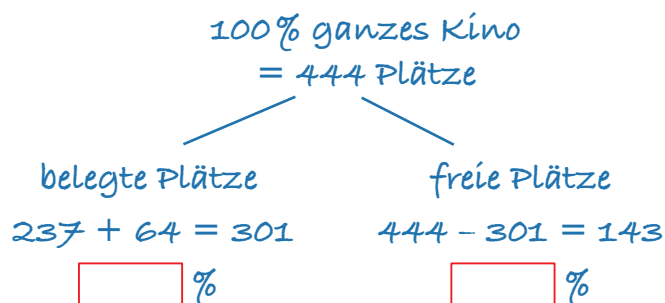


- c) Wie viele Sitzplätze hat das ganze Kino?

Lösung Sitzplätze Kino:



Lösung Prozente Kino:



- d) Wie viel Prozent aller Sitzplätze waren besetzt und wie viel Prozent waren frei?

Von insgesamt 444 Plätzen waren 237 Plätze + 64 Plätze
 = 301 Plätze belegt.
 444 Plätze = 100%
 1 Platz = 0,225%
 301 Plätze = 67,79%
 Belegt waren 67,79%. Frei waren 100% - 67,79% = 32,21%

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

3. Die Wahlbeteiligung zur Wahl eines Stadtparlaments betrug 55 %.
Es haben alle 152.273 Wähler/-innen eine gültige Stimme abgegeben.
a) Ermitteln Sie die Gesamtzahl aller Bürger/-innen der Stadt.

Zahlzerlegung:

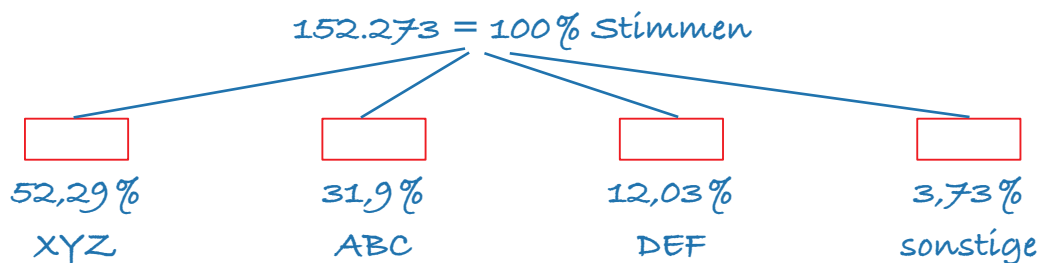
$$100\% = \boxed{} \text{ Bürger/-innen}$$

$$\begin{array}{l} 55\% \\ = 152.273 \text{ B.} \end{array} \quad \begin{array}{l} 45\% \\ = \boxed{} \text{ B.} \end{array}$$

Zuordnung/Dreisatz:

$$\begin{aligned} 55\% &= 152.273 \text{ Bürger/-innen} \\ 1\% &= 152.273 : 55 = 2.768,60 \text{ Bürger/-innen} \\ 100\% &= 276,860 \Rightarrow \text{Die Stadt hat } 276.860 \text{ Bürger/-innen} \end{aligned}$$

- b) Von den gültigen Stimmen waren 52,29 % für die Partei XYZ, 31,95 % für die Partei ABC, 12,03 % für die Partei DEF und 3,73 % für sonstige Parteien. Wie viele Wähler/-innen (mit gültiger Stimme) haben jeweils für die drei großen Parteien gestimmt?
Wie viele Wähler/-innen mit gültiger Stimme haben für die sonstigen Parteien gestimmt?



$$\text{XYZ: } 0,5229 \cdot 152.273 = 79.624 \text{ Wähler/-innen}$$

$$\text{ABC: } 0,3195 \cdot 152.273 = 48.651 \text{ Wähler/-innen}$$

$$\text{DEF: } 0,1203 \cdot 152.273 = 18.318 \text{ Wähler/-innen}$$

$$\text{Sonstige: } 0,0373 \cdot 152.273 = 5.680 \text{ Wähler/-innen}$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

4. Im Schlussverkauf Ihres Lieblingsbekleidungsgeschäftes ist alles um 70 % reduziert. Sie finden:

- eine Bluse/ein Hemd für 20,70 €,
- eine Hose für 29,70 €,
- ein Paar Schuhe für 23,70 €.

a) Wie viel haben diese Dinge vorher gekostet?

b) Wie groß ist Ihre gesamte Ersparnis?

Eine Preisreduktion um 70 % bedeutet, dass der jetzige Preis 30 % des Grundwertes entspricht:

a) Bluse/Hemd vorher: $\frac{20,70 \text{ €}}{30} \cdot 100 = 69,00 \text{ €}$

Hose vorher: $\frac{29,70 \text{ €}}{30} \cdot 100 = 99,00 \text{ €}$

Schuhe vorher: $\frac{23,70 \text{ €}}{30} \cdot 100 = 79,00 \text{ €}$

b) Bluse: $69,00 \text{ €} - 20,70 \text{ €} = 48,30 \text{ €}$

Hose: $99,00 \text{ €} - 29,70 \text{ €} = 69,30 \text{ €}$

Schuhe: $79,00 \text{ €} - 23,70 \text{ €} = 55,30 \text{ €}$

Ersparnis gesamt: $48,30 \text{ €} + 69,30 \text{ €} + 55,30 \text{ €} = 172,90 \text{ €}$

oder: $20,70 \text{ €} + 29,70 \text{ €} + 23,70 \text{ €} = 74,10 \text{ €}$

$\frac{20,70 \text{ €}}{30} \cdot 100 = 172,90 \text{ €}.$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

17.5e LÖSUNGEN – Grundwerte vermindert und vermehrt

Lösen Sie die Aufgaben und beantworten Sie die Fragen.

1. Sie lesen morgens in der Zeitung, dass der Elektroladen in Ihrer Nähe einen Frühaufsteherrabatt von 20 % auf alles gewährt – wenn Sie zwischen 8:00 und 10:00 Uhr an der Kasse stehen. Sie beeilen sich, weil Sie ein neues Bügeleisen, einen Toaster und einen neuen Staubsauger brauchen.

- a) Wie groß ist Ihre Ersparnis, wenn die Preise für Ihre Wunschprodukte ohne Rabatt wie folgt sind:

Bügeleisen 79,00 €
Toaster 49,00 €
Staubsauger 229,00 €?

Bügeleisen: $79,00 € \cdot \frac{29}{100} = 15,80 €$
oder $79,00 € : 5 = 15,80 €$ Ersparnis

Toaster: $49,00 € \cdot \frac{29}{100} = 9,80 €$
oder $49,00 € : 5 = 9,80 €$ Ersparnis

Staubsauger: $229,00 € \cdot \frac{29}{100} = 45,80 €$
oder $229,00 € : 5 = 45,80 €$ Ersparnis

- b) Wie hoch ist der Rechnungsbetrag für alles zusammen?

Gesamtkosten – Gesamtersparnis: $357,00 € - 71,40 € = 285,60 €$
oder $357 \cdot 0,8 = 285,60 €$ Rechnungsbetrag

2. Sie lesen morgens in der Zeitung:
„Nur heute! Sparen Sie die MwSt. (19 %) auf alle Haushaltsgeräte!“
Sie brauchen eine Bohrmaschine, die 139,00 € inkl. MwSt. kostet.
Wie viel Geld sparen Sie?

$139,00 € : 1,19 \cdot 19 = 22,19 €$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

3. Sie möchten Ihre Krankenkasse wechseln und die Beitragsunterschiede vergleichen. Bisher berechnet Ihre Kasse zum gesetzlichen Beitrag von 14,6 % einen Zusatzbeitrag von 1,0 %, also insgesamt 15,6 % vom Bruttoeinkommen (1.200,00 € monatlich), Ihr Arbeitnehmeranteil beträgt 8,3 %. Die Ihnen empfohlene Krankenkasse erhebt nur einen Zusatzbeitrag von 0,5 %, d. h., Ihr Arbeitnehmeranteil beträgt nur 7,8 %.

- a) Berechnen Sie den Anteil Ihres monatlich verfügbaren Nettoeinkommens, den Sie mehr zur Verfügung haben, wenn Sie die Kasse wechseln.

1.200,00 € Brutto, davon 0,5 %:

1 % von 1.200,00 € = $1.200,00 € : 100 = 12,00 €$;

davon die Hälfte: $12,00 € : 2 = 6,00 €$

Ersparnis pro Monat: 6,00 €

- b) Wie hoch ist Ihre Ersparnis im Jahr, wenn Ihr Monatslohn gleich bleibt?

12 Monate · 6,00 €/Monat = 72,00 € im Jahr

- c) Berechnen Sie Ihre monatliche und jährliche Ersparnis, wenn Ihr monatliches Nettoeinkommen 1.350,00 € beträgt.

1.350,00 € Brutto, davon 0,5 %:

1 % von 1.350,00 € = $1.350,00 € : 100 = 13,50 €$;

davon die Hälfte: $13,50 € : 2 = 6,75 €$

Ersparnis pro Monat: 6,75 €

Ersparnis pro Jahr: 12 Monate · 6,75 €/Monat = 81,00 €

- d) Berechnen Sie a) bis c) für eine andere Krankenkasse, deren Zusatzbeitrag sich auf 0,8 % beläuft.

Bei 1.200,00 € monatlichem Einkommen:

Wenn 1 % von 1.200,00 € = 12,00 €,

dann ist 0,1 % von 1.200,00 € = 1,20 €.

Dann ist 0,8 % Ersparnis pro Monat: $8 \cdot 1,20 € = 9,60 €$.

Ersparnis im Jahr: $12 \cdot 9,60 € = 115,20 €$

Bei 1.350,00 € monatlichem Einkommen:

Wenn 1 % von 1.350,00 € = 13,50 €,

dann ist 0,1 % von 1.350,00 € = 1,35 €.

Dann ist 0,8 % Ersparnis pro Monat: $8 \cdot 1,35 € = 10,80 €$.

Ersparnis im Jahr: $12 \cdot 10,80 € = 129,60 €$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

4. Sie mussten den Wasserhahn in der Küche von Fachleuten reparieren lassen und erhalten die Rechnung mit einem Rechnungsbetrag von 126,80 € inkl. Mehrwertsteuer (MwSt.). Wenn Sie den Rechnungsbetrag innerhalb von 7 Tagen überweisen, erhalten Sie Skonto (Preisnachlass) von 3 %, bei Zahlung innerhalb von 8 bis 10 Tagen immerhin noch 2 % Skonto. Wie viel sparen Sie in beiden Fällen?

Siehe Abschnitt 17.5.11, Unterrichtseinheit Mathekonferenz und Kursgespräch – Den verminderten Grundwert bestimmen (erstes Beispiel).

5. Es ist der 7. Februar, Ihre Heizung ist defekt – ausgerechnet bei Außentemperaturen von -5°C ! Die Vermieterin weiß schon Bescheid, unternimmt aber nichts. Sie machen Gebrauch von der Möglichkeit, die Miete zu mindern. Für Heizungsausfall im Winter gibt es Gerichtsurteile, die eine Minderung von 50 % oder 75 % rechtfertigen. Sie entscheiden sich für eine Minderung von 60 % bei einer Gesamtmiete (inkl. aller Nebenkosten) von 678 €.

- a) Berechnen Sie den monatlichen Minderungsbetrag in €.

$$60\% \text{ von } 678,00\text{ €: } 678,00\text{ €} \cdot \frac{60}{100} = 406,80\text{ €}$$

- b) Wie hoch ist die Miete, die Sie dann rückwirkend ab diesem Monat bezahlen?

$$678,00\text{ €} - 406,80\text{ €} = 271,20\text{ €}$$

- c) Sie haben schon die Miete für den laufenden Monat überwiesen und müssen die Minderung für diesen und nächsten Monat mit der Miete des nächsten Monats verrechnen. Wie viel Miete müssen Sie dann im nächsten Monat überweisen?

$$\text{Minderung für zwei Monate: } 2 \cdot 406,80\text{ €} = 813,60\text{ €} \rightarrow \text{Miete} = 678,00\text{ €}.$$

Der Minderungsbetrag für zwei Monate übersteigt die Monatsmiete um $678,00\text{ €} - 813,60\text{ €} = -135,60\text{ €}$, die der Vermieter an Sie zurücküberweisen müsste. Da er das wahrscheinlich nicht tun wird, muss dieser Betrag von der übernächsten Miete abgezogen werden:

$$678,00\text{ €} - 135,60\text{ €} = 542,40\text{ €}.$$

Beachten Sie, dass Sie auch die 60 % Minderung abziehen, wenn die Heizung noch nicht repariert ist. Dann müssten Sie nur $542,40\text{ €} - 406,80\text{ €} = 135,60\text{ €}$ überweisen.

- d) Wie viel Miete müssen Sie überweisen, wenn Sie die Miete nur um 50 % mindern? Und wie viel Miete bleibt nach einer Minderung von 75 %?

$$\text{Bei } 50\%: 678,00\text{ €} \cdot \frac{50}{100} = 678,00\text{ €} : 2 = 339,00\text{ € Miete pro Monat.}$$

$$\text{Bei } 75\%: 678,00\text{ €} \cdot \frac{75}{100} = 508,50\text{ € Minderung. Dann müssten Sie } 678\text{ €} - 508,50\text{ €} = 169,50\text{ € Miete pro Monat überweisen.}$$

Zahlbereich				Rechenoperationen						Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1000	größer 1000	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Brüche	Prozente	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal- system	

6. Sie möchten ein Regal selbst bauen, der Baumarkt empfiehlt, beim Holzkauf 15–20 % Verschnitt einzukalkulieren. Der Preis je m² Holz beträgt 20,31 €. Sie benötigen für Ihr Regal 3 m² Holz. Wie viel kostet das Regal insgesamt?

Holzbedarf: $3 \text{ m}^2 \cdot 1,15 = 3,45 \text{ m}^2$ bei 15% Verschnitt und
 $3 \text{ m}^2 \cdot 1,20 = 3,60 \text{ m}^2$ bei 20% Verschnitt.

Der Preis liegt dann zwischen:

$$3,45 \text{ m}^2 \cdot 20,31 \text{ €/m}^2 = 70,07 \text{ €} \text{ und } 3,60 \text{ m}^2 \cdot 20,31 \text{ €/m}^2 = 73,12 \text{ €}.$$

7. Der Preis von Büchern enthält immer auch die Mehrwertsteuer von 7 %. Die Buchhandlung nebenan hat eine alte Kasse, die die MwSt. nicht automatisch ausweist, und muss eine Quittung ausstellen über ein verkauftes Buch von 9,99 €. Wie groß ist der darin enthaltene MwSt.-Betrag?
 Wie hoch ist der Nettopreis?

$$\text{MwSt.: } 9,99 \text{ €} : 1,07 \cdot 7 = 0,65 \text{ €}$$

$$\text{Nettopreis: } 9,99 \text{ €} - 0,65 \text{ €} = 9,34 \text{ €}$$

ABBILDUNG 17.1-1

Mengendarstellung der Zahlzerlegung der 27 in 20 und 7

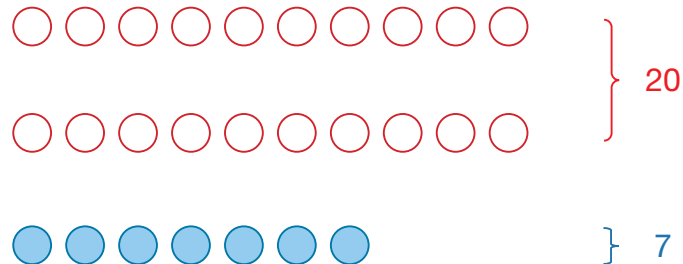


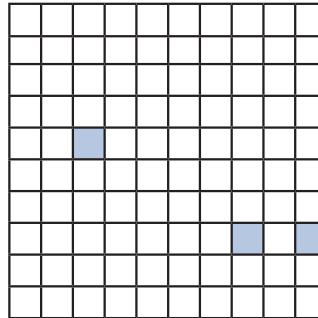
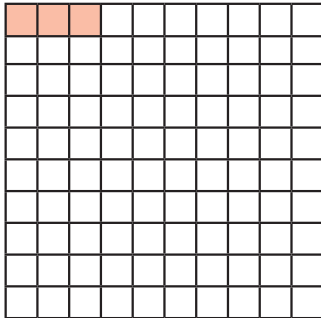
ABBILDUNG 17.1-2

Mengendarstellung 27 in drei gleich große Teile geteilt – unterschiedliche Anordnungen



ABBILDUNG 17.4-1

Darstellung von drei Hundertsteln oder drei Prozent: Bruch, Dezimalzahl, Prozentsatz



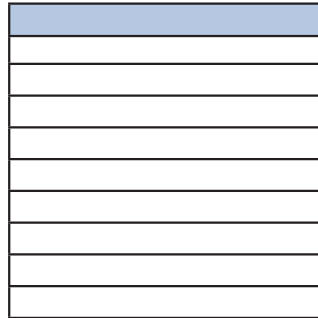
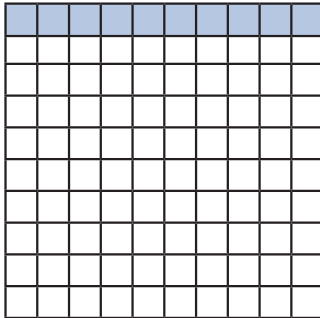
$$\frac{3}{100}$$

$$0,03$$

$$3\%$$

ABBILDUNG 17.4-2

Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{10}{100}$



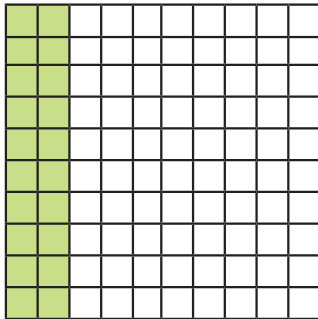
$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

0,10

10%

ABBILDUNG 17.4-3

Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{20}{100}$



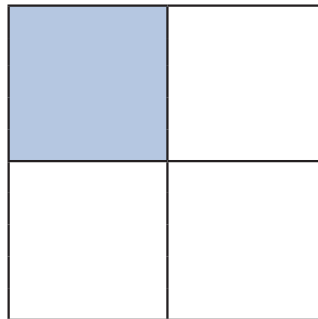
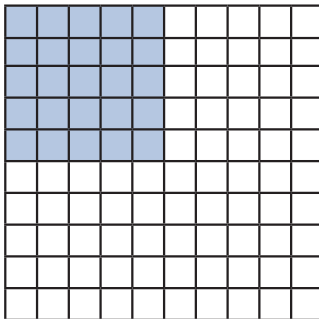
$$\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

0,20

20%

ABBILDUNG 17.4-6

Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{1}{4}$



$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$0,25$$

$$25\%$$

ABBILDUNG 17.5-1

Darstellung Rabatt

20 % am Zahlenstrahl bis 100 % = 598,00 €

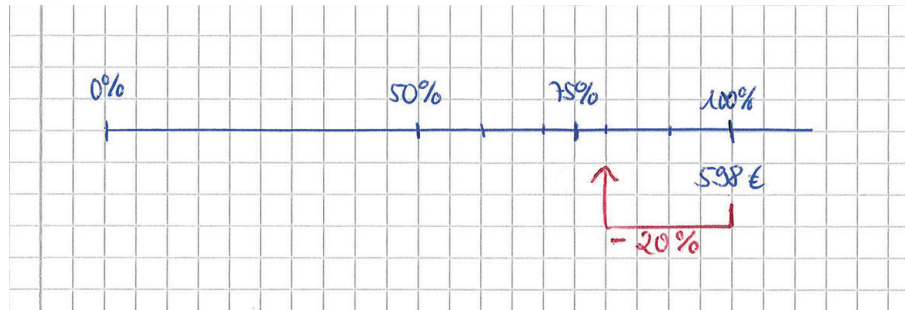


ABBILDUNG 17.5-2

Zerlegung von 100 in gleich große Teile à 20 als Zahlzerlegung und am Zahlenstrahl

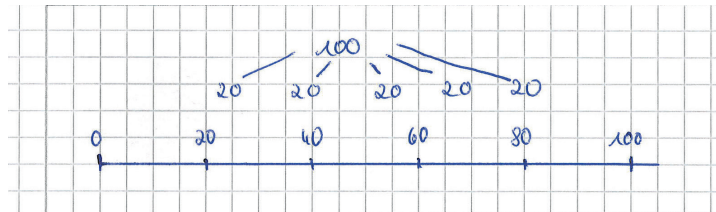
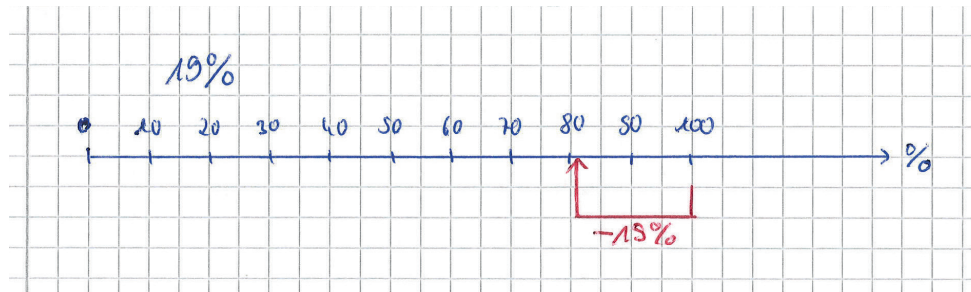


ABBILDUNG 17.5-3

Darstellung Rabatt von 19% am Zahlenstrahl bis 100



Darstellung 100 zerlegt in 100 Teile

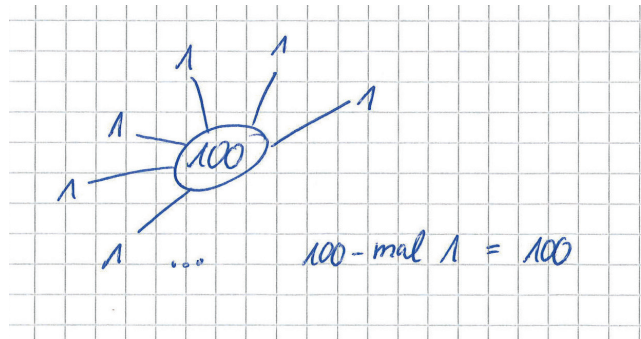


ABBILDUNG 17.5-5

Darstellung 100% zerlegt in 100 Teile à 1%

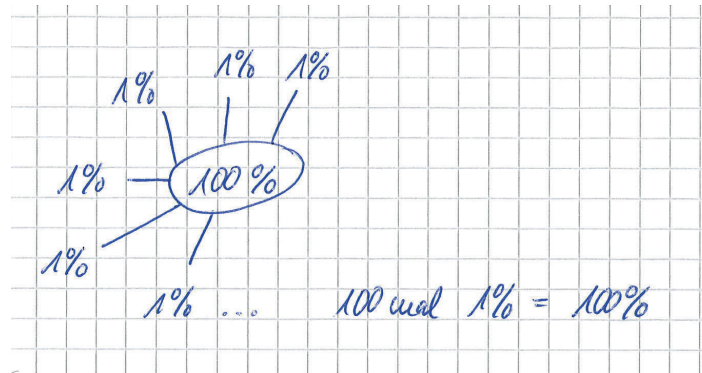


ABBILDUNG 17.5-6

Zerlegung von 100 % in 100 Teile im Hunderterfeld

1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	} 10 % Das Ganze 100 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	

Grundwert 598,00€ in 100 Teile zerlegt

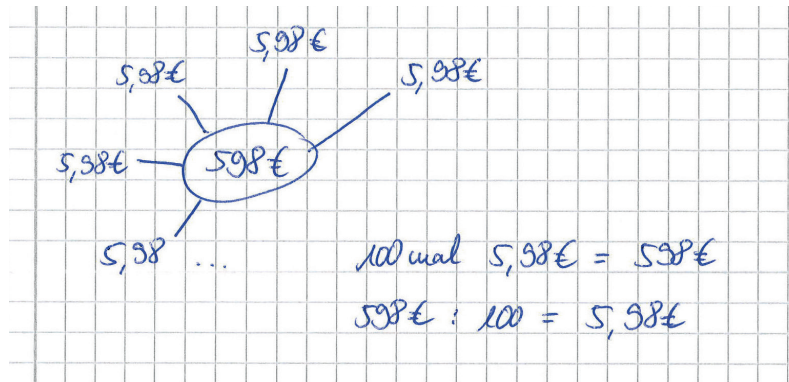


ABBILDUNG 17.5-8

Grundwert 598,00€ in 100 Teile zerlegt (Hunderterfeld)

5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€

Das Ganze
598,00€

ABBILDUNG 17.5-9

2% vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €

Das Ganze
598,00 €

ABBILDUNG 17.5-10

5% vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €

Das Ganze
598,00 €

ABBILDUNG 17.5-11

10% vom Grundwert 598,00€ (blau markiert)

5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€

Das Ganze
598,00€

ABBILDUNG 17.5-12

20% vom Grundwert 598,00€ (blau markiert)

5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€

Das Ganze
598,00€

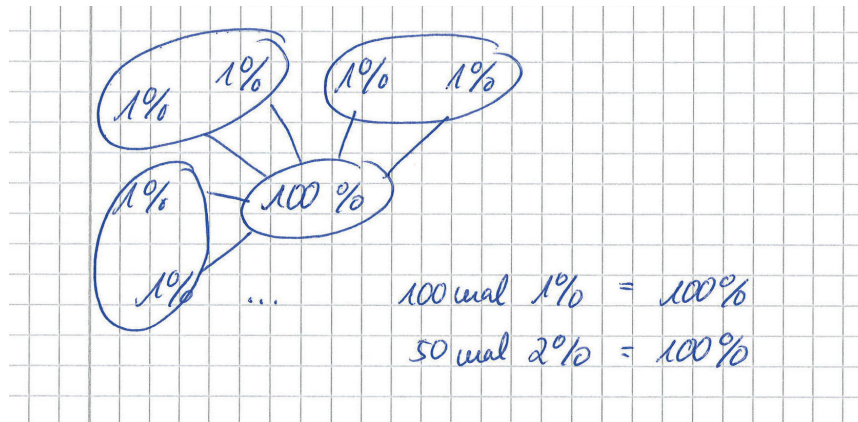
ABBILDUNG 17.5-13

19% vom Grundwert 598,00€ (blau markiert)

5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€

Das Ganze
598,00€

Immer 2% von 100 ist 50-mal möglich



Lösungswege für 2 % von 598,00€

The diagram illustrates two ways to calculate 2% of 598,00€. The top path starts at 100%, divides by 100 (green arrow), then multiplies by 2 (green arrow) to reach 2%. The bottom path starts at 100%, divides by 50 (red arrow) to reach 2% directly. The table below shows the corresponding values.

Prozentsatz	100 %	1 %	2 %
Prozentwert	598,00 €	5,98 €	11,96 €

Lösungswege für 5 % von 598,00€

Prozentsatz	100 %	1 %	2 %	5 %	10 %
Prozentwert	598,00 €	5,98 €	11,96 €	29,90 €	59,80 €

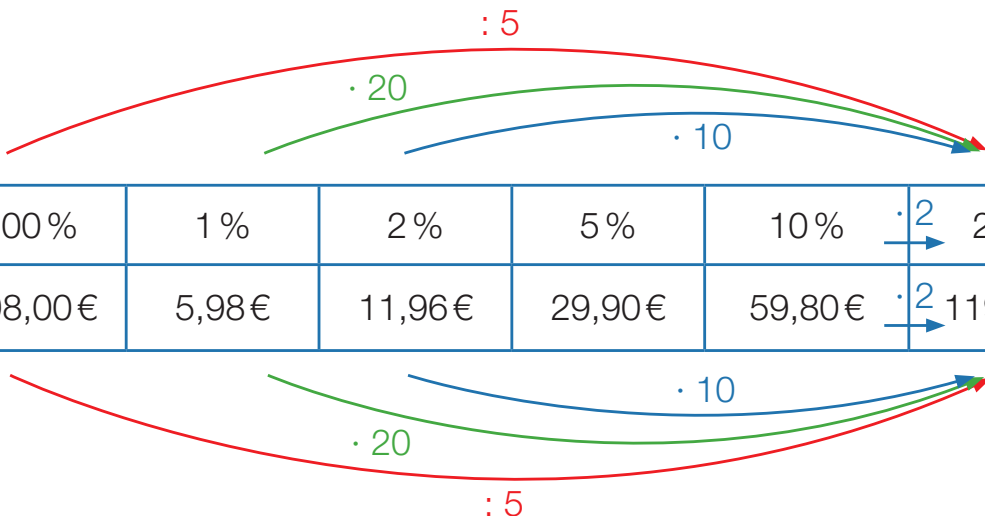
Lösungswege für 10% von 598,00€

					$\cdot 10$	
					$: 10$	
Prozentsatz	100%	1%	2%	5%	$\cdot 2$	10%
Prozentwert	598,00€	5,98€	11,96€	29,90€	$\cdot 2$	59,80€

Diagram illustrating the calculation of 10% of 598,00€ using a table and arrows:

- Prozentsatz (Percentage):** 100%, 1%, 2%, 5%, 10%
- Prozentwert (Percentage Value):** 598,00€, 5,98€, 11,96€, 29,90€, 59,80€
- Arrows:**
 - Red arrow from 100% to 10% labeled $: 10$
 - Green arrow from 1% to 10% labeled $\cdot 10$
 - Red arrow from 100% to 59,80€ labeled $: 10$
 - Green arrow from 1% to 59,80€ labeled $\cdot 10$

Lösungswege für 20 % von 598,00 €



The diagram illustrates four ways to calculate 20% of 598,00 € by breaking it down into smaller percentages. Arrows show the progression from 100% to 20% through intermediate values, with labels indicating the multiplier used at each step.

Prozentsatz	100%	1%	2%	5%	10%	→ · 2 →	20%
Prozentwert	598,00 €	5,98 €	11,96 €	29,90 €	59,80 €	→ · 2 →	119,60 €

Calculation paths shown by arrows:

- Red arrow: 100% → 5% (· 20) → 20% (: 5)
- Green arrow: 100% → 1% (· 20) → 20% (: 5)
- Blue arrow: 100% → 2% (· 10) → 20% (: 5)
- Blue arrow: 100% → 5% (· 10) → 20% (: 5)

Graphische Darstellung des Beispiels Verkehrskontrolle mittels Zahlzerlegung



Graphische Darstellungen des Beispiels Verkehrskontrolle mittels Balken und Zahlenstrahl

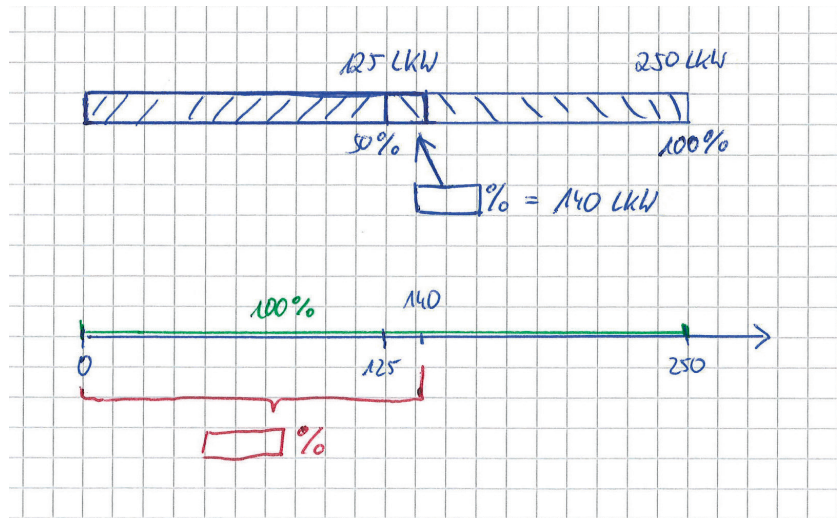


ABBILDUNG 17.5-21

Grundwert 100 % (250 LKW) in 100 Teile zerlegt

1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %

Das Ganze
(250 LKW = 100 %)

ABBILDUNG 17.5-22

Grundwert 250 LKW in 100 Teile à 2,5 LKW zerlegt

2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5

Das Ganze
(250 LKW = 100%)

Prozentsätze mittels Zuordnung für einen LKW und 140 LKW ermitteln

Prozentwert	250	1	140
Prozentsatz	100 %		

Lösung Prozentsätze mittels Zuordnung für einen LKW und 140 LKW

		$\div 250$	$\cdot 140$
Prozentwert	250	1	140
Prozentsatz	100 %	0,4 %	56 %

Lösung Prozentsätze mittels Zahlzerlegung für einen LKW und 140 LKW

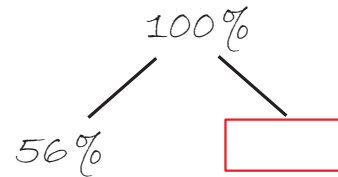
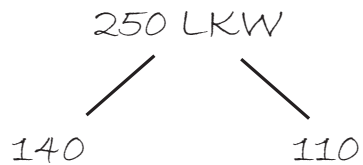


ABBILDUNG 17.5-26

Prozentangaben in Nahrungsmitteln zum Tagesbedarf eines „durchschnittlichen“ Erwachsenen

Nährwertangaben je:

	100 ml	200 ml	(%*)
Brennwert:	180 kJ	450 kJ	
	42 kcal	105 kcal	(5 %)
Fett	0 g	0 g	(0 %)
davon gesättigte Fettsäuren	0 g	0 g	(0 %)
Kohlenhydrate:	10,6 g	27 g	(10 %)
davon Zucker	10,6 g	27 g	(29 %)
Eiweiß	0 g	0 g	(0 %)
Salz:	0 g	0 g	(0 %)

* Referenzmenge für einen durchschnittlichen Erwachsenen (8400 kJ/2000kcal).

	100 g	16,7 g	%*/16,7 g
davon Zucker	47 g	7,9 g	9 %
Ballaststoffe	3,3 g	0,6 g	–
Eiweiß	8,1 g	1,3 g	3 %
Salz	0,30 g	0,05 g	1 %

ABBILDUNG 17.5-27

Darstellung eines Rabattes von 10% im Hunderterfeld

1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	} 10 % Das Ganze 100 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	

ABBILDUNG 17.5-28

**Darstellung eines Rabattes von 10 %
mit einem Prozentwert von 30,00€ im Hunderterfeld**

3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€
3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€
3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€
3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€
3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€
3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€
3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€
3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€
3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€
3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€	3,00€

10% = 30,00€

Das Ganze
(100%)

ABBILDUNG 17.5-29

Darstellung eines Rabattes von 10% im Wert von 30,00€ im Hunderterfeld

10 % = 30,00 €		
10 %	}	
10 %		
10 %		
10 %		
10 %		
10 %	}	90 % = €
10 %		
10 %		
10 %		
10 %		

100 % = €

ABBILDUNG 17.5-30

**Darstellung eines Rabattes von 10 %
im Wert von 30,00€ als Zahlzerlegung**

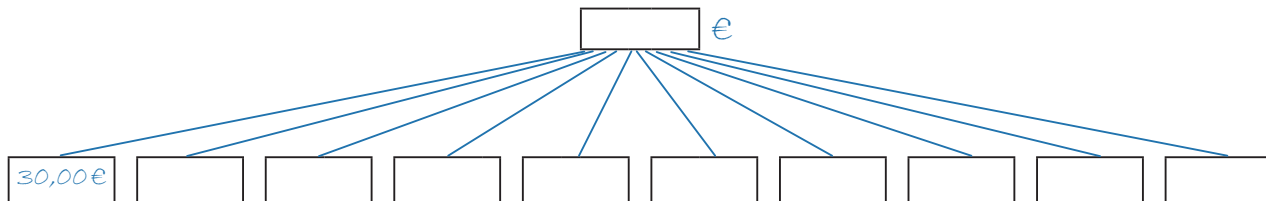


ABBILDUNG 17.5-34

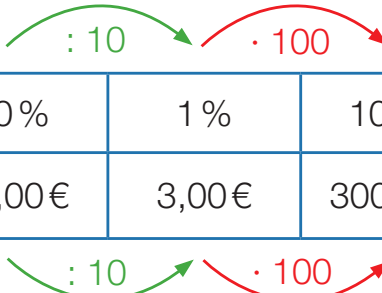
Darstellung von $100\% = 10 \cdot 30,00\text{€}$

										10 % = 30,00€
										10 % = 30,00€
										10 % = 30,00€
										10 % = 30,00€
										10 % = 30,00€
										10 % = 30,00€
										10 % = 30,00€
										10 % = 30,00€
										10 % = 30,00€
										10 % = 30,00€

Zuordnung Prozentwert von 30,00€ zum Prozentsatz 10 %

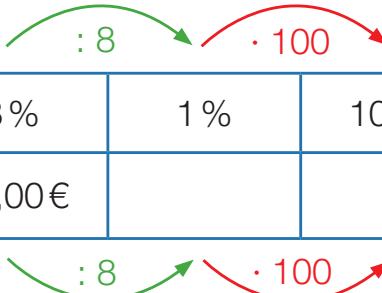
Prozentsatz	10 %	1 %	100 %
Prozentwert	30,00€		

Lösung – Zuordnung Prozentwert von 30,00 € zum Prozentsatz 10 %



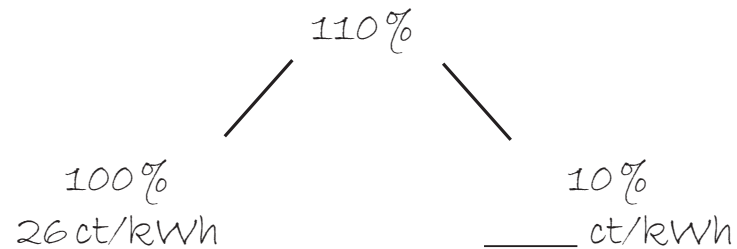
Prozentsatz	10 %	1 %	100 %
Prozentwert	30,00 €	3,00 €	300,00 €

Zuordnung Prozentwert von 15,00€ zum Prozentsatz von 8%

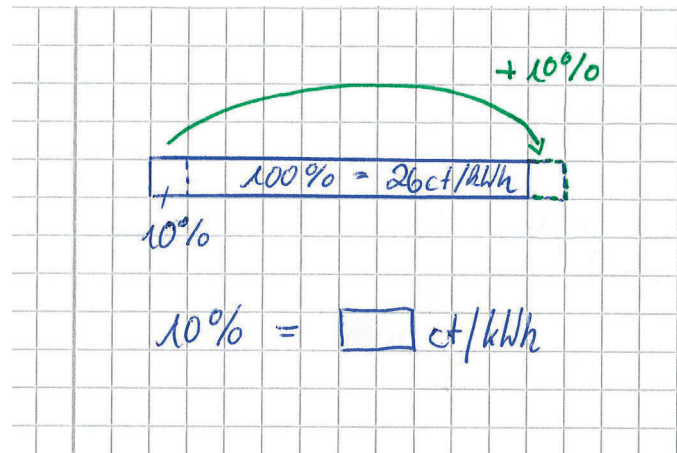


Prozentsatz	8 %	1 %	100 %
Prozentwert	15,00 €		

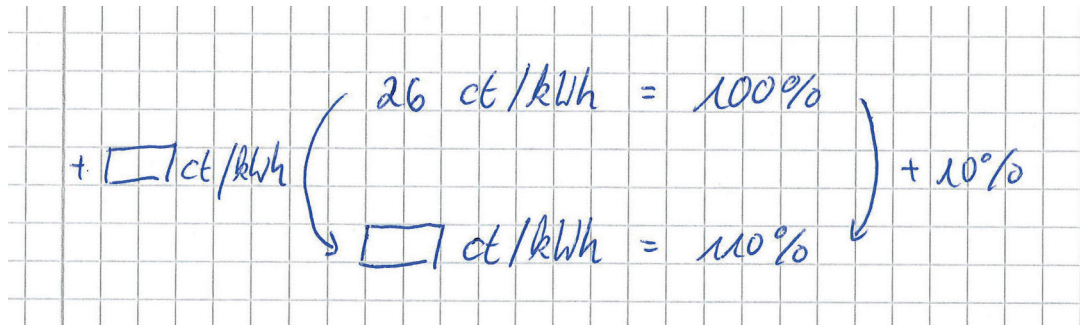
Darstellung Preiserhöhung für Strom mit Zahlzerlegung



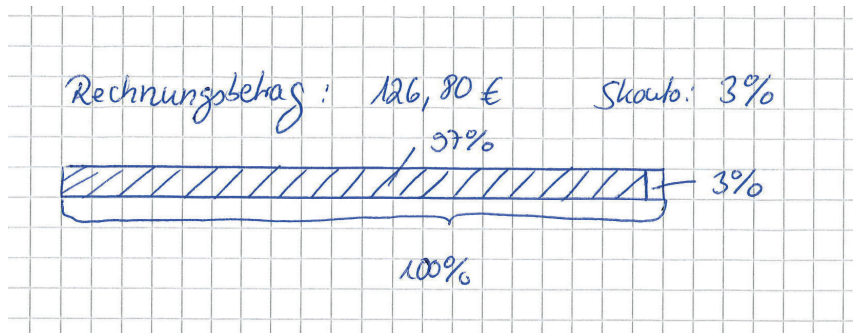
Darstellung Preiserhöhung für Strom im Balkendiagramm



Darstellung Preiserhöhung für Strom als Zuordnung



Darstellung Skonto von 3% im Balkendiagramm



Darstellung Preiserhöhung für Strom mit Zahlzerlegung

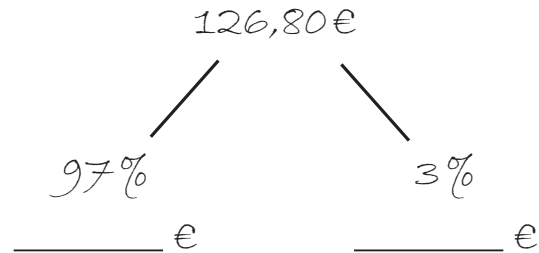
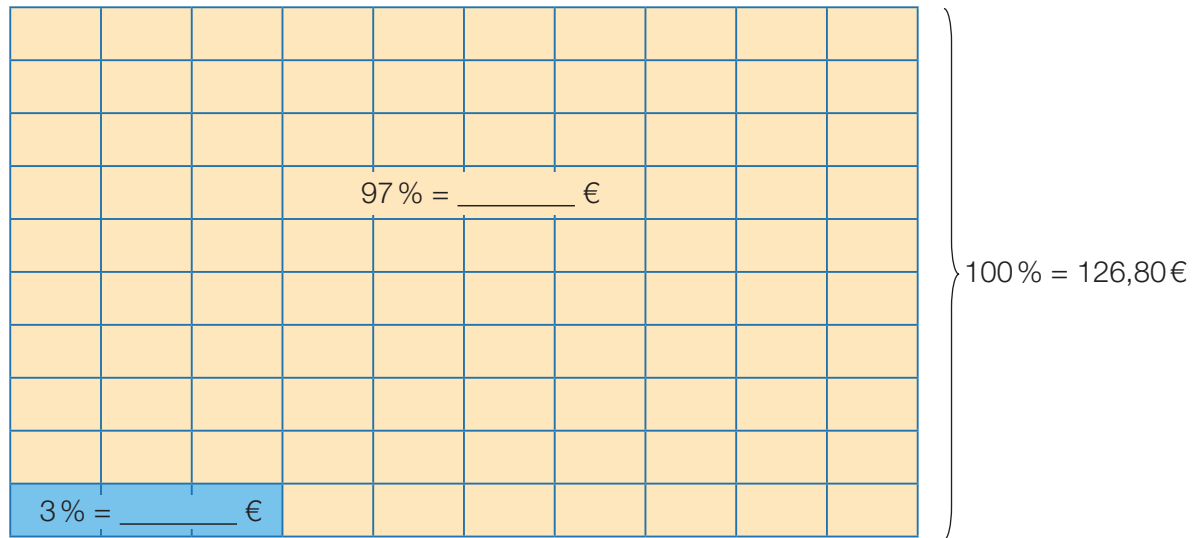


ABBILDUNG 17.5-46

Darstellung Skonto von 3% im Hunderterfeld



Darstellung Skonto von 3% mit Zuordnung (Dreisatz)

$$\begin{array}{rcl} & 100\% = 126,80\text{€} & \\ \text{: } 100 & \curvearrowright & \text{: } 100 \\ & 1\% = \underline{\hspace{2cm}}\text{€} & \\ \cdot 97 & \curvearrowright & \cdot 97 \\ & 97\% = \underline{\hspace{2cm}}\text{€} & \end{array}$$

Vergleich von zwei Tablet-Angeboten

	①	②
Preis Sofortkauf	499,00 €	480,00 €
Ratenanzahl	18	22
Ratenhöhe	29,44 €	25,00 €

Zuordnung für das erste Tablet

Prozentwert	499,00 €	1,00 €	529,92 €
Prozentsatz	100 %		

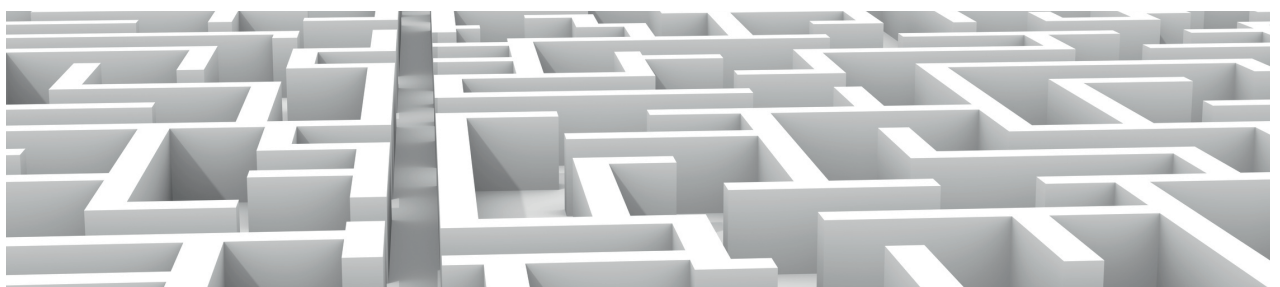
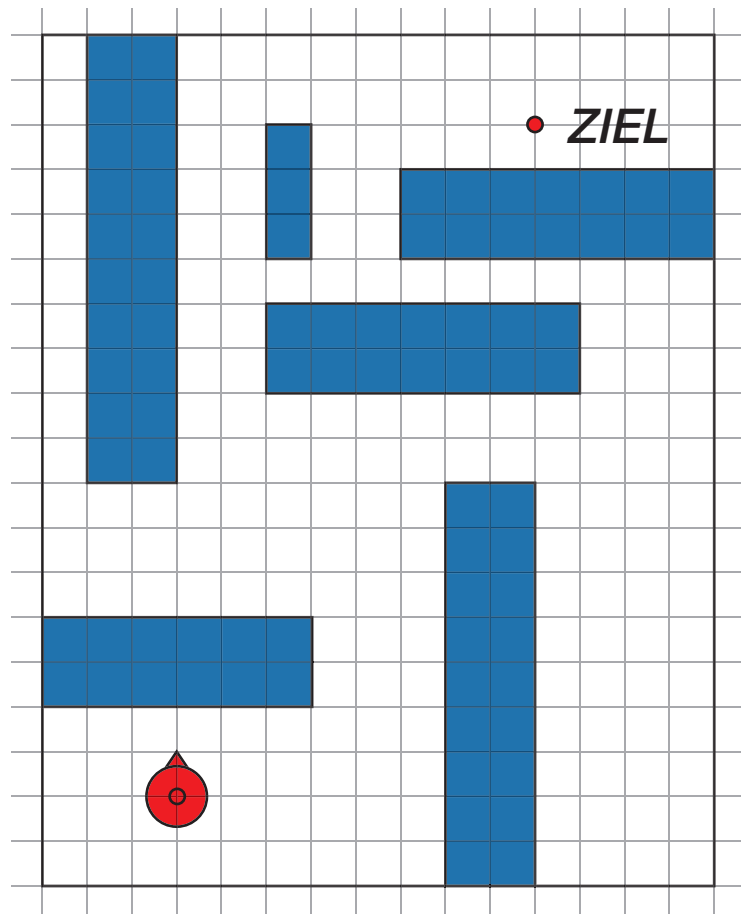
Zuordnung für das zweite Tablet

Prozentwert	480,00 €	1,00 €	550,00 €
Prozentsatz	100 %		

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

1. Wege beschreiben, Person schaut stets in die gleiche Richtung

Die Person in diesem Bild kann vorwärtsgehen. Sie kann auch rückwärts sowie seitwärts nach links und rechts gehen, dreht sich dabei aber nicht. Beschreiben Sie den Weg vom Start zum Ziel an den Hindernissen vorbei. Nutzen Sie zum Angeben von Entfernungen das Quadratgitter.

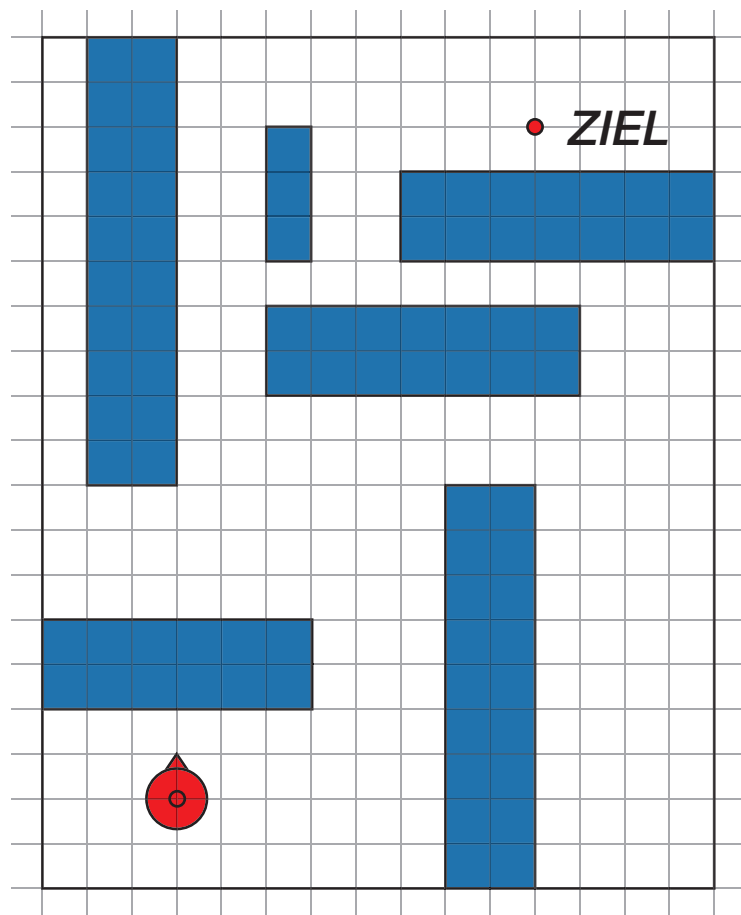


Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

2. Wege beschreiben, Person kann sich vor dem Weitergehen drehen

Die Person in diesem Bild kann nur vorwärtsgehen. Sie kann sich aber vor dem Weitergehen nach links oder rechts drehen und geht dann vorwärts in die neue Richtung.

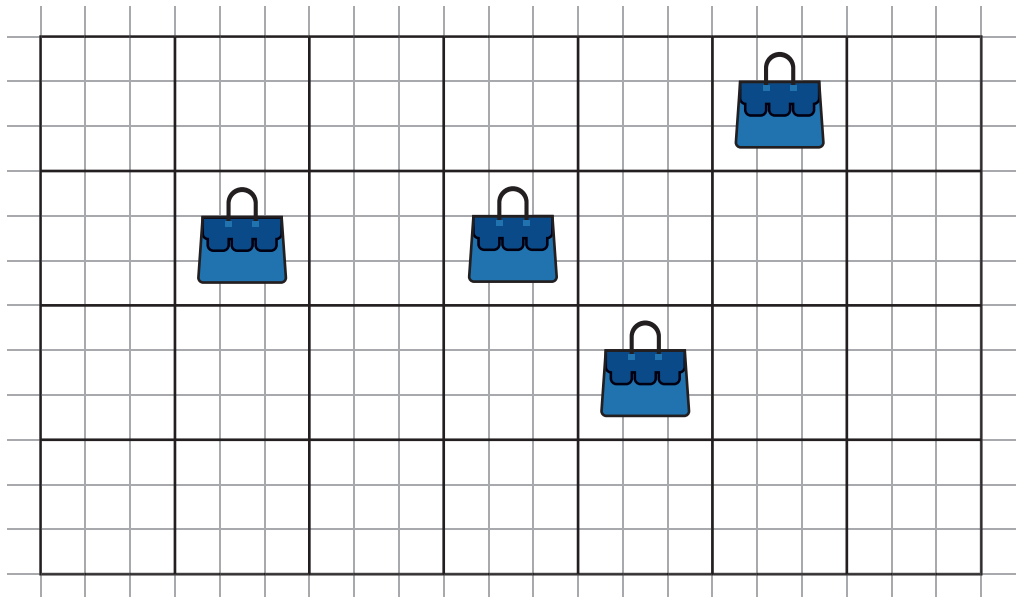
Beschreiben Sie ihr einen Weg vom Start zum Ziel an den Hindernissen vorbei. Nutzen Sie zum Angeben von Entfernungen das Quadratgitter.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

3. Taschenregal

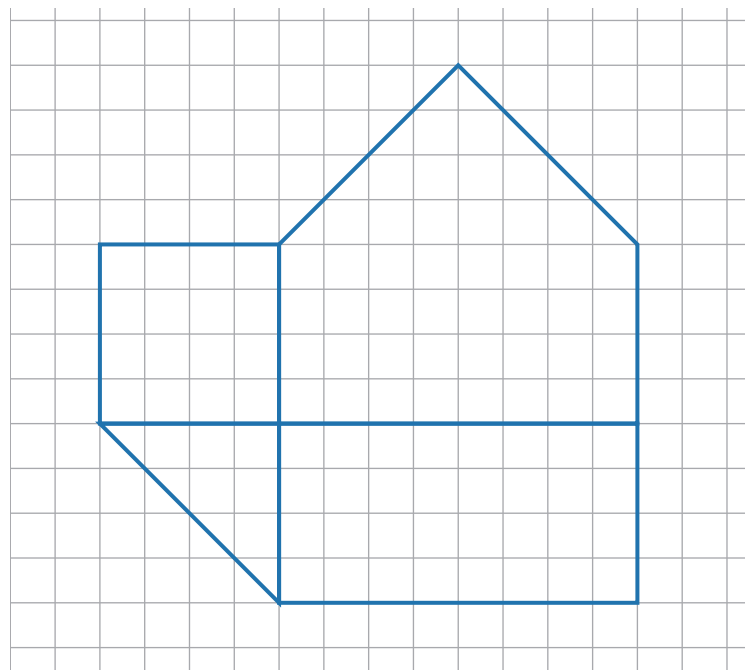
In ein Regal mit Schließfächern werden vier Taschen gestellt. Alle Fächer werden mit Türen verschlossen. Beschreiben Sie, in welchen Fächern die Taschen stehen.



Bereiche			Handlungen								Inhalte			Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

4. Ebene Figurenteile beschreiben

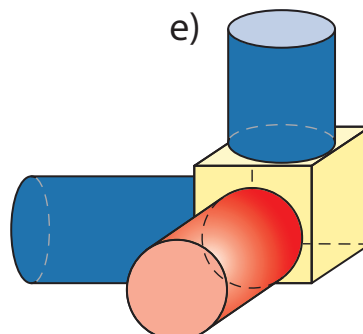
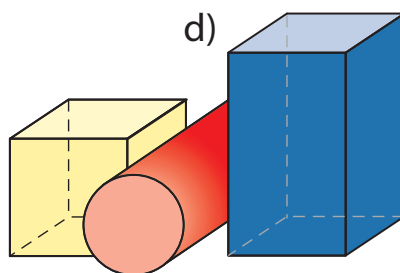
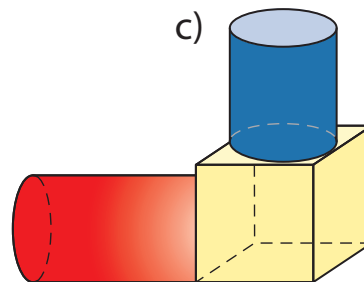
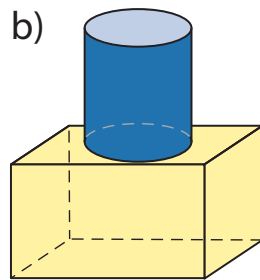
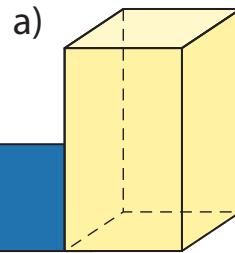
Diese Figur besteht aus vier ebenen Teilfiguren. Beschreiben Sie die Teilfiguren.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

5. Räumliche Figurenteile beschreiben

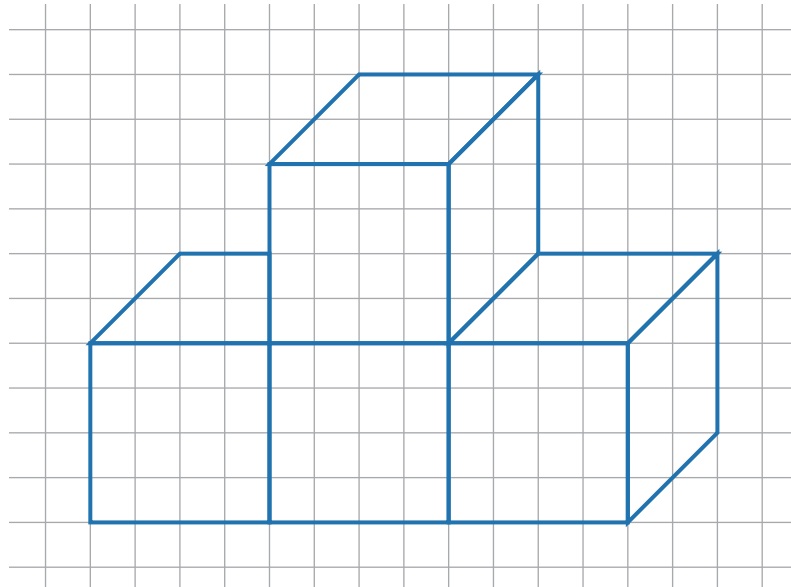
Diese Bauwerke bestehen aus zwei, drei oder vier Klötzen.
Welche Form haben die Klötze?



Bereiche			Handlungen								Inhalte			Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

6. Bauwerk und Teile anhand eines Bauvorgangs beschreiben

Hier sind vier gleich große Würfel zu einem Bauwerk zusammengefügt. Beschreiben Sie, wie dieses Bauwerk aus den vier Würfeln gebaut wird.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

7. Bauwerk aus vier Würfeln identifizieren

Es gibt vier gleich große Würfel.

Der erste Würfel wird auf den Tisch gesetzt.

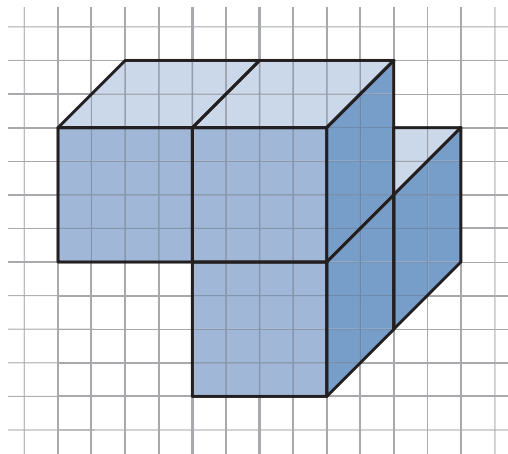
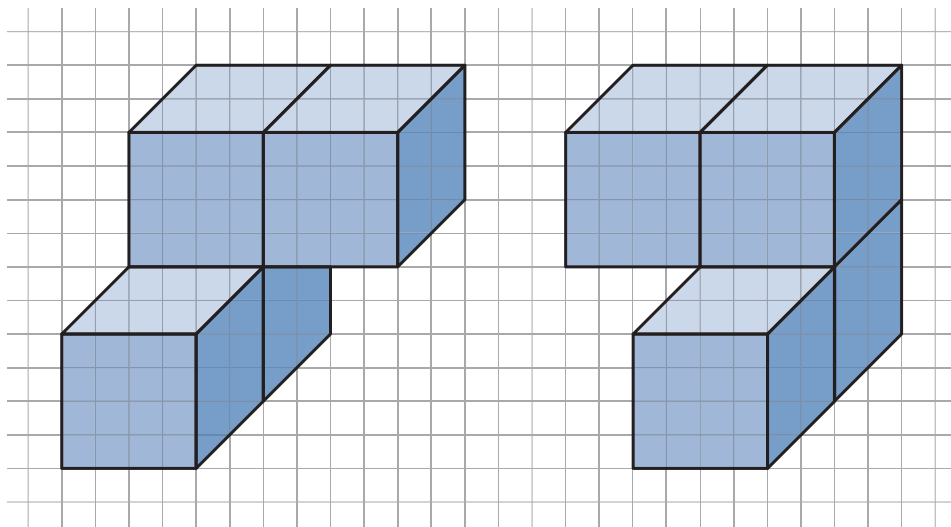
Der zweite wird davor an den ersten geklebt.

Der dritte wird auf den zweiten geklebt.

Der vierte wird rechts an den dritten geklebt.

Wie sieht das Bauwerk aus? Ist es auf den Bildern zu sehen?

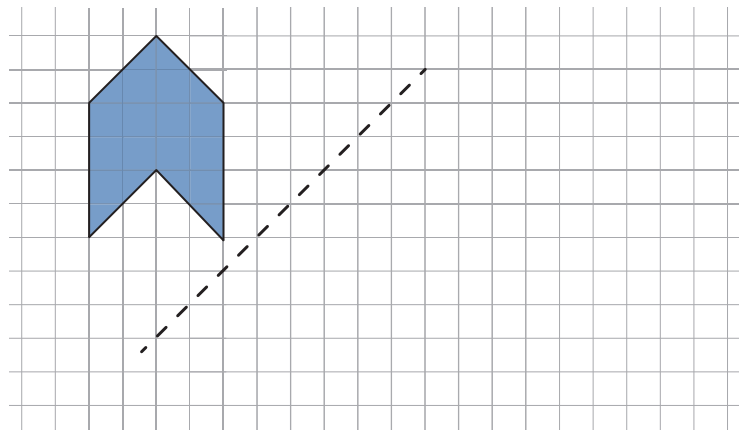
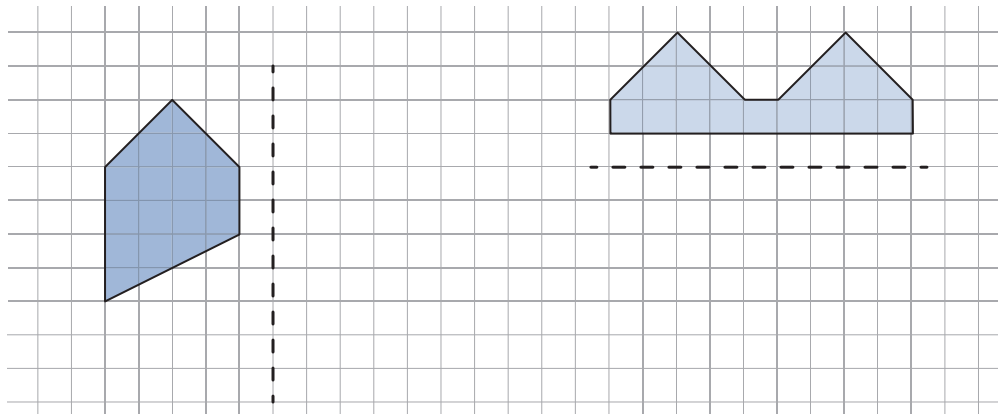
An welcher Stelle sollte man den Text möglicherweise ergänzen oder genauer fassen?



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

8. Spiegelbilder finden

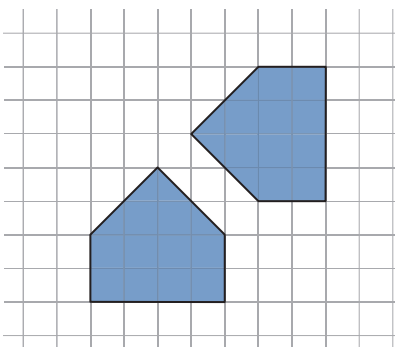
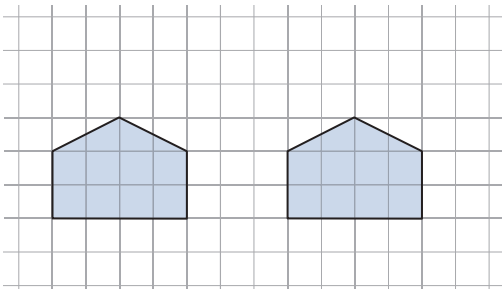
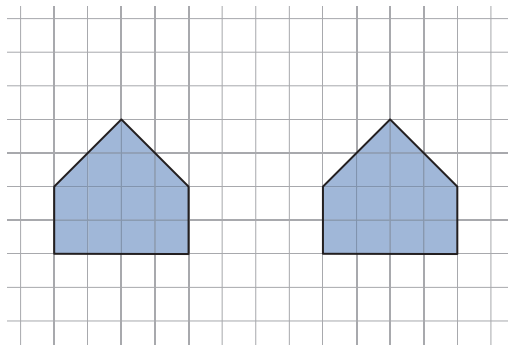
Zeichnen Sie zu den Figuren und den Spiegelachsen jeweils das Spiegelbild.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

9. Spiegelachsen finden

Zeichnen Sie zu den Figuren jeweils die Spiegelachse.

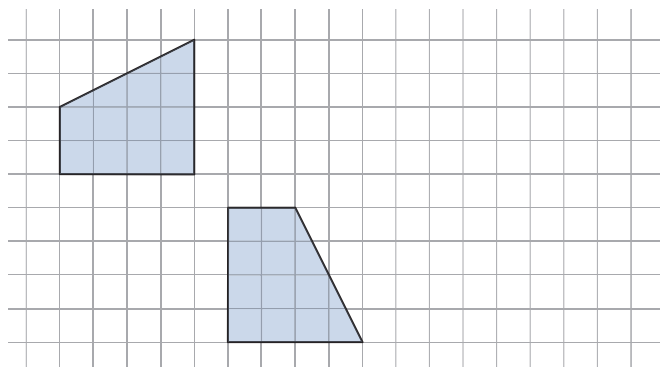
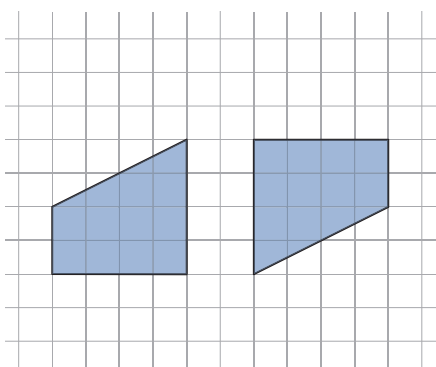


© emperorcosar/Fotolia

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

10. Bewegungen bei gedrehten Figuren beschreiben

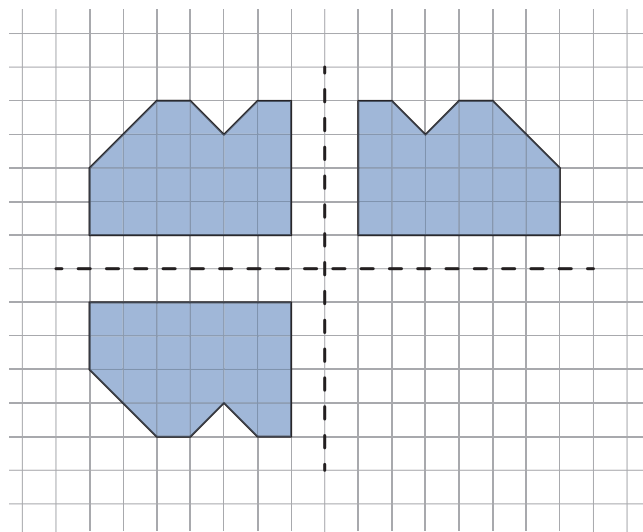
Beschreiben Sie, wie die beiden Figuren jeweils zusammenhängen.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

11. Spiegeln an zwei Achsen

Die Figuren sind an beiden Achsen gespiegelt. Ergänzen Sie die fehlende Figur.

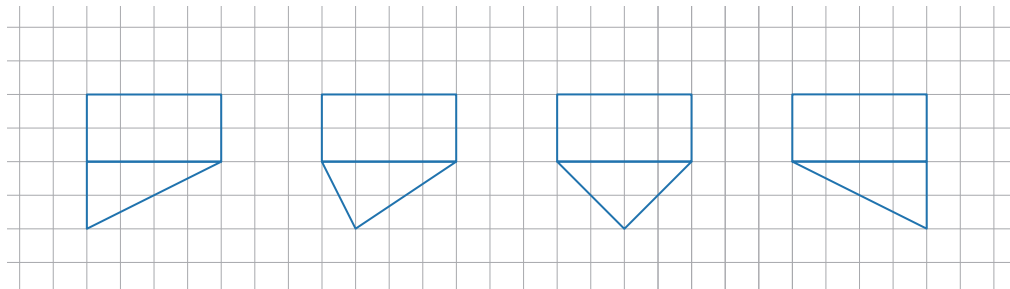


„Kann man die fehlende Figur auch durch Drehen finden?“

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

12. Flächen im Quadratgitter

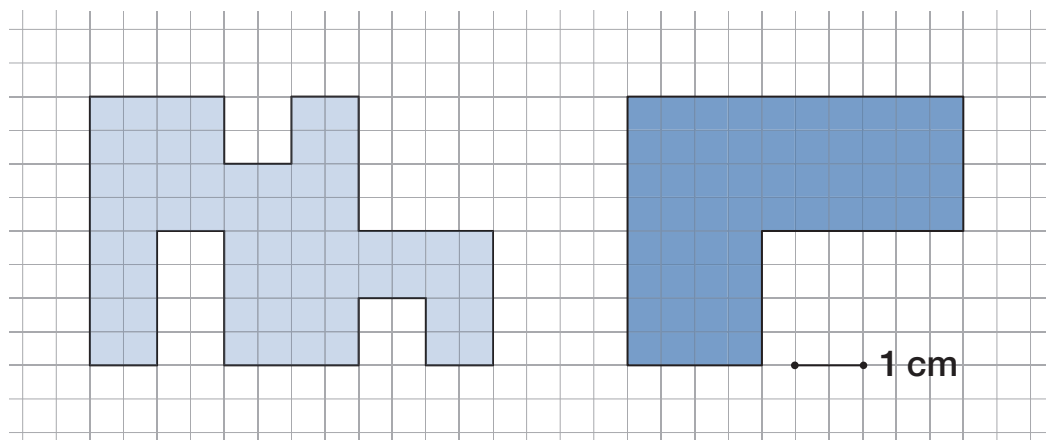
Hier sind vier Flächen im Gitter gezeichnet. Welche sind gleich groß?



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

13. Einteilen von Flächen zur Flächenmessung

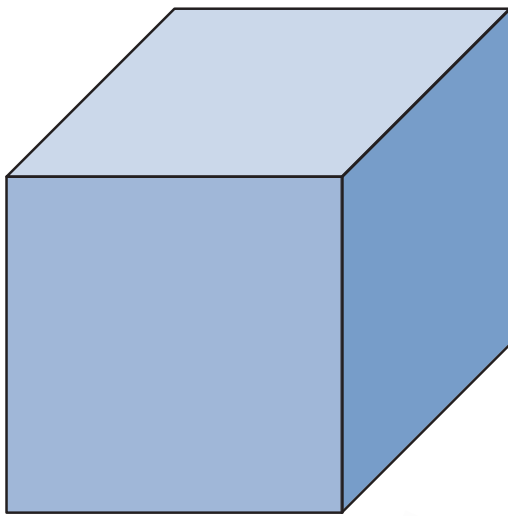
Teilen Sie diese Flächen in Rechtecke ein und bestimmen Sie damit ihr Flächenmaß.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

14. Würfelschnitt

Ein Würfel wird parallel zu einer Seitenfläche durchgeschnitten.
Wie viele solche Schnitte braucht man, bis die Oberfläche der Teile insgesamt doppelt so groß ist wie die des Würfels zu Beginn?

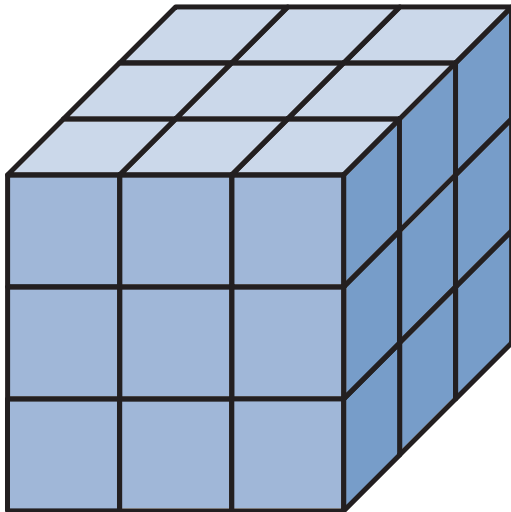


Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

15. Würfelschnitt

Hier ist ein Körper aus 27 kleinen Würfeln gebaut.

- Ist der große Körper auch ein Würfel?
- Oben vorn in der Mitte wird ein kleiner Würfel herausgenommen.
Ist die Oberfläche des Körpers nun kleiner geworden oder gleich-
geblieben, oder ist sie größer geworden?



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

16. Oberfläche einer Apfelsine

Ein Experiment:

Sie haben eine Apfelsine. Zeichnen Sie sechs Kreise mit demselben Durchmesser, den die Apfelsine hat. Schälen Sie nun die Apfelsine, zerteilen Sie die Schale in kleine Stückchen und decken Sie die Kreise mit den Schalenstückchen passend ab.

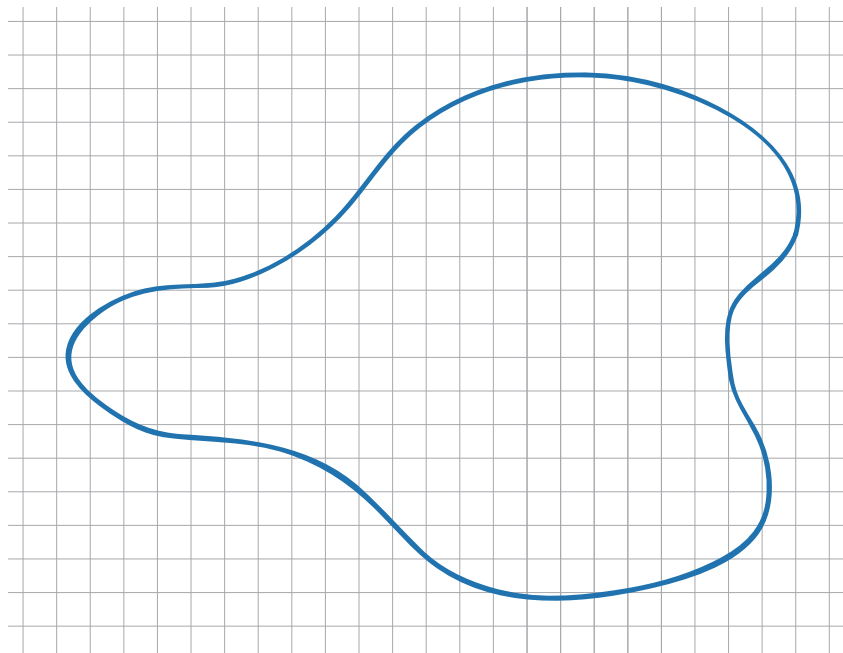
Wie viele Kreise kann man abdecken? Vergleichen Sie die Ergebnisse für verschieden große Apfelsinen.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

17. Fläche eines Sees mit einem Rechteck vergleichen

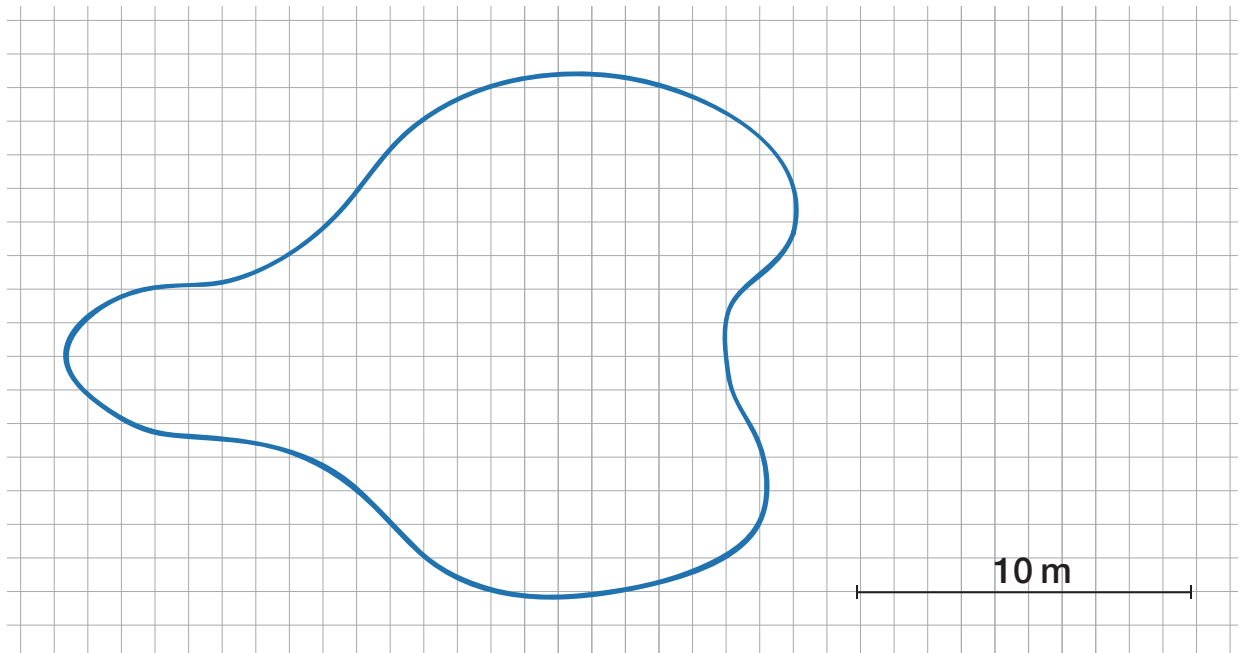
Hier ist ein See gezeichnet. Zeichnen Sie darüber ein Rechteck, das möglichst denselben Flächeninhalt hat wie der See.
Worauf ist dabei zu achten?



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

18. Durchmesser und Fläche eines Sees schätzen

Hier ist ein See gezeichnet. Zeichnen Sie darüber ein Rechteck, das möglichst denselben Flächeninhalt hat wie der See. Unten ist eine Strecke gezeichnet, die angibt, wie lang Strecken auf dieser Karte sind. Schätzen Sie damit den größten Durchmesser und den Flächeninhalt des Sees.



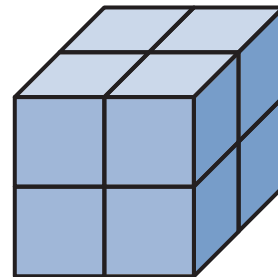
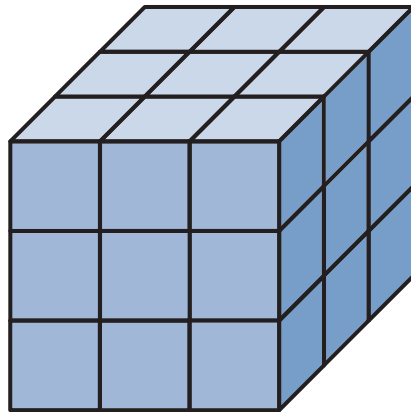
Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

19. Rauminhalt bei wachsenden Würfeln

Ein Würfel mit einem Dezimeter Kantenlänge hat einen Liter Rauminhalt.

a) Welchen Rauminhalt hat ein Würfel mit zwei Dezimetern Kantenlänge?

b) Welchen Rauminhalt hat ein Würfel mit drei Dezimetern Kantenlänge?



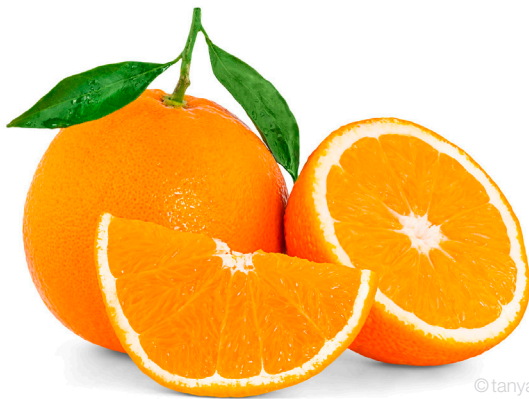
©christianfischer/Fotolia

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

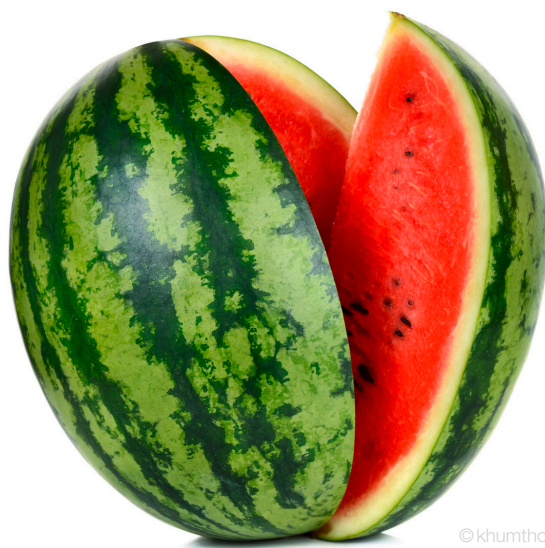
20. Rauminhalt bei wachsenden Kugeln

Eine Kugel mit einem Dezimeter Durchmesser, etwa eine große Orange, hat etwa einen halben Liter Rauminhalt.

Welchen Rauminhalt hat schätzungsweise eine Kugel mit zwei Dezimetern Durchmesser, etwa eine Melone?



© tanyaeroko / Fotolia



© khumthong / Fotolia

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

21. Rechtecke einteilen

- Zeichnen Sie drei Rechtecke, jeweils 8 cm breit und 6 cm hoch.
- Zerlegen Sie das erste Rechteck in 8 gleich große Teile, das zweite Rechteck in 6 gleich große Teile und das dritte Rechteck in 12 gleich große Teile.
- Beschreiben Sie, wie man vorgehen kann und was dabei zu entdecken ist.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

22. Bruchstreifen herstellen

Ein Rechteck ist in zwölf gleich breite Streifen eingeteilt.
 Zerlegen Sie schätzend und rechnend den zweiten Streifen in 2 gleich lange Teile, den dritten Streifen in 3 gleich lange Teile, den vierten Streifen in 4 gleich lange Teile und so weiter bis zum zwölften Streifen.
 Wie kann man vorgehen, und was ist dabei zu entdecken?

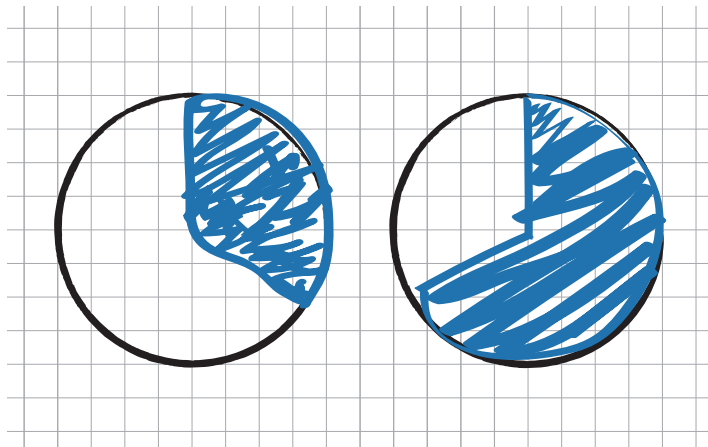
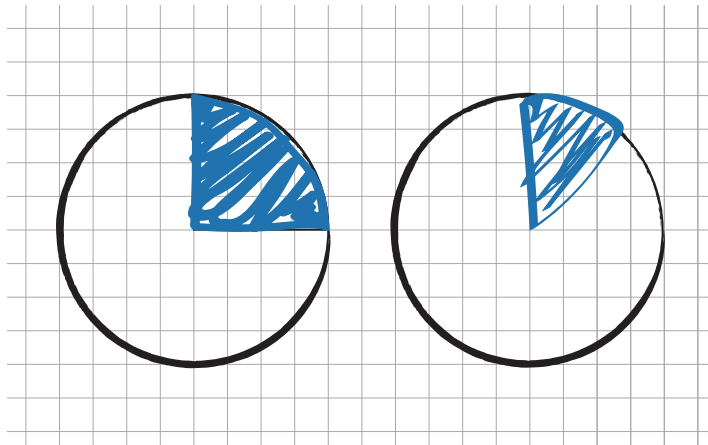


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

23. Kreisteile erkennen

Hier sind vier Kreise gezeichnet. Welcher Teil ist in den Kreisen jeweils markiert?

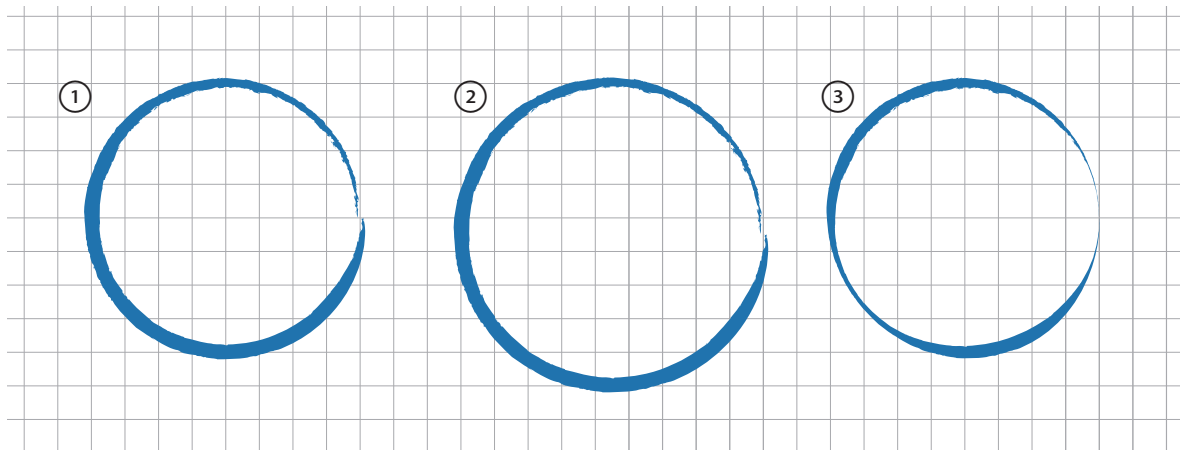


Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

24. Kreisteile markieren: Hälfte, Viertel, Drittel

Hier sind drei Kreise gezeichnet.

Markieren Sie schätzend in Kreis ① die Hälfte, in Kreis ② drei Viertel und in Kreis ③ ein Drittel.

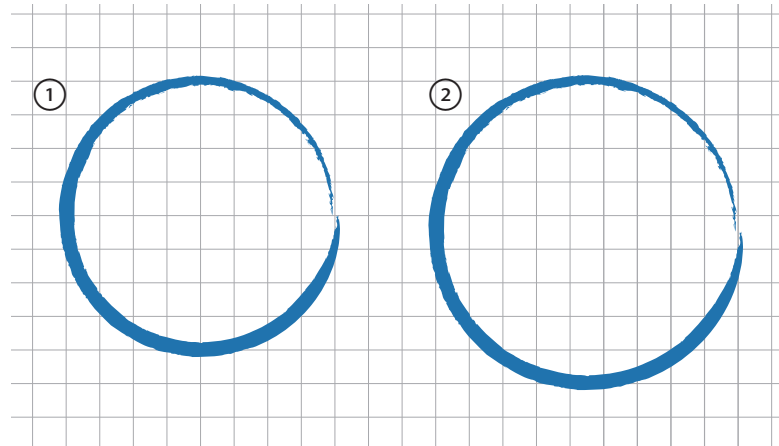


Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

25. Kreisteile markieren: Fünftel und Zehntel

Hier sind zwei Kreise gezeichnet.

- Markieren Sie schätzend in Kreis ① zwei Fünftel, die aussehen wie Tortenstücke.
- Versuchen Sie dann, Kreis ② in zehn gleich große Teile zu zerlegen, die aussehen wie Tortenstücke.
- Wie kann man vorgehen? Wie kann man prüfen, ob das Ergebnis gut ist?



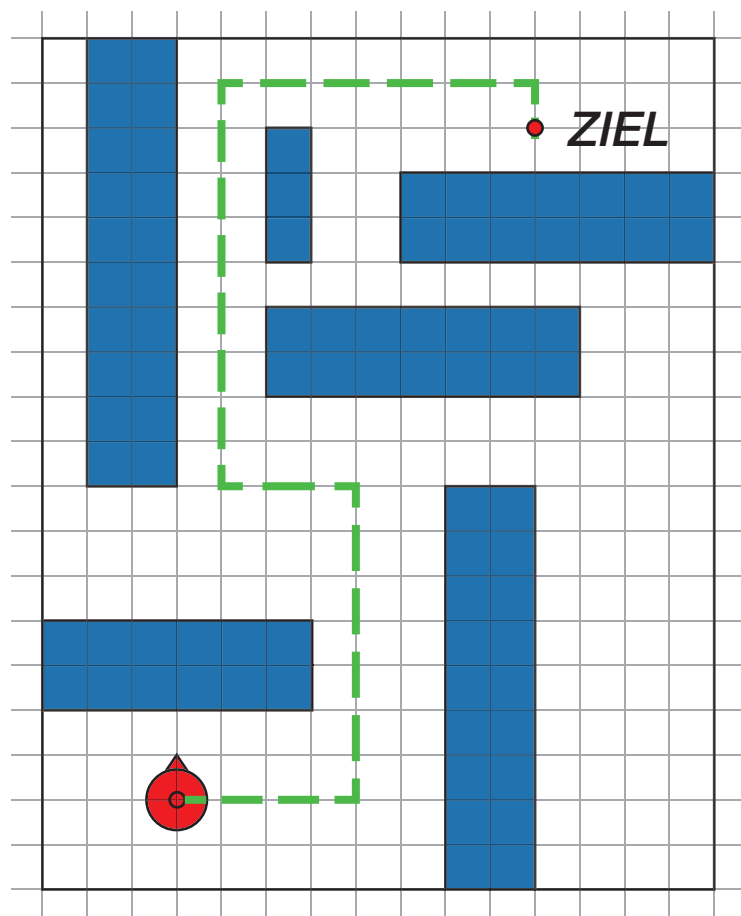
Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

1. LÖSUNGEN – Wege beschreiben, Person schaut stets in die gleiche Richtung

Die Person in diesem Bild kann vorwärtsgehen. Sie kann auch rückwärts sowie seitwärts nach links und rechts gehen, dreht sich dabei aber nicht. Beschreiben Sie den Weg vom Start zum Ziel an den Hindernissen vorbei. Nutzen Sie zum Angeben von Entfernungen das Quadratgitter.

Beispiel:

Gehen Sie 4 nach rechts, 7 geradeaus, 3 nach links, 9 geradeaus, 7 nach rechts, 1 rückwärts. Es gibt aber auch andere Möglichkeiten.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

2. LÖSUNGEN – Wege beschreiben, Person kann sich vor dem Weitergehen drehen

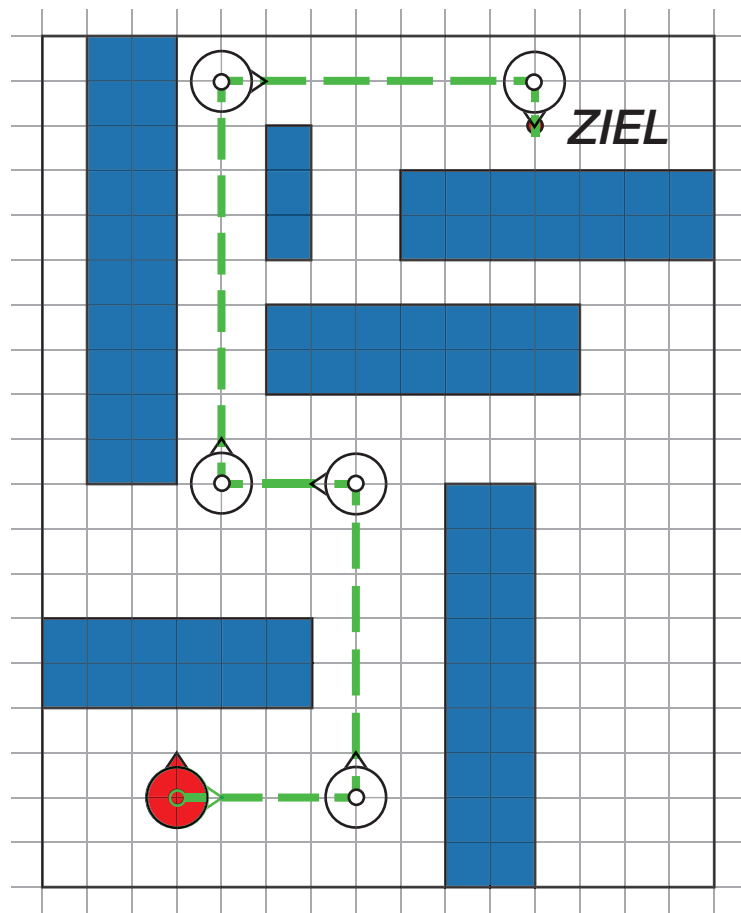
Die Person in diesem Bild kann nur vorwärtsgehen. Sie kann sich aber vor dem Weitergehen nach links oder rechts drehen und geht dann vorwärts in die neue Richtung.

Beschreiben Sie ihr einen Weg vom Start zum Ziel an den Hindernissen vorbei. Nutzen Sie zum Angeben von Entfernungen das Quadratgitter.

Beispiel:

Drehen Sie sich 90 Grad nach rechts, gehen Sie 4 nach vorne, drehen Sie sich nach links, 7 nach vorne, drehen Sie sich nach links, 3 nach vorne, drehen Sie sich nach rechts, 9 nach vorne, drehen Sie sich nach rechts, 7 nach vorne, drehen Sie sich nach rechts, 1 nach vorne.

Es gibt aber auch andere Möglichkeiten.



Bereiche			Handlungen								Inhalte			Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

3. LÖSUNGEN – Taschenregal

In ein Regal mit Schließfächern werden vier Taschen gestellt. Alle Fächer werden mit Türen verschlossen. Beschreiben Sie, in welchen Fächern die Taschen stehen.

Oberste Reihe:

zweites Fach von rechts

Zweite Reihe von oben:

zweites und viertes Fach von links

Zweite Reihe von unten:

drittes Fach von rechts

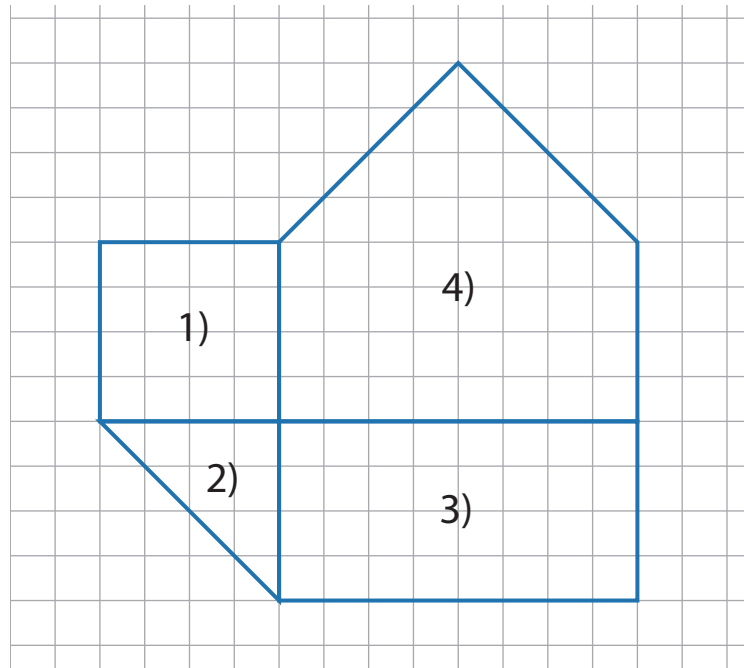
Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

4. LÖSUNGEN – Ebene Figurenteile beschreiben

Diese Figur besteht aus vier ebenen Teilfiguren. Beschreiben Sie die Teilfiguren.

Beispiele:

- 1) Quadrat: 4×4 Kästchen
- 2) Dreieck: Quadrat diagonal geteilt
- 3) Rechteck: 4×8 Kästchen
- 4) Haus aus Rechteck (4×8) plus dreieckiges Dach mit Breite 8 und Höhe 4 Kästchen



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

5. LÖSUNGEN – Räumliche Figurenteile beschreiben

Diese Bauwerke bestehen aus zwei, drei oder vier Klötzen.
Welche Form haben die Klötze?

- Man sieht einen Quader mit quadratischem Grundschnitt (aufrecht stehend), links daneben liegt ein Zylinder, dessen Kreisfläche den Quader berührt.
- Man sieht einen Quader (liegend), darauf steht ein etwa gleich hoher Zylinder.
- Man sieht einen Würfel, darauf stehend ein etwa gleich hoher Zylinder, links neben dem Würfel liegt ein Zylinder mit ca. doppelter Länge. Eine Kreisfläche berührt den Würfel.
- Man sieht einen Zylinder, der zwischen einem Würfel und einem Quader liegt. Der Würfel liegt links vom Zylinder, der Quader steht rechts vom Zylinder und hat eine quadratische Grundform. Quader und Zylinder sind etwa doppelt so lang/hoch wie der Würfel.
- Man sieht einen Würfel, darauf stehend ein etwa gleich hoher Zylinder, links neben dem Würfel liegt ein Zylinder mit ca. doppelter Länge. Eine Kreisfläche berührt den Würfel. Ein weiterer Zylinder liegt vor dem Würfel, so dass eine Kreisfläche die vordere Würfelfläche berührt.

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

6. LÖSUNGEN – Bauwerk und Teile anhand eines Bauvorgangs beschreiben

Hier sind vier gleich große Würfel zu einem Bauwerk zusammengefügt. Beschreiben Sie, wie dieses Bauwerk aus den vier Würfeln gebaut wird.

Es liegen 3 Würfel in einer Reihe, der vierte Würfel auf dem mittleren.

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

7. LÖSUNGEN – Bauwerk aus vier Würfeln identifizieren

Es gibt vier gleich große Würfel.

Der erste Würfel wird auf den Tisch gesetzt.

Der zweite wird davor an den ersten geklebt.

Der dritte wird auf den zweiten geklebt.

Der vierte wird rechts an den dritten geklebt.

Wie sieht das Bauwerk aus? Ist es auf den Bildern zu sehen?

An welcher Stelle sollte man den Text möglicherweise ergänzen oder genauer fassen?

Das erste Bauwerk entspricht der Beschreibung.

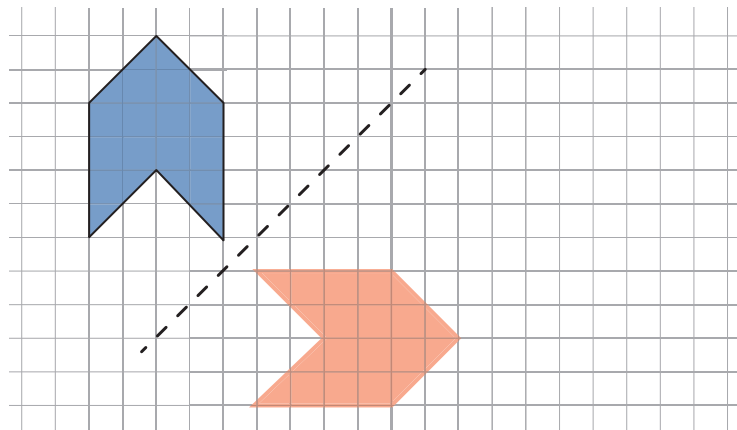
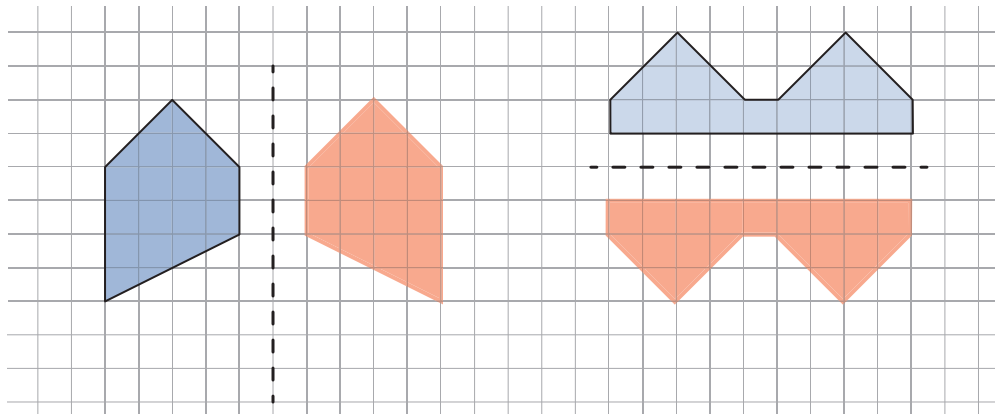
Oder: Das Bauwerk entspricht keiner der Beschreibungen (je nach subjektivem Verständnis des Begriffs „davor“).

Unklar ist vielleicht der Begriff „davor“, da es hier auf die Perspektive und darauf ankommt, ob sich die betrachtende Person als vor oder hinter dem Würfel sitzend begreift.

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

8. LÖSUNGEN – Spiegelbilder finden

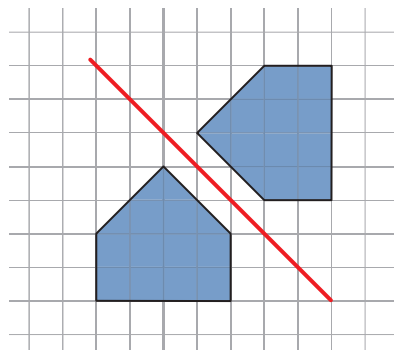
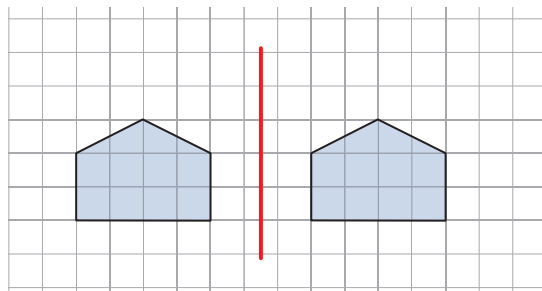
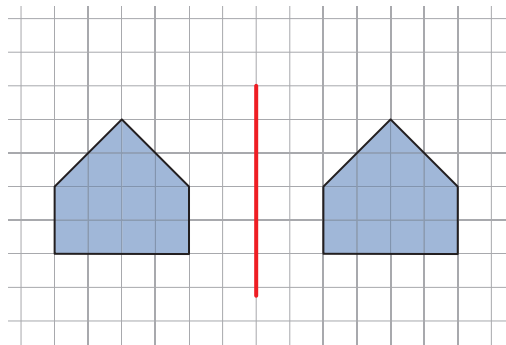
Zeichnen Sie zu den Figuren und den Spiegelachsen jeweils das Spiegelbild.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

9. LÖSUNGEN – Spiegelachsen finden

Zeichnen Sie zu den Figuren jeweils die Spiegelachse.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

10. LÖSUNGEN – Bewegungen bei gedrehten Figuren beschreiben

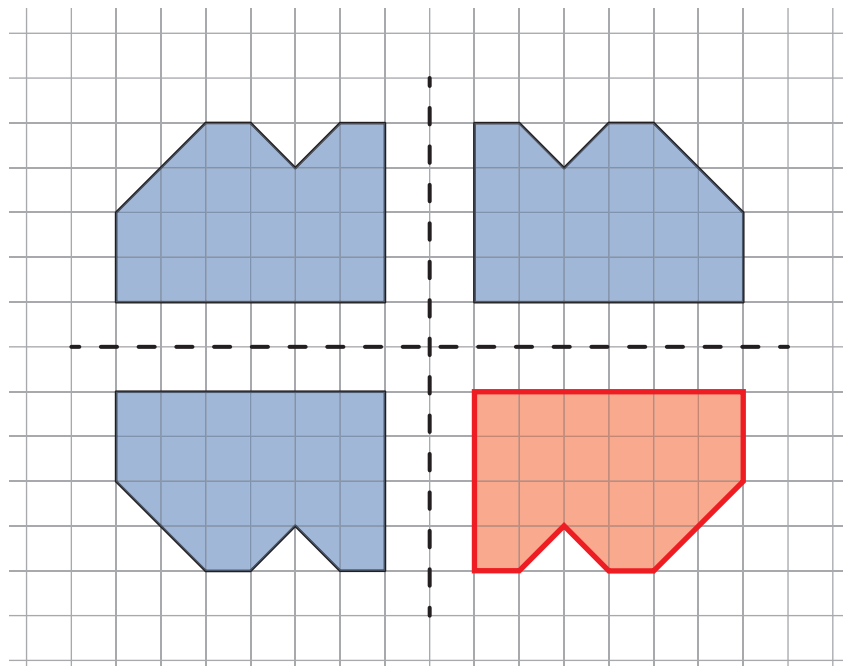
Beschreiben Sie, wie die beiden Figuren jeweils zusammenhängen.

- a) Die Figur wurde um 180 Grad gedreht.
- b) Die Figur wurde im Uhrzeigersinn um 90 Grad gedreht.

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

11. LÖSUNGEN – Spiegeln an zwei Achsen

Die Figuren sind an beiden Achsen gespiegelt. Ergänzen Sie die fehlende Figur.



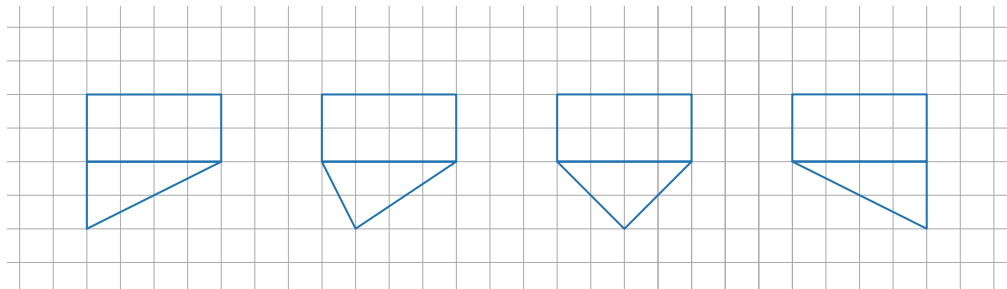
Ja, wenn man die Figur oben links um 180° dreht, erhält man auch die fehlende Figur.

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

12. LÖSUNGEN – Flächen im Quadratgitter

Hier sind vier Flächen im Gitter gezeichnet. Welche sind gleich groß?

Alle vier sind gleich groß.

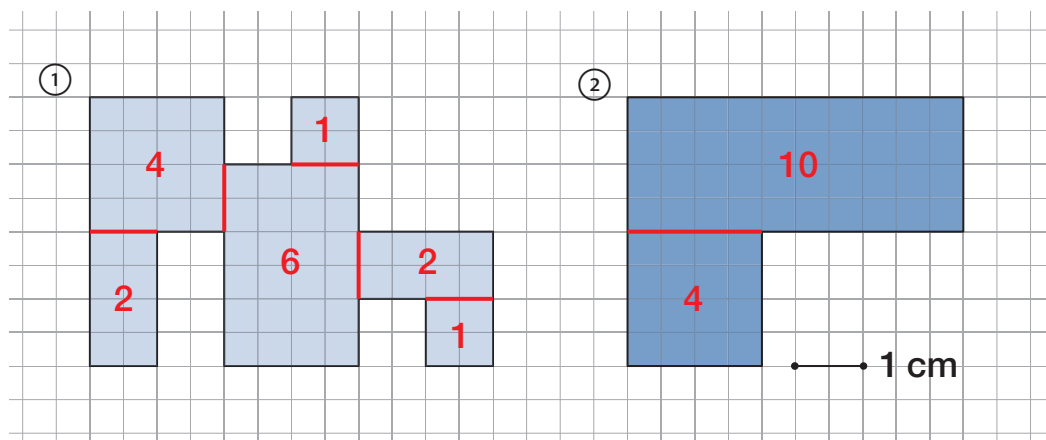


Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

13. LÖSUNGEN – Einteilen von Flächen zur Flächenmessung

Teilen Sie diese Flächen in Rechtecke ein und bestimmen Sie damit ihr Flächenmaß.

Beispiellösung:



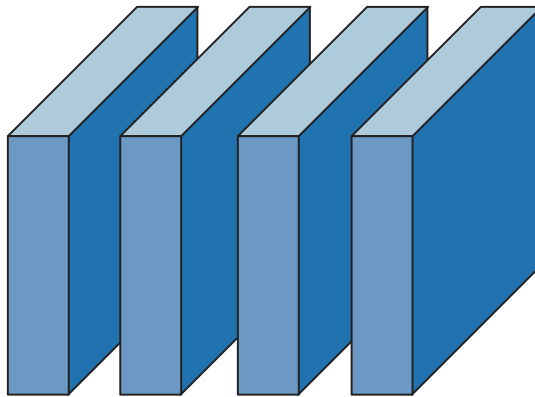
Die erste Figur hat 16 cm^2 Flächeninhalt, die zweite Figur 14 cm^2 .

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

14. LÖSUNGEN – Würfelschnitt

Ein Würfel wird parallel zu einer Seitenfläche durchgeschnitten.
Wie viele solche Schnitte braucht man, bis die Oberfläche der Teile
insgesamt doppelt so groß ist wie die des Würfels zu Beginn?

Die Oberfläche ist doppelt so groß, wenn der Würfel 3-mal durchgeschnitten wurde.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

15. LÖSUNGEN – Würfelschnitt

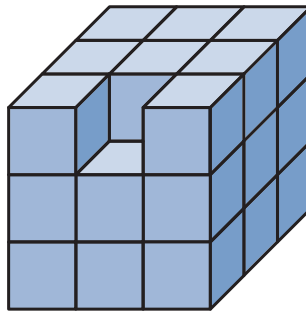
Hier ist ein Körper aus 27 kleinen Würfeln gebaut.

a) Ist der große Körper auch ein Würfel?

b) Oben vorn in der Mitte wird ein kleiner Würfel herausgenommen.
Ist die Oberfläche des Körpers nun kleiner geworden oder gleich-
geblieben, oder ist sie größer geworden?

a) Ja, der große Körper ist auch ein Würfel.

b) Die Oberfläche ist größer geworden.



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

16. Lösungen – Oberfläche einer Apfelsine

Ein Experiment:

Sie haben eine Apfelsine. Zeichnen Sie sechs Kreise mit demselben Durchmesser, den die Apfelsine hat. Schälen Sie nun die Apfelsine, zerteilen Sie die Schale in kleine Stückchen und decken Sie die Kreise mit den Schalenstückchen passend ab.

Wie viele Kreise kann man abdecken? Vergleichen Sie die Ergebnisse für verschieden große Apfelsinen.

Hier ist die Lösung je nach Apfelsine individuell unterschiedlich.

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

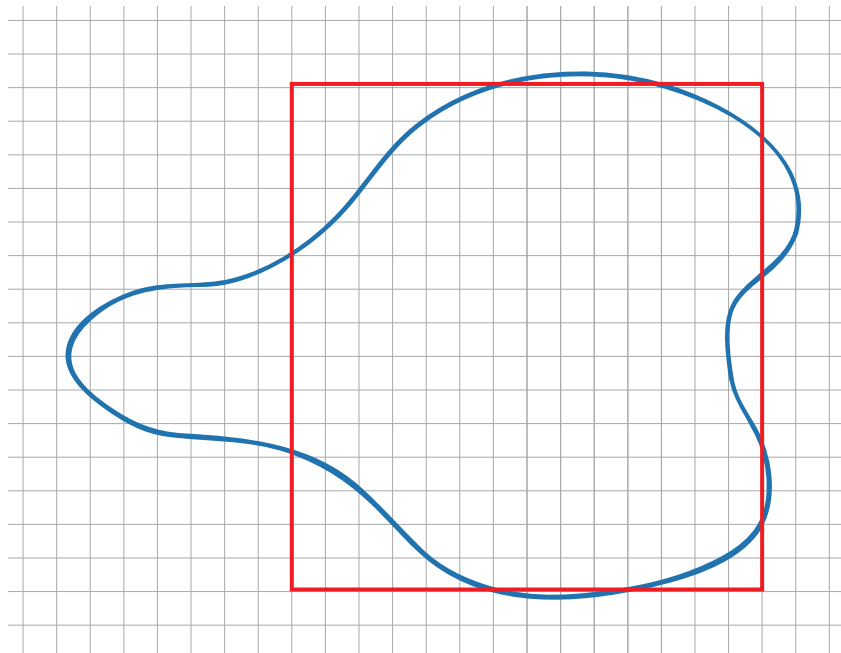
17. LÖSUNGEN – Fläche eines Sees mit einem Rechteck vergleichen

Hier ist ein See gezeichnet. Zeichnen Sie darüber ein Rechteck, das möglichst denselben Flächeninhalt hat wie der See.

Worauf ist dabei zu achten?

Beispiellösung:

Die „Seeflächen“, die außerhalb des Rechteckes liegen, sollten zusammen genommen ähnlich groß sein, wie die „Rechteckflächen“, die über den See hinausgehen.



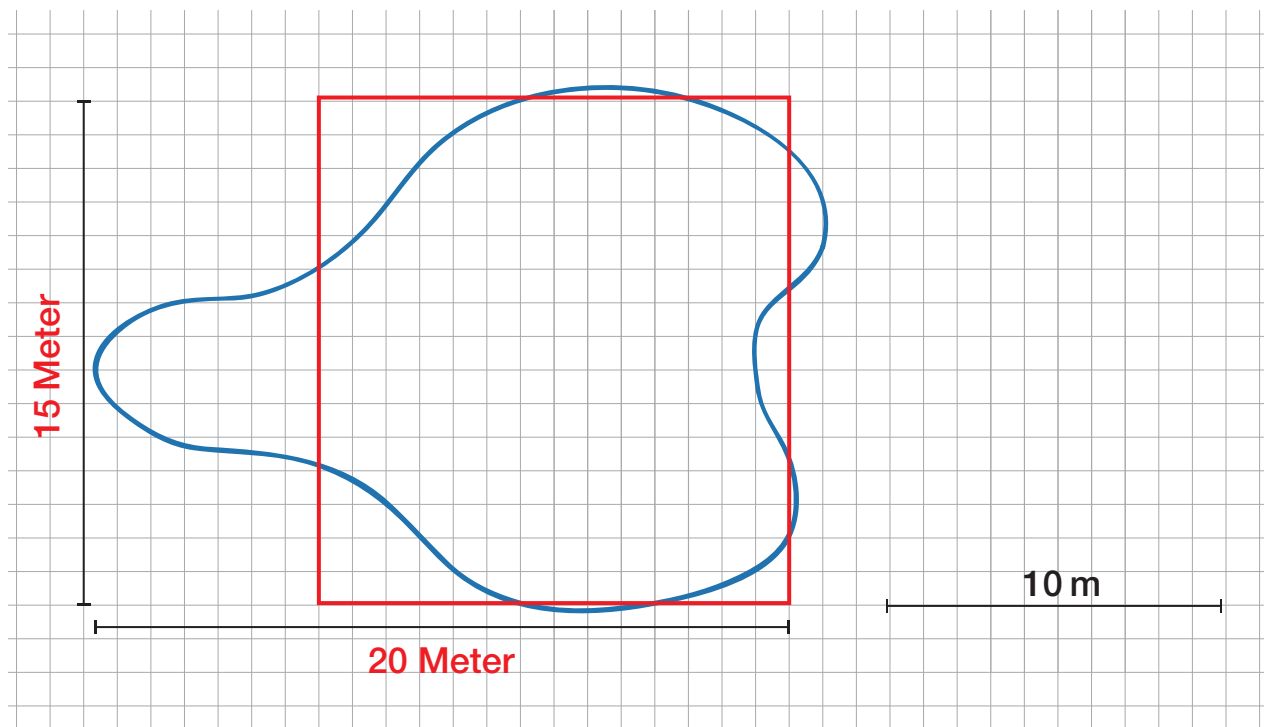
Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

18. LÖSUNGEN – Durchmesser und Fläche eines Sees schätzen

Hier ist ein See gezeichnet. Zeichnen Sie darüber ein Rechteck, das möglichst denselben Flächeninhalt hat wie der See. Unten ist eine Strecke gezeichnet, die angibt, wie lang Strecken auf dieser Karte sind. Schätzen Sie damit den größten Durchmesser und den Flächeninhalt des Sees.

Geschätzter Durchmesser: 20 m

Geschätzte Fläche: 210 m²:



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

19. LÖSUNGEN – Rauminhalt bei wachsenden Würfeln

Ein Würfel mit einem Dezimeter Kantenlänge hat einen Liter Rauminhalt.

a) Welchen Rauminhalt hat ein Würfel mit zwei Dezimetern Kantenlänge?

b) Welchen Rauminhalt hat ein Würfel mit drei Dezimetern Kantenlänge?

a) Ein Würfel mit einer Kantenlänge von zwei Dezimetern hat ein Volumen von 8 Kubikdezimetern bzw. Litern.

b) Ein Würfel mit einer Kantenlänge von drei Dezimetern hat ein Volumen von 27 Kubikdezimetern bzw. Litern.

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

20. LÖSUNGEN – Rauminhalt bei wachsenden Kugeln

Eine Kugel mit einem Dezimeter Durchmesser, z. B. eine große Orange, hat etwa einen halben Liter Rauminhalt.

Welchen Rauminhalt hat schätzungsweise eine Kugel mit zwei Dezimetern Durchmesser, etwa eine Melone?

Hier sollen die Teilnehmer/-innen schätzen, es werden also wahrscheinlich recht unterschiedliche Ergebnisse genannt.

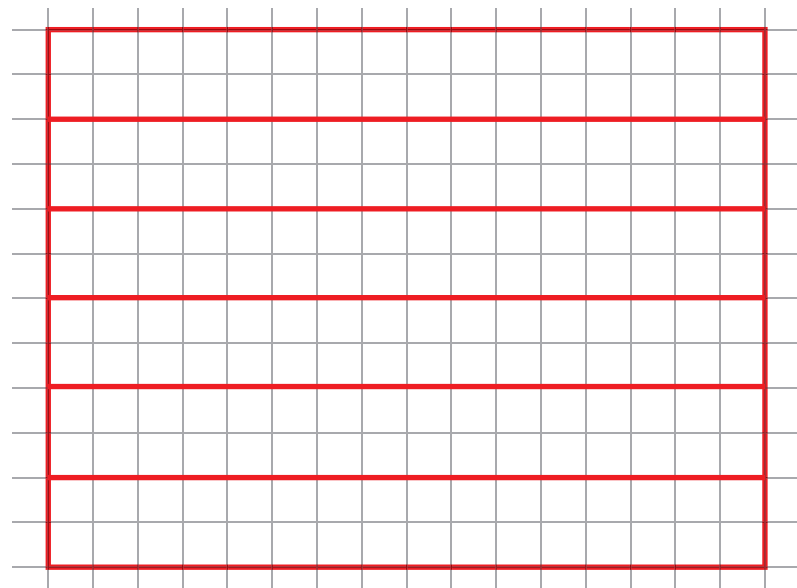
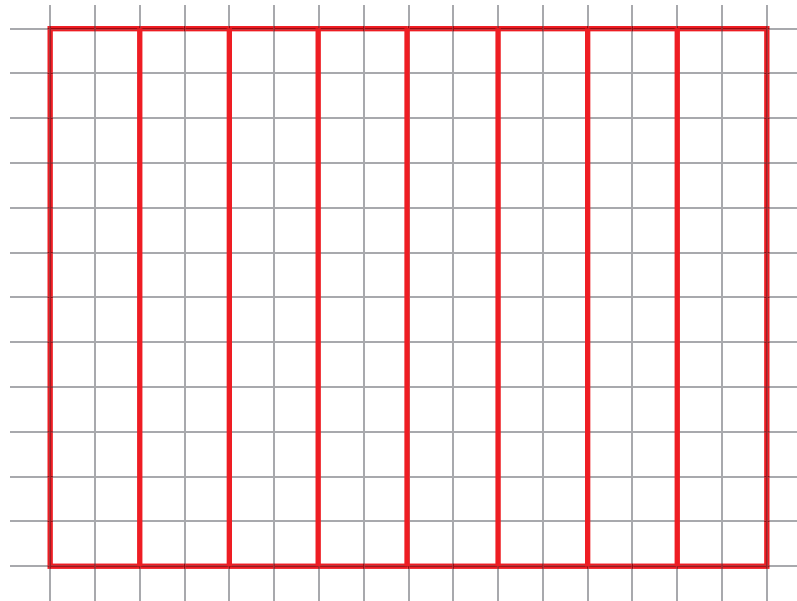
Tatsächlich verachtfacht sich das Volumen der Kugel ungefähr, wenn man den Durchmesser von 10 cm auf 20 cm verdoppelt.

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

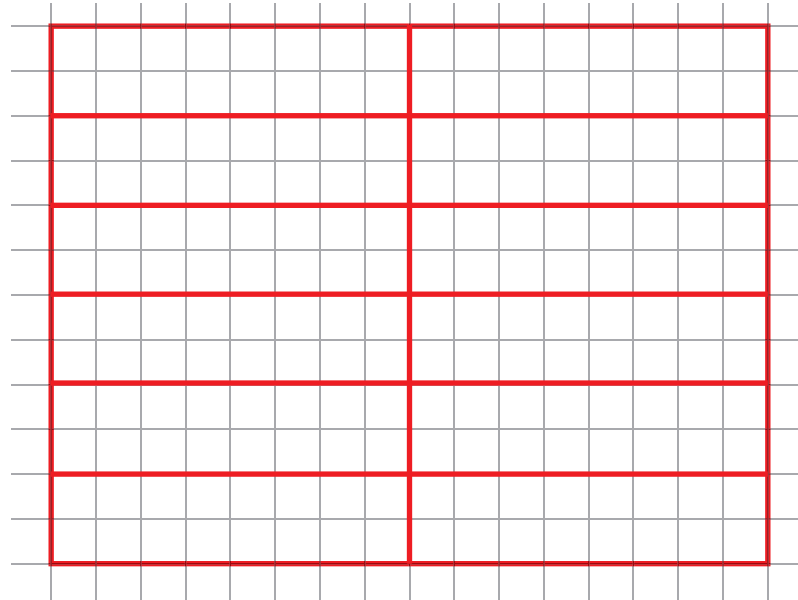
21. LÖSUNGEN – Rechtecke einteilen

- a) Zeichnen Sie drei Rechtecke, jeweils 8 cm breit und 6 cm hoch.
- b) Zerlegen Sie das erste Rechteck in 8 gleich große Teile, das zweite Rechteck in 6 gleich große Teile und das dritte Rechteck in 12 gleich große Teile.
- c) Beschreiben Sie, wie man vorgehen kann und was dabei zu entdecken ist.

a) und b)



Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	



c) für 8 Teile: $8 \text{ cm} : 8 = 1 \text{ cm}$

für 6 Teile: $6 \text{ cm} : 6 = 1 \text{ cm}$

für 12 Teile: Man könnte die 6 Teile jeweils in der Mitte teilen oder ausgehend von $12 = 4 \cdot 3$ die 8 cm in 4 Teile und die 6 cm in 3 Teile unterteilen.

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

22. LÖSUNGEN – Bruchstreifen herstellen

Ein Rechteck ist in zwölf gleich breite Streifen eingeteilt.

Zerlegen Sie schätzend und rechnend den zweiten Streifen in 2 gleich lange Teile, den dritten Streifen in 3 gleich lange Teile, den vierten Streifen in 4 gleich lange Teile und so weiter bis zum zwölften Streifen.

Wie kann man vorgehen, und was ist dabei zu entdecken?

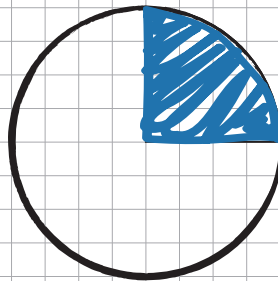
2. Streifen: halbieren, also : 2
3. Streifen: dritteln, also : 3
4. Streifen: vierteln, also : 4, oder erst halbieren, dann jedes Teil nochmals halbieren
5. Streifen: fünfteln, also : 5
6. Streifen: sechsteln, also : 6 oder erst dritteln, dann jedes Teil halbieren
7. Streifen: siebteln, also : 7
8. Streifen: achtern, also : 8, oder wie vierter Streifen und nochmals alle Teile halbieren
9. Streifen: neunteln, also : 9 oder erst dritteln, dann alle Teile nochmals dritteln
10. Streifen: zehnteln, also : 10 oder erst fünfteln, dann alle Teile halbieren
11. Streifen: elfteln, also : 11
12. Streifen: zwölfteln, also wie sechster Streifen und dann nochmals alle halbieren

Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

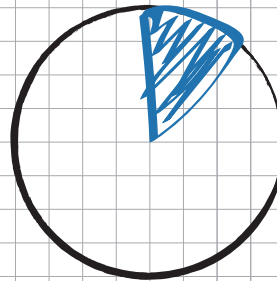
23. LÖSUNGEN – Kreisteile erkennen

Hier sind vier Kreise gezeichnet. Welcher Teil ist in den Kreisen jeweils markiert?

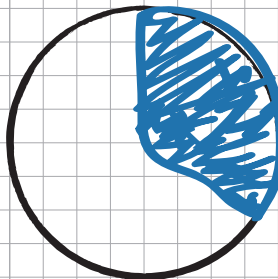
Ein Viertel



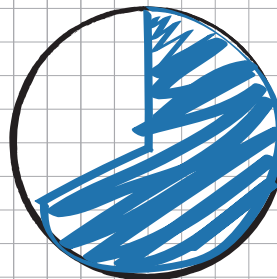
Ein Achtel



Ein Drittel



Zwei Drittel

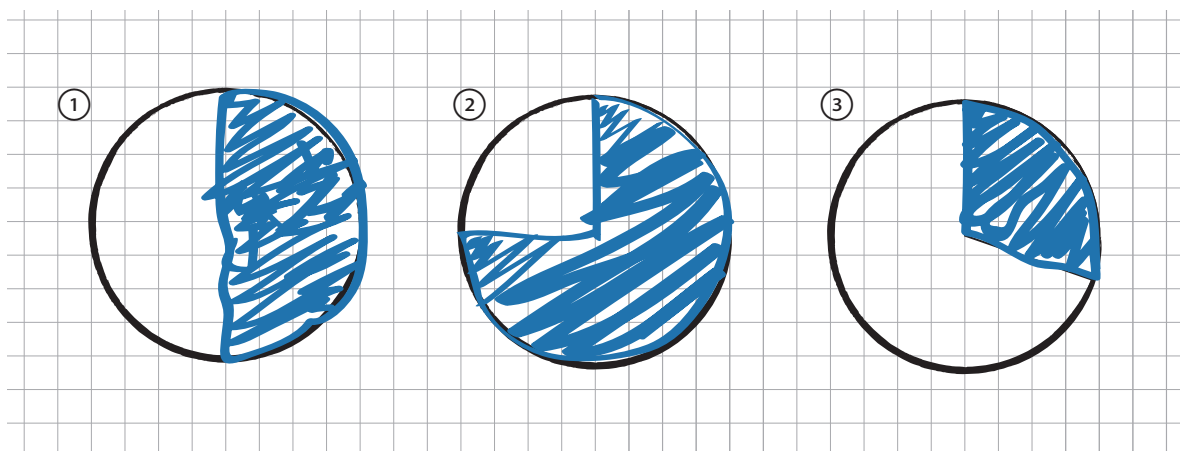


Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

24. LÖSUNGEN – Kreisteile markieren: Hälfte, Viertel, Drittel

Hier sind drei Kreise gezeichnet.

Markieren Sie schätzend in Kreis ① die Hälfte, in Kreis ② drei Viertel und in Kreis ③ ein Drittel.



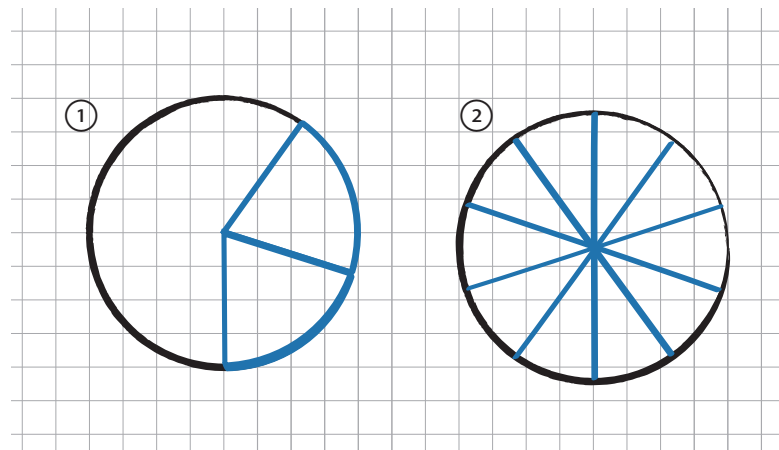
Bereiche			Handlungen							Inhalte				Geometrie
Raum/ Form	Größe/ Maße	Muster/ Strukturen	zeichnen	beschreiben	schätzen	messen	drehen/ spiegeln/ verschieben	vergrößern/ verkleinern	teilen (Brüche)	Volumen	Flächen	Oberflächen	Orientierung	

25. LÖSUNGEN – Kreisteile markieren: Fünftel und Zehntel

Hier sind zwei Kreise gezeichnet.

- Markieren Sie schätzend in Kreis ① zwei Fünftel, die aussehen wie Tortenstücke.
- Versuchen Sie dann, Kreis ② in zehn gleich große Teile zu zerlegen, die aussehen wie Tortenstücke.
- Wie kann man vorgehen? Wie kann man prüfen, ob das Ergebnis gut ist?

a) und b)



- Man könnte so vorgehen: Da Viertel und Sechstel (über den Zwischenschritt der Halbierung) einfacher einzuzeichnen sind, könnte man so zu einer geschätzten Tortenstückgröße „Fünftel“ gelangen. Diese Fünftel müssten dann jeweils nur noch halbiert werden, um Zehntel zu erhalten.